Physique Statistique 1
ÉPREUVE DU 5 novembre 2008 (Durée : 2 h)

1. Un promeneur fait une marche aléatoire à une dimension, composée d'étapes de longueur l à chaque intervalle de temps τ.
   (a) Montrer qu'après N étapes la probabilité d'avoir fait $(N+S)/2$ étapes à gauche et $(N-S)/2$ étapes à droite vaut
   $$P(S) = \frac{N!}{(\frac{N+S}{2})!(\frac{N-S}{2})!2^N}$$
   (b) En supposant que N est grand devant 1 et devant S et en utilisant la formule de Stirling en déduire que
   $$\ln(\frac{P(S)}{P_0}) = -\frac{S^2}{2N}$$
   avec P_0 une constante. Discuter ces hypothèses.
   (c) En déduire que la probabilité de se trouver à l'abscisse $x = Sl$ vaut
   $$P(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\pi Dt})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$
   avec $ct = Nl$ et $D = \frac{1}{2}cl$ est la constante de diffusion.
   (d) Vérifier que P obéit à l'équation de diffusion (loi de Fick)
   $$\frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$
2. On considère un ensemble d'oscillateurs harmoniques identiques, très légèrement couplés, de Hamiltonien
   $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$
   Chaque oscillateur a une probabilité $e^{-\frac{\epsilon}{k_bT}}$ d'avoir une énergie ϵ.
   En introduisant $\beta = \frac{1}{k_bT}$, et en pensant à faire apparaître la dérivée par rapport à ce paramètre, calculer la valeur moyenne de x^2 et de p^2 suivant
   $$< F > = \frac{\int_x \int_p F(x,p) e^{-\frac{\epsilon(x,p)}{k_bT}} dxdp}{\int_x \int_p e^{-\frac{\epsilon(x,p)}{k_bT}}}$$
   et montrer que la valeur moyenne de ϵ vaut k_bT.

3. La fonction de partition q d'un gaz parfait monoatomique de masse atomique m contenu dans un récipient de volume V vaut

$$q = \frac{V}{\Lambda^3}$$

avec

$$\Lambda = h(\frac{\beta}{2\pi m})^{\frac{1}{2}}$$

et h la constante de Planck.

   (a) Exprimer l'énergie interne U de ce gaz parfait (énergie moyenne) en supposant qu'il obéit à la distribution de Maxwell-Boltzmann

   (b) De même, montrer que son entropie S prend la forme

$$S = R \ln \frac{aT^{\frac{5}{2}}}{P}$$

   où T est la température et P la pression.

   (c) Calculer

$$(\frac{\partial S}{\partial P})_T$$

   et

$$(\frac{\partial S}{\partial T})_V$$

   et commenter le résultat en le simplifiant grâce à la loi des gaz parfaits pour une mole. Comparer aux résultats de thermodynamique classique.