Physique Statistique 1

ÉPREUVE DU 6 janvier 2010 (Durée : 2 h)

1. On considère des photons (de spin 0) remplissant une cavité de volume V, à la température T.

   La densité d'états en fonction de la fréquence ν des ondes électromagnétiques vaut

   $$g(\nu)d\nu = 2\frac{V4\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$$

   en tenant compte des deux polarisations possibles.

   (a) Exprimer en tenant compte des statistiques quantiques, pour un potentiel chimique supposé nul (nombre de particules infini), le nombre dN de photons d'énergie $h\nu$ et de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$

   (b) Calculer la densité d'énergie spectrale $u_\nu(\nu, T)$, énergie volumique de photons de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$

   (c) Calculer l'énergie interne U du système en intégrant par parties.

   On donne

   $$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

   $$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2,570$$

   (d) Calculer l'entropie S du système, puis l'énergie libre F, enfin la pression P (pression de radiation), par exemple à partir du grand potentiel.

   Montrer en particulier que l'entropie vaut

   $$S = \frac{U}{T} - \frac{k_b V 8\pi}{c^3}\int_0^\infty \ln(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_b T}})d\nu$$

   ce qui conduit à

   $$F = -\frac{1}{3}aT^4 V$$

   $$P = \frac{1}{3}aT^4$$

   avec a une constante. Indication : intégrer par parties Que vaut l'enthalpie libre ?

   (e) Estimer le comportement de $u_\nu(\nu, T)$ pour les faibles et hautes fréquences ; tracer un graphe estimé de $u_\nu(\nu, T)$

2. On considère des électrons d'énergie ε dans un solide, supposés obéir à la statistique quantique fermionique.

(a) Etudier le comportement de la fonction de Fermi-Dirac

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{k_b T}}}$$

en fonction de

pour ε petit et grand devant ε_F. Commenter le résultat.

(b) Linéariser l'expression pour ε proche de ε_F en posant $X = \frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{k_b T}$. Tracer le graphe approché de $f(\varepsilon)$ sous forme de trois droites et commenter.

(c) On suppose que les électrons se comportent comme un gaz parfait confiné dans un volume V. Rappeler l'expression de la densité d'états $g(\varepsilon)$ du système.

(d) Calculer $\varepsilon_F(0)$ énergie de Fermi à 0K, puis à une température T en supposant dans ce dernier cas l'approximation linéarisée par morceaux de $f(\varepsilon)$ valable (c'est à dire en intégrant de 0 à $\varepsilon_F - 2k_bT$, puis de $\varepsilon_F - 2k_bT$ à $\varepsilon_F + 2k_bT$, puis jusqu'à l'infini.

Montrer que l'on obtient

$$\varepsilon_F = \varepsilon_F(0)(1 - \frac{1}{3}(\frac{k_b T}{\varepsilon_F(0)})^2)$$

(e) pour le cuivre de masse volumique 9000 U.S.I. et de masse molaire 63,6 g, sachant qu'il y a un électron libre de masse $9{,}1.10^{-31}$ kg par atome, montrer qu'à température ambiante la statistique de Maxwell-Boltzmann serait fausse.

(f) De même (par linéarisation par morceaux) calculer la capacité calorifique du gaz d'électrons.