LPIAU RdM Td n°1 Exercice 1

- le problème est plan
- bilan des actions.

chargement → structure $\quad \mathcal{T}_1 = \begin{Bmatrix} -F\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_D$

liaison appui simple $\quad \mathcal{T}_2 = \begin{Bmatrix} R_{2x}\vec{x} + R_{2y}\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_O$

liaison appui sur rouleau de normale $A\vec{y}$ $\quad \mathcal{T}_3 = \begin{Bmatrix} R_{3y}\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_A$

- l'équilibre se traduit par :

$$\Sigma\{\mathcal{T}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} -F\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_D + \begin{Bmatrix} R_{2x}\vec{x} + R_{2y}\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} R_{3y}\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_A = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} -F\vec{y} \\ 0\vec{z} + -F\vec{y}\wedge\vec{DO} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} