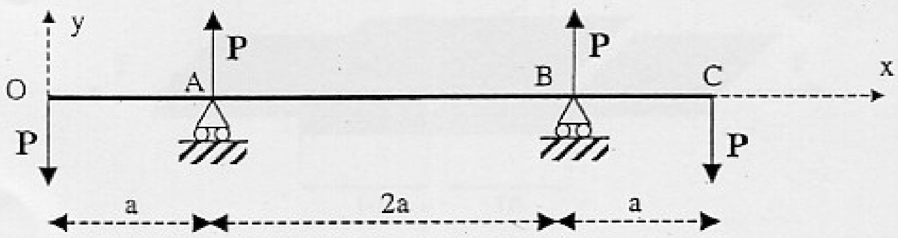
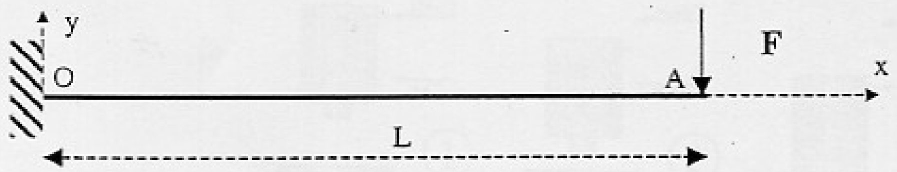
TD RdM N° 2

① Calculer le torseur des efforts internes, le champ de contraintes ainsi que la contrainte maximum dans le cas suivant :

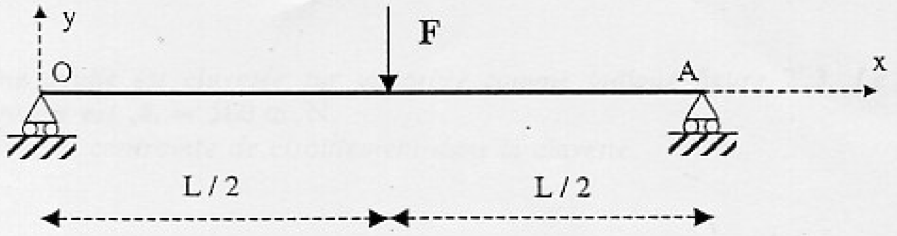


② Calculer le torseur des efforts internes, la rotation ainsi que la flèche dans les cas suivants :

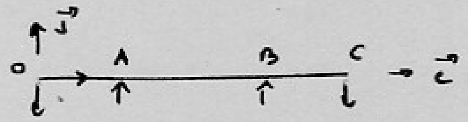
a)



b)



LPIAU RdM Td n°3 flexion exercice 1



Le problème est plan

On oriente la poutre de O vers C

soit $H_1 \in [OA]$ / $\vec{OH_1} = s_1 \vec{i}$

$$\{\mathcal{T}\ \text{eff int}_{H_1}\} = -\{\mathcal{T}_O\} = \begin{Bmatrix} +P\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} P\vec{j} \\ 0\vec{k} + P\vec{j} \wedge \vec{OH_1} \end{Bmatrix}_{H_1} = \begin{Bmatrix} P\vec{j} \\ -Ps_1\vec{k} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} P\vec{y} \\ -Ps_1\vec{z} \end{Bmatrix}_{H_1} \qquad \begin{cases} N = 0 \\ T_1 = P \\ Mf_{z_1} = -Ps_1 \end{cases}$$

soit $H_2 \in [AB]$ / $\vec{OH_2} = s_2 \vec{i}$

$$\{\mathcal{T}\ \text{eff int}_{H_2}\} = \{\mathcal{T}_B\} + \{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} P\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} -P\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{Bmatrix}_C$$

$$= \begin{Bmatrix} P\vec{j} - P\vec{j} \\ [P(3a-s_2) - P(4a-s_2)]\vec{k} \end{Bmatrix}_{H_2} = \begin{Bmatrix} 0\vec{i} + 0\vec{j} \\ -Pa\vec{k} \end{Bmatrix}_{H_2}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0\vec{x} + 0\vec{y} \\ -Pa\vec{z} \end{Bmatrix}_{H_2}$$

$$\begin{cases} N_2 = 0 \\ T_2 = 0 \\ Mf_{z_2} = -Pa \end{cases}$$

soit $H_3 \in [BC]$ / $OH_3 = s_3 \vec{i}$

par symétrie: $\begin{cases} N_3 = 0 \\ T_3 = -P \\ Mf_{z_3} = -P(4a - s_3) \end{cases}$

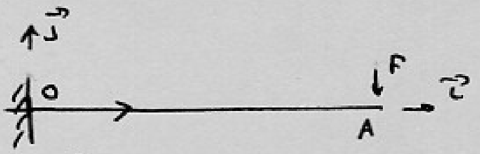
La section la plus sollicitée est entre A et B

$$|\sigma| = \left| -\frac{Mf_{z_2}\ h/2}{I_{Gz}} \right| = \frac{Pah}{2 I_{Gz}}$$

homogénéité. $[Pa] \overset{?}{=} \dfrac{N\,m\,m}{m^4} = N\,m^{-2} = Pa$

OK!

