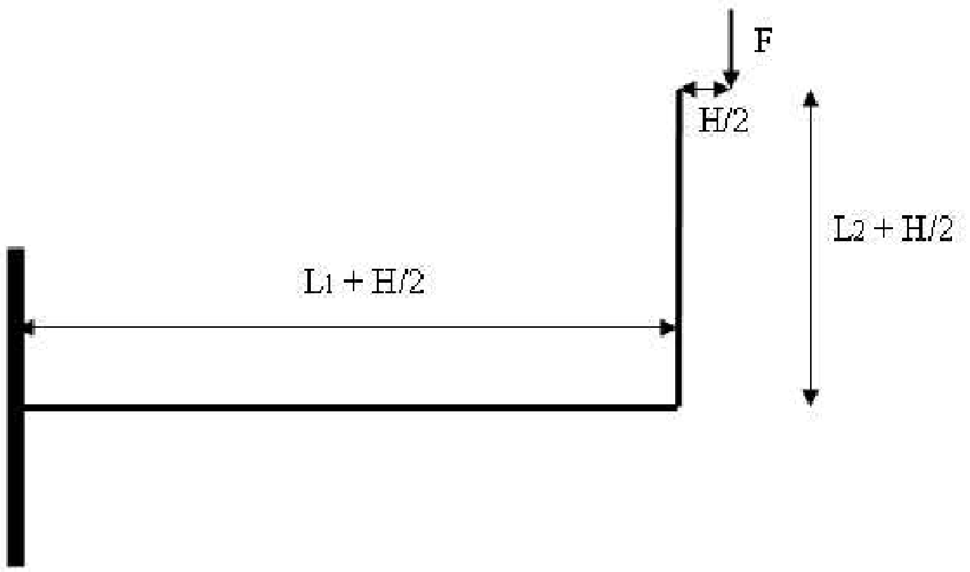

FIGURE 4.4 – Une structure cantilever, ressemblant à une poutre.

4.6 Critères de convergence pour une étude en statique.

4.6.1 Introduction

Le but des trois travaux pratiques à venir est de répondre aux questions que l'utilisateur se pose en pratique :
- combien d'éléments utiliser,
- quel type d'éléments utiliser (quadrangulaire ou triangulaire),
- quel degré d'interpolation utiliser (linéaire ou quadratique) ?

4.6.2 Alibi : l'étude d'une poutre cantilever en statique

Les dimensions de la poutre sont les suivantes : $L_1 = 400$ mm, $L_2 = 300$ mm, $H = 40$ mm, l'épaisseur dans la direction normale à la figure 4.6.2 $B = 20$ mm. Le matériau est l'acier. Une force ponctuelle F normale est exercée à son extrémité libre.

4.6.3 Un premier calcul

1. Entrer la géométrie (Dessin/Maillage).
2. Décider d'un maillage (grossier pour commencer), nombre et type d'éléments (Maillage par bloc). Faire un schéma du maillage en donnant la numérotation des noeuds.
3. Entrer l'épaisseur, le matériau et les conditions aux limites (Elasticité).
4. Entrer le chargement. La force ponctuelle est initialement supposée de 10 kN.
5. Lancer le calcul (Calculer) et observer les résultats : courbes isovaleurs, cercles de Mohr, fichiers de résultats. Que signifient σ_{xx}, σ_{XX} et "Tresca" et "Von Mises" ?
6. Noter la valeur de la flèche à l'extrémité de la poutre et de la contrainte maximale. La limite d'élasticité est-elle respectée ? Conclusion.
7. Comparer vos résultats avec ceux des voisins. Conclusion.

