Mise en équation.

1) $$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$
$$= r_1 \vec{y_1} + r_2 (-\vec{y_1})$$
$$\frac{d\vec{OB}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(r_1 - r_2)\, \vec{y_1}\right]$$
$$= (r_1 - r_2) \frac{d}{dt}\vec{y_1}$$
$$= (r_1 - r_2)\, \dot{\alpha}(-\vec{x_1})$$
$$\frac{d\vec{OB}}{dt} = (r_2 - r_1)\, \dot{\alpha}\, \vec{x_1}$$

2) $$T = T_t + T_r.$$
$$T_t = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{OB}}{dt}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} m (r_2 - r_1)^2 \dot{\alpha}^2$$
$$T_r = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2$$
$$T = \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \left[J + m (r_2 - r_1)^2 \right]$$

3) $$T = \frac{1}{2} J_t \dot{\alpha}^2$$
L'égalité des 2 équations $\Rightarrow$ $J_t = J + m(r_2 - r_1)^2$

4) $$\left\{\begin{array}{l} J = 2\ 10^{-4}\ kg\, m^2 \\ m = 0{,}15\ kg \\ r_2 = 2\ 10^{-2}\ m \\ r_1 = 1\ 10^{-2}\ m \end{array}\right. \Rightarrow J_t = 2.15\ 10^{-4}\ kg\, m^2$$

5) A une constante près, on peut définir l'énergie potentielle de pesanteur par.
$$V = m g\, \vec{OB} \cdot \vec{g}$$
$$= m g\, (r_1 - r_2)\, \vec{y_1} \cdot \vec{y}$$
$$V = mg(r_1 - r_2)\cos\alpha$$

6) ~~PFD en rotation~~ Par Lagrange
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \dot{\alpha}\left[J_t\right]$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = J_t \ddot{\alpha} \qquad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = -mg(r_1 - r_2)\sin\alpha$$

d'où $J_t \ddot{\alpha} + mg(r_2 - r_1) \sin\alpha = 0$

Posons $k = mg(r_2 - r_1)$

Alors $J_t \ddot{\alpha} + k \sin\alpha = 0$

$$\left| \begin{array}{l} m = 0,15 \text{ kg} \\ g = 9.81 \text{ m s}^{-2} \\ r_2 = 0.2 \text{ m} \\ r_1 = 0,01 \text{ m} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{k = 0,0147 \text{ N m}}$$

7) si α petit alors $\sin\alpha \rightarrow \alpha$.

$$\boxed{J_t \ddot{\alpha} + k\alpha = 0}$$

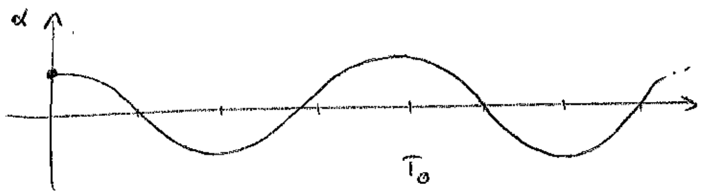
Partie B oscillations libres.

1) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{J_t}}$

avec $\left| \begin{array}{l} k = 0,0147 \text{ N m} \\ J_t = 2,15 \; 10^{-4} \text{ kg m}^2 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 8,27 \text{ s}^{-1}}$

car $\sqrt{\dfrac{\text{N m}}{\text{kg m}^2}} = \sqrt{\dfrac{\text{kg m s}^{-2} \text{ m}}{\text{kg m}^2}} = \text{s}^{-1}$

2) $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 0,759 \text{ s}}$

3) 

$\alpha(t) = \dfrac{\pi}{6} \cos(\omega_0 t)$

4) mesure du temps t_3 de 3 oscillations $\rightarrow t_3 = 3\,T_0$

les valeurs sont réalistes.

Partie C

$$J_t \ddot{\alpha} + c\dot{\alpha} + k \sin\alpha = 0$$

1) $[c\dot{\alpha}] = [J_t \ddot{\alpha}]$

$= kg\, m^2\, s^{-2}$

2) l'observation montre que on observe un dépassement de la position 0

$\Rightarrow$ le système est sous-amorti

3)
$$\begin{cases} x(t) = A e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi) \\ \text{avec} \quad \omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2} \\ A = \dfrac{(v_0 + \xi\omega_0 x_0)^2 + (x_0\omega_d)^2}{\omega_d^2} \\ \phi = \arctan \dfrac{x_0\omega_d}{v_0 + \xi\omega_0 x_0} \end{cases}$$

poly JCP p 14 $\Rightarrow$

~~Comme v_0~~

$x_0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{6}$

$v_0 \Rightarrow \dot{\alpha}_0 = 0$

$$\begin{cases} A^2 = \dfrac{\xi^2\omega_0^2\alpha_0^2 + \alpha_0^2\omega_d^2}{\omega_d^2} \\ \phi = \dfrac{\omega_d}{\xi\omega_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^2 = \alpha_0^2\left[1 + \dfrac{\xi^2}{1-\xi^2}\right] \\ \phi = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \end{cases}$$