LPIAU RdM Td flexion exercice 2 a



On oriente la poutre de O vers A

Soit H_1 / $\overrightarrow{OH_1} = s_1 \vec{i}$

$$\{\mathcal{T}_{eff\ int_{H_1}}\} = \{\mathcal{T}_A\} = \begin{Bmatrix} -F\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -F\vec{j} \\ -F(L-s_1)\vec{k} \end{Bmatrix}_{H_1} = \begin{Bmatrix} -F\vec{y} \\ -F(L-s_1)\vec{z} \end{Bmatrix}_{H_1}$$

$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ T_1 = -F \\ Mf_{z1} = -F(L-s_1) \end{cases}$$

* Calcul de la rotation en un point P / $\overrightarrow{OP} = s_P \vec{i}$

$$\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_0 + \int_0^P \frac{Mf_{z1}}{EI_{Hz}} \vec{z}\, ds \qquad \text{encastrement} \Rightarrow \vec{\omega}_0 = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_P = \frac{-F}{EI_{Hz}} \vec{z} \int_0^{s_P} (L-s_1)\, ds_1 = \frac{-F}{EI_{Hz}} \vec{z} \int_L^{L-s_P} u\,(-du)$$

$$= \frac{-F}{2EI_{Hz}} \left[L^2 - (L-s_P)^2 \right] \vec{z} = \frac{-F}{2EI_{Hz}} \left[2Ls_P - s_P^2 \right] \vec{z}$$

* Calcul du déplacement.

$$\vec{u}_P = \underbrace{\underset{\vec{0}}{\underset{\parallel}{\vec{u}_0}} + \underset{\vec{0}}{\underset{\parallel}{\vec{\omega}_0}} \wedge \overrightarrow{OP}}_{\text{car encastrement}} + \underbrace{\int_0^P \frac{T_1}{GS_1} \vec{y}\, ds_1}_{\text{négligeable /}} + \underbrace{\int_0^P \frac{Mf_{z1}}{EI_{Hz}} \vec{z} \wedge \overrightarrow{H_1P}\, ds_1}$$

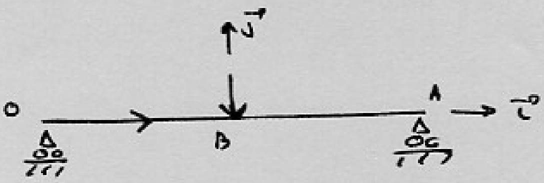
$$= \frac{-F(\vec{z} \wedge \vec{i})}{EI_{Hz}} \int_0^{s_P} (L-s_1) \cdot (s_P - s_1)\, ds_1$$

$$= \frac{-F\vec{j}}{EI_{Hz}} \int_0^{s_P} \left[s_1^2 + s_1(-s_P - L) + Ls_P \right] ds_1$$

$$= \frac{-F\vec{j}}{EI_{Hz}} \left[\frac{s_P^3}{3} + \frac{s_P^2}{2}(-s_P - L) + Ls_P^2 \right]$$

$$= \frac{-F\vec{j}}{EI_{Hz}} \left[-\frac{1}{6} s_P^3 + \frac{L}{2} s_P^2 \right] \quad \left[\frac{N\, m^3}{N m^{-2}\, m^4} \right] = [m] \quad \text{OK !}$$

L P I A U   RdM   Td flexion   exercice 2 b . 1



* torseur des effets intérieurs

Soit H_1 / $\overrightarrow{BH_1} = s_1 \vec{i}$

On oriente la poutre de O vers A

Il est nécessaire de déterminer les inconnues aux liaisons

On isole la poutre

le problème est plan.

le bilan des actions donne :

appui sur rouleaux ~~de~~ normale $O\vec{j}$ $\quad \left\{\tau_1\right\} = \left\{\begin{matrix} +R_1\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{matrix}\right\}_O$

appui sur rouleaux de normale $A\vec{j}$ $\quad \left\{\tau_2\right\} = \left\{\begin{matrix} R_2\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{matrix}\right\}_A$

chargement ponctuel $\quad \left\{\tau_3\right\} = \left\{\begin{matrix} -F\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{matrix}\right\}_B$

L'équilibre se traduit par.

$$\Sigma \left\{\tau\right\} = \left\{0\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} R_1\vec{j} \\ -R_1 \frac{L}{2}\vec{k} \end{matrix}\right\}_B + \left\{\begin{matrix} R_2\vec{j} \\ R_2\frac{L}{2}\vec{k} \end{matrix}\right\}_B + \left\{\begin{matrix} -F\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{matrix}\right\}_B = \left\{0\right\}.$$

$$\left\{\begin{matrix} R_1 + R_2 - F = 0 \\ 0 = 0 \\ R_2 - R_1 = 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} R_2 = R_1 \\ R_1 = +\frac{F}{2} \\ 0 = 0 \end{matrix}\right. \rightarrow R_2 = \frac{F}{2}.$$