4.6.4 Solution approchée

1. A l'aide du module Ossature de RDM, donner pour la poutre cantilever étudiée, le diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant, la contrainte maximale σ_{xx} et $\sigma_{VonMises}$, la

flèche à l'extrémité de la poutre. Pourquoi ces résultats sont-ils approchés ? *Retrouver ces résultats analytiquement.*

2. Donner la valeur maximale de la force applicable à l'extrémité pour rester dans la zone d'élasticité.

4.6.5 Convergence d'un maillage régulier

1. Afin d'étudier la convergence de différents éléments, réaliser les maillages suivants :
   - pour les triangles : 2×4 , 4×8 et 8×16 linéaires, 2×4 et 4×8 quadratiques,
   - pour les quadrangles : 1×4 , 2×8 et 4×16 linéaires, 1×4 quadratiques.
2. Exprimer les contraintes de Von Mises et de la flèche en pourcentage des valeurs théoriques. Reporter ces résultats dans un graphique en fonction du nombre de nœuds de chaque maillage. Conclure.

4.6.6 Convergence pour un maillage irrégulier

Le but de cette séance est d'établir une méthode d'optimisation du maillage, basée sur l'étude des contraintes. En effet, pour un nombre de degrés de liberté donné (ce qui conditionne le coût de calcul), comment répartir au mieux les éléments, pour que l'erreur faite sur la discrétisation des champs (de déformation et de contrainte) soit acceptable en tout point ? Il nous faut définir un critère de remaillage.

4.6.7 Approximation des contraintes

Soit un élément de barre à deux nœuds (champ linéaire) et un à trois nœuds (champ quadratique).

1. Donner l'expression du déplacement $u(x)$ en fonction des déplacements nodaux u_i pour chaque type d'élément. En déduire les expressions des déformations $\epsilon(x)$ et des contraintes $\sigma(x)$. Comment varient les contraintes dans un élément linéaire ?
2. On suppose que l'élément peut subir soit une contrainte constante, soit une contrainte affine ($\sigma(x) = a\ x{+}b$). Pour quel type d'élément et de contrainte aura-t-on une solution approchée ? A-t-on continuité des contraintes entre deux éléments ?
3. Imaginer une configuration simple (liaisons et charges) pour laquelle les éléments linéaires sont aussi performants que les éléments quadratiques. Valider en comparant les résultats numériques aux résultats analytiques correspondants. Peut-on obtenir un résultat exact avec un seul élément ?

4.6.8 Définition d'un critère de convergence

Le code de calcul RDM6 est un code formulé en déplacement : ce sont les déplacements aux noeuds qui sont les variables en fonctions desquelles la résolution est faite. Ceci implique la continuité des déplacements aux noeuds et donc le long de la frontière entre deux noeuds. A partir des déplacements aux noeuds sont calculés successivement :
- aux points de Gauss, les déformations puis les contraintes,
- en tout point de chaque élément par extrapolation, les déformations puis les contraintes,
- et donc à fortiori en tout point sur une frontière entre deux éléments, les déformations puis les contraintes.

Il n'y a donc aucune raison pour que la continuité des champs de déformation et de contrainte soit assurée. Par exemple, pour des éléments triangulaires à trois noeud, le champs de déplacement est linéaire dans l'élément, donc son gradient spatial (le champs des déformations) est constant dans l'élément, donc le champ des contraintes est constant dans l'élément. Il existe une discontinuité de contrainte entre deux éléments.

Pour ne pas choquer l'utilisateur de base du code, RDM6 effectue en chaque noeud du maillage, la moyenne des contraintes en ce noeud obtenue dans chaque élément qui le compose. Il est regrettable que les champs de contrainte par élément, ne puissent être affichée par RDM6, alors que certains autres codes (ANSYS, CASTEM, ABAQUS...) le font. La solution que vous obtenez est donc continue en déplacement, discontinue en contrainte (même si vous ne le voyez pas). Ce n'est pas plus absurde qu'une solution discontinue en déplacement et continue en contrainte, qui serait obtenue par un code en en formulation en contrainte (les variables aux noeuds étant alors les contraintes).