En notation complexe.

$$\alpha(t) = Re(\tilde{\alpha}(t))$$

avec $\tilde{\alpha}(t) = A e^{-\xi\omega_0 t} e^{i\omega_d t} e^{i\phi}$

Il manque le nombre complexe "i" dans le dernier terme

4)

4) On travaille sur l'équation linéarisée.

$$J_t \ddot{\alpha} + c\dot{\alpha} + k\alpha = 0 \qquad \forall t$$

En complexe

$$Re\left[J_t \ddot{\tilde{\alpha}} + c\dot{\tilde{\alpha}} + k\tilde{\alpha} = 0 \right] \qquad \forall t.$$

$$\cancel{J_t\left[\xi^2\omega_0^2 + (-1)\omega_d^2\right]}$$

On $\dot{\tilde{\alpha}} = \tilde{\alpha}\left[-\xi\omega_0 + i\omega_d\right]$

$$\ddot{\tilde{\alpha}} = \tilde{\alpha}\left[-\xi\omega_0 + i\omega_d\right]^2$$

$$\ddot{\tilde{\alpha}} = \tilde{\alpha}\left[\xi^2\omega_0^2 - \omega_d^2 - 2i\xi\omega_0\omega_d\right]$$

$$\forall t \quad Re\left[\tilde{\alpha}\left[J_t(\xi^2\omega_0^2 - \omega_d^2) - 2i\xi\omega_0\omega_d J_t - c\xi\omega_0 + ic\omega_d + k\right]\right] = 0$$

$$\left[J_t(\xi^2\omega_0^2 - \omega_d^2) - c\xi\omega_0 + k\right] + i\left[-2\xi\omega_0\omega_d J_t + c\omega_d\right] = 0$$

chacun des termes doit être nul.

le second terme $\Rightarrow \quad 2\xi\omega_0 J_t = c \quad \Rightarrow \quad \xi = \dfrac{c}{2\omega_0 J_t}$

~~le premier terme~~

pour que le mvt soit sous-amorti, il faut que.

$$\xi < 1$$

$$c < 2\sqrt{\frac{k}{J_t}}\, J_t$$

$$\boxed{c < 2\sqrt{k J_t}}$$

$$\tilde{c} = 2\sqrt{k J_t}$$

avec $\begin{cases} k = 0{,}0147 \ \ N\,m \\ J_t = 2{,}15\ 10^{-4}\ \ kg\,m^2 \end{cases}$ $\qquad \tilde{c} = 3{,}56\ 10^{-3}\ kg\,s^{-1}\,m^{3/2}$

car $\sqrt{N m \ kg m^2} = \sqrt{kg\,m\,s^{-2}\,kg\,m^2} = kg\,s^{-1}\,m^{3/2}$

$$c = 0{,}5\ 10^{-3}\ kg\,s^{-1}\,m^{3/2}$$

donc le mouvement est pseudo-périodique.

5) $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$

$$= \sqrt{\frac{k}{J_t}\left(1 - \left(\frac{c}{\tilde{c}}\right)^2\right)}$$

avec $\begin{cases} k = 0{,}0147 \\ J_t = 2.15\ 10^{-4}\ kg\,m^2 \\ c = 0{,}5\ 10^{-3}\ kg\,s^{-1}\,m^{3/2} \\ \tilde{c} = 3{,}56\ 10^{-3}\ kg\,s^{-1}\,m^{3/2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\omega_d = 7{,}85\ s^{-1}}$

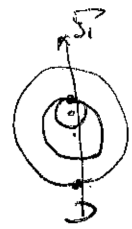
pseudo période $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{2,85} = \boxed{2,21 \ s = T_d}$

$d = \xi \omega_0 = 0,141 \times 8,27 = \boxed{1,16 \ s^{-1} = d}$

6) $\begin{cases} A = \frac{\pi}{6} \\ \phi = -30^\circ \end{cases}$

7) Il faut que $A e^{-d t_1} = \alpha_{distinguable}$

le pt se déplaçant le plus est le pt D



$\vec{v}$ distinguable.

$\vec{OD} = r_1 \vec{y_1} - r_2 \vec{y_1} - r_3 \vec{y_1}$

$= (r_3 + r_2 - r_1) \ (-\vec{y_1})$

$\alpha_{distinguable} \ (r_3 + r_2 - r_1) = v_{distinguable}$

$$e^{-d t_1} = \frac{v_{dis.}}{(r_3 + r_2 - r_1) \ A}$$

$$-d t_1 = \log \frac{v_{dis.}}{(r_3 + r_2 - r_1) A}$$

$$t_1 = + \frac{1}{d} \log \frac{A (r_3 + r_2 - r_1)}{v_{dist.}}$$

$\begin{cases} d = 1.16 \\ A = \frac{\pi}{6} \\ r_3 = 0,05 \ m \\ r_2 = 0,02 \ m \\ r_1 = 0,01 \ m \\ v_{dist} = 10^{-3} \ m \end{cases}$ $\rightarrow \boxed{t_1 = 2,96 \ s}$

8) temps t_1 plus grand que le temps observé.