Physique Statistique 1
ÉPREUVE DU 13 janvier 2009 (Durée : 2 h)

1. On considère un gaz parfait de particules quantiques (fermions ou bosons) confinées dans une enceinte de volume V. Les particules sont de masse m et de spin S.
   (a) Montrer qu'en notant $g = 2S + 1$, avec l'approximation du continu, la densité d'états $g_s(\epsilon)$ du système pour une énergie ϵ se met sous la forme
   $$g_s = \frac{gVm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\sqrt{\epsilon}$$
   (b) Montrer qu'en tenant compte des effets statistiques quantiques le nombre de particules ayant une énergie comprise entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$ vaut
   $$dN = \frac{gVm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\frac{\sqrt{\epsilon}d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon-\mu}{k_BT}} \pm 1}$$
   où μ est le potentiel chimique du système, k_B la constante de Boltzmann. Préciser le signe pour le cas des fermions.
   (c) Le nombre de particules vaut N. Expliquer comment en principe on pourrait après le changement de variable $z = \frac{\epsilon}{k_BT}$ relier la densité du système et sa température à son potentiel chimique.
   (d) Exprimer le grand potentiel Ω du système et montrer qu'après passage au continu (en employant la densité d'états) on obtient
   $$\Omega = \mp\frac{k_BgVTm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \sqrt{\epsilon}\ln(1 \pm e^{\frac{\epsilon-\mu}{k_BT}})d\epsilon$$
   (e) Exprimer de même l'énergie totale E du système.
   (f) En employant une intégration par parties, sachant que $\Omega = -PV$ avec P la pression montrer que
   $$PV = \frac{2}{3}E$$
   (g) Commenter ce résultat en le comparant aux résultats de thermodynamique statistique classique pour un gaz parfait.
2. On considère désormais des électrons de masse m astreints à se déplacer sur une surface bidimensionnelle d'aire A.
   (a) Que vaut le spin de ces particules ? Quelle est leur nature quantique ?
   (b) En approximation semi-classique, que vaut le volume d'une cellule de l'espace des phases dans ce cas bidimensionnel ?
   (c) Que vaut la densité d'états $g(\epsilon)$ si on se place en coordonnées polaires en espace comme en impulsion ?

(d) Montrer finalement que le nombre total de particules vaut

$$N = \frac{4\pi A}{h^2} \int_0^\infty \frac{pdp}{e^{\frac{p^2/2m-\mu}{k_B T}} + 1}$$

(e) En se plaçant à 0 K, tracer l'allure de la distribution de Fermi-Dirac.

(f) Exprimer le moment de Fermi $p_F(0)$, puis l'énergie de Fermi $\epsilon_F(0)$ et le potentiel chimique $\mu(0)$.

(g) Que vaut la vitesse maximale v_F d'un électron ? Que vaut sa vitesse moyenne v_M en fonction de v_F ? Exprimer v_F en fonction de la densité surfacique $\sigma = N/A$.

(h) Montrer que l'énergie moyenne du système vaut

$$E = \frac{1}{2} N\mu(0)$$

(i) Sachant que la pression P vaut

$$P = -\frac{\partial F}{\partial A}$$

à T et N fixés (ici T est toujours nulle), avec F l'énergie libre macroscopique, exprimer P en fonction de l'énergie moyenne puis du potentiel chimique $\mu(0)$.

(j) Application numérique : le graphite est quasi-bidimensionnel pour les électrons de conduction, au nombre de 1 par atome. Le réseau est hexagonal et de maille $1,42.10^{-10}$ m. Comparer la pression des électrons au cas du cuivre (tridimensionnel) pour lequel on trouve une pression de $3,8.10^5$ atmosphères.