Pour minimiser la distance entre votre solution numérique et la solution réelle du problème, une idée est de minimiser les discontinuités. Plusieurs critères peuvent être utilisés :
- la discontinuité de contrainte aux noeuds
- la discontinuité en énergie de déformation
- l'erreur en relation de comportement
- ...

Considérons le premier critère.
1. Pour un élément linéaire, on définit l'erreur de convergence e égale à la discontinuité de contrainte entre deux éléments adjacents. Le critère de convergence η est le rapport de cette erreur par la contrainte moyenne σ_m sur l'ensemble des éléments considérés : $\eta = \frac{e}{\sigma_m}$. Le critère de convergence global η_m est la moyenne sur l'ensemble des éléments.
2. La feuille de calcul EXCEL `critère-convergence.xls` permet de calculer ce critère à partir des données fournies par RDM6. Dans le menu `Résultats`, faire une coupe suivant une ligne frontière. Choisir comme grandeur une contrainte. Editer les données et les enregistrer dans un fichier. Ouvrir ce fichier dans EXCEL et copier les données dans la feuille de calcul du critère. A partir des résultats obtenus sur un maillage grossier en quadrangles linéaires (maillage par bloc), faire le calcul du critère pour la frontière horizontale supérieure et la frontière verticale à l'encastrement.
3. Affiner progressivement le maillage pour obtenir une erreur globale inférieure à 10%. Noter au fur et à mesure les valeurs de la contrainte maximale de Von Mises ainsi que la flèche.

4.6.9 Maillage optimisé

1. Pour converger uniformément sur tout le domaine, l'erreur doit être la même sur tout le maillage. En vous aidant d'un graphique (contrainte en fonction de x), établir une relation entre la variation des contraintes (pente=$\frac{d\sigma(x)}{dx}$), la taille des éléments T et e une erreur donnée.
2. D'après les expressions des contraintes dans la poutre cantilever en flexion, déterminer une répartition optimale des nœuds.
3. Réaliser un seul maillage optimisé en maillant plusieurs sous-domaines par bloc. Vérifier la convergence de la contrainte maximale de Von Mises et la flèche, ainsi que la progression du critère de convergence.
4. Après avoir rappelé la définition de la qualité géométrique d'un élément (distorsion), expliquer comment tenir compte de ce critère pour améliorer le dernier maillage. Réaliser ce maillage à l'aide du mailleur automatique (Delaunay) en utilisant la fonction de modification locale de la taille des éléments.

4.7 Critères de convergence : influence du type d'élément

4.7.1 Alibi : problème d'une éprouvette de traction.

Une éprouvette de traction est décrite par la figure 1-A. Elle ressemble à l'éprouvette que vous avez sollicité en travaux pratiques de mécanique des solides déformable. Afin de comprendre les raisons qui ont mené à cette forme, on modélisera plusieurs types d'éprouvettes (figures 1-B et 1-C).

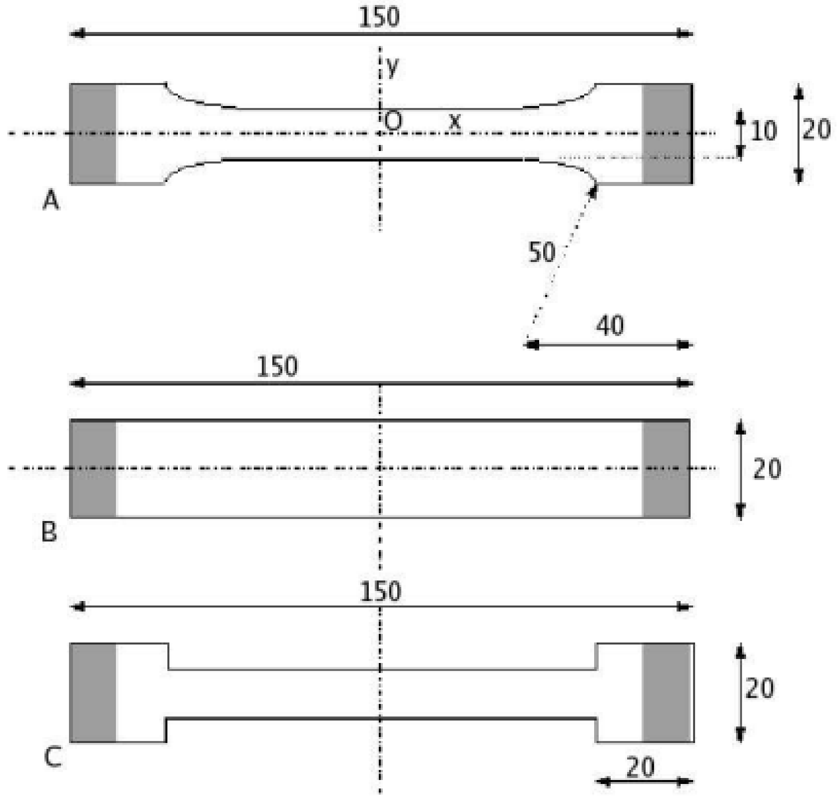

FIGURE 4.5 – 3 éprouvettes de traction de formes différentes.

4.7.2 Préparation du tp

Sur une machine de traction, une des extrémités de l'éprouvette est maintenue dans le mors fixe tandis que l'autre est engagée dans le mors mobile (figure 2). Le matériau utilisé est une plaque de Plexiglas de 4mm d'épaisseur dont les caractéristiques sont données ci-après :

Module d'élasticité $E = 2900$ MPa, coefficient de Poisson $\nu = 0.4$, masse volumique $\rho = 1{\cdot}8\text{g/cm}^3$, coefficient de dilatation $\alpha = 81.10^{-6}\text{K}^{-1}$, conductivité thermique $s = 0,18\text{W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$, capacité calorifique volumique $C = 1,62\text{J.m}^{-3}\text{K}^{-1}$, limite élastique du matériau $\sigma_e = 80\text{MPa}$.

L'étendue de la prise en mors de l'éprouvette est de 10 mm (zones grisées).

Pour chaque type d'éprouvette (voir figure 4.5) :

- Préparer le maillage et la mise en données du problème de traction.
- Prédire la direction de rupture de l'éprouvette, sachant qu'elle correspond à la direction de contrainte tangentielle maximale.
- Calculer la charge à appliquer (en N) pour atteindre la limite élastique du matériau.

4.7.3 Pour chaque type d'éprouvette

- Effectuer le maillage de l'éprouvette. Appliquer les conditions aux limites correspondant au montage dans la machine de traction ; appliquer à l'éprouvette une charge de 100 N.
- Observer la répartition des contraintes dans l'éprouvette, affiner le maillage si nécessaire. Commenter le principe de Barré - St Venant. Retrouver la direction de rupture de l'éprouvette.
- Expliquer les raisons qui ont mené à la forme d'éprouvette normalisé (type A).

4.7.4 Modélisation des contraintes dans la pièce pour la partie dans les mors.

Vous avez rencontré la difficulté de choisir le lieu d'appliquation de la force de traction : à l'extrémité de la pièce ou sur la ligne séparant la partie grisée de la partie blanche. Pour avoir une estimation de la manière dont transite la force de traction des mors vers l'éprouvette à travers cette surface grisée, le code élément fini peut vous répondre.

1. Dessiner sur une feuille une coupe dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$ de la pièce et des mords.
2. Choisir des mors en acier, ayant une épaisseur supérieur à la largeur de la pièce.
3. Dessiner à priori la répartition de σ_{yx} le long des noeuds de l'interface acier-plexiglas.
4. Quelle est la condition cinématique en un noeud de l'interface acier-plexiglas ?
5. Faire le calcul par élément fini de σ_{yx} le long des noeuds de l'interface acier-plexiglas.
6. Conclure.