Physique Statistique 1
ÉPREUVE DU 17 novembre 2010 (Durée : 2 h)

1. On considère un système radioactif présentant une probabilité de désintégration λ par unité de temps, cette probabilité étant petite devant 1.
   (a) Montrer qu'après un temps t, la probabilité d'avoir observé N désintégrations vaut approximativement
   $$p(n,t) = \frac{(\lambda t)^N}{N!} e^{-\lambda t}$$
   (b) Tracer les courbes correspondantes pour $N = 0, 1, 2$ et commenter.
   (c) Calculer le nombre moyen de désintégrations observées après un temps t ainsi que la moyenne du carré du nombre de désintégrations ; commenter ces résultats.
2. On considère un système de N_0 particules pouvant occuper deux états, d'énergie 0 et ϵ. N particules sont dans l'état d'énergie ϵ.
   (a) Montrer que le poids statistique d'une telle configuration vaut
   $$W = \frac{N_0!}{N!(N-N_0)!}$$
   (b) On considère le cas $N_0 = 3$ et $N = 2$. Calculer W, puis l'entropie S du système en fonction de k_B constante de Boltzmann.
   (c) On double N_0 et N ; calculer le nouveau poids W_2 et la nouvelle entropie S_2. A t on $W_2 = 2W$? Commenter ce résultat.
   (d) On considère désormais que N_0 et N sont grands devant 1. Estimer S avec la formule de Stirling.
   (e) On double N_0 et N ; calculer la nouvelle entropie S_2 en fonction de S et commenter le résultat.
   (f) On considère désormais que les niveaux sont g fois dégénérés. Montrer que le poids devient
   $$W = \frac{N_0!}{N!(N-N_0)!} g^N$$
   (g) L'énergie totale du système vaut E ; exprimer cette énergie en fonction de N.
   (h) Exprimer l'entropie S du système en fonction de N_0,g, et $u = \frac{E}{N_0 \epsilon}$.
   (i) En déduire la température microcanonique Tc du système.
   (j) Exprimer N en fonction de Tc,N_0, ϵ et commenter le résultat suivant la valeur de T.

3. On modélise grossièrement un morceau de caoutchouc par N maillons identiques (monomères) , de longueur a, reliés les uns aux autres (polymérisation). Chaque maillon a une orientation arbitraire en 3 dimensions. Le premier maillon est attaché à l'origine O et le dernier est soumis à une force $\vec{F}$ parallèle à Ox. L'ensemble est en équilibre avec un thermostat à la température T.

   Chaque maillon i est repéré par ses coordonnées polaires (θ_i, ϕ_i) qui parcourent toutes les valeurs possibles ; la densité d'états correspondante vaut $dg_i = \sin\theta_i d\theta_i d\phi_i$.

   Chaque maillon étant libre, l'énergie totale du système se résume à l'énergie nécessaire à amener le dernier maillon à la position $\vec{R}$; cette énergie vaut $-\vec{R}.\vec{F} = -Fx$ où x est la coordonnée cartésienne du dernier maillon.

   Or
$$x = \sum_{i=1}^{N} a\cos\theta_i$$

   (a) Montrer que la fonction de partition du système vaut
$$Z = \Pi_{i=1}^{N} \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{\pi} d\theta_i \sin\theta_i e^{\frac{Fa\cos\theta_i}{k_bT}}$$

   (b) Remarquer que tous les termes dans le produit sont égaux, et en déduire
$$Z = \left(\frac{4\pi \mathrm{sinh}\frac{Fa}{k_bT}}{\frac{Fa}{k_bT}}\right)^N$$
   en faisant le changement de variable approprié ($d\theta\sin\theta = du$)

   (c) Déduire de cette expression la valeur moyenne de x (penser à dériver par rapport à F) et la mettre sous la forme
$$Na\mathcal{L}(\frac{Fa}{k_bT})$$
   avec $\mathcal{L}(t) = \mathrm{cotanh}t - \frac{1}{t}$ (fonction de Langevin).

   (d) Que vaut la valeur moyenne de x si F est petit ? (on précise que $\mathrm{cotanh}t \approx \frac{1}{t} + \frac{t}{3})$). Commenter en comparant à un ressort. Discuter de la variation du résultat en fonction de T.