Torseur des effets intérieurs en H_1

$$\left\{\tau\, eff\, int_{H_1}\right\} = \left\{\tau_A\right\} = \left\{\begin{matrix} \frac{F}{2}\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \frac{F}{2}\vec{j} \\ \frac{F}{2}\left(\frac{L}{2}-s_1\right)\vec{k} \end{matrix}\right\}_{H_1} = \left\{\begin{matrix} \frac{F}{2}\vec{y} \\ \frac{F}{2}\left(\frac{L}{2}-s_1\right)\vec{3} \end{matrix}\right\}_{H_1}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} N_1 = 0 \\ T_1 = \frac{F}{2} \\ Mf_{3_1} = \frac{F}{2}\left(\frac{L}{2}-s_1\right) \end{matrix}\right.$$

* Calcul de la rotation.

Par symétrie, $\vec{\omega}_B = 0\,\vec{k}$

Soit P / $\overrightarrow{BP} = s_P\,\vec{i}$

$$\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_B + \int_B^P \frac{Mf_3}{EI_{H3}}\,\vec{3}\,ds$$

$$= \frac{F\,\vec{3}}{2EI_{H_3}} \int_0^{s_P} \left(\frac{L}{2} - s_1\right) ds_1 = \frac{F\,\vec{3}}{2EI_{H_3}} \left[\frac{L}{2}s_1 - \frac{s_1^2}{2}\right]_0^{s_P}$$

$$= \frac{F}{4EI_{H_3}}\left[\frac{L}{2}s_P - s_P^2\right]\vec{3} \qquad \left[\frac{N\,m^2}{N m^{-2} m^4}\right] = [1] \quad \text{OK !}$$

* calcul du déplacement.

$$\vec{u}_P = \vec{u}_B + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\vec{\omega}_B} \wedge \overrightarrow{BP} + \underbrace{\int_0^{s_P} \frac{T_1}{GS_y}\,\vec{y}\,ds_1}_{\text{négligeable !}} + \int_0^{s_P} \frac{Mf_{31}}{EI_{H_3}}\,\vec{3} \wedge \overrightarrow{H_1P}\,ds_1$$

avec $\vec{u}_B$ donné par $\vec{u}_A = \vec{0}$

$$\vec{u}_A = \vec{u}_B + \int_0^{L/2} \frac{Mf_{31}}{EI_{H3}}\,\vec{3} \wedge \overrightarrow{H_1A}\,ds_1$$

$$\vec{u}_B = -\int_0^{L/2} \frac{Mf_{31}}{EI_{H3}}\,\vec{3} \wedge \overrightarrow{H_1A}\,ds_1$$

$$\vec{u}_P = \int_0^{s_P} \frac{Mf_{31}}{EI_{H_3}}\,\vec{3} \wedge \overrightarrow{H_1P}\,ds_1 - \int_0^{L/2} \frac{Mf_{31}}{EI_{H_3}}\,\vec{3} \wedge \overrightarrow{H_1A}\,ds_1$$

$$= \frac{F\ \vec{3} \wedge \vec{i}}{4EIH_3}\left[\int_0^{s_P} (L - 2s_1)(s_P - s_1)\,ds_1 - \int_0^{L/2} (L - 2s_1)\left(\frac{L}{2} - s_1\right) ds_1\right]$$

$$= \frac{F\,\vec{j}}{4EI_{H_3}}\left[\left[\frac{2}{3}s_1^3 + \frac{s_1^2}{2}\left[-L - 2s_P\right] + L\,s_P\,s_1\right]_0^{s_P} + \left[-\frac{2}{3}s_1^3 + \frac{s_1^2}{2}\left[2L\right] - s_1\frac{L^2}{2}\right]_0^{L/2}\right]$$

LPIAV RdM Td flexion exercice 2b.3

$$\vec{u}_P = \frac{F\vec{J}}{4EI_{Hz}} \left[\frac{2}{3}\left(s_P^3 - \frac{L^3}{8}\right) + \frac{(-s_P^2)L}{2} - s_P^3 + L s_P^2 + L\frac{L^2}{4} - \frac{L^3}{4} \right]$$

$$= \frac{F\vec{J}}{4EI_{Hz}} \left[\frac{2}{3}\left(s_P^3 - \frac{L^3}{8}\right) - s_P^3 + s_P^2\frac{L}{2} \cancel{- \frac{L^3}{2}} \right]$$

Pour $s_P = \frac{L}{2}$ $\qquad \vec{u}_P = \frac{F\vec{J}}{4EI_{Hz}} \left[-\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \cancel{- \frac{L^3}{2}} \right] = 0\vec{J}$

ok !

$s_P = 0$ $\qquad \vec{u}_P = \vec{u}_B = \frac{F\vec{J}}{4EI_{Hz}}\left(-\frac{L^3}{12}\right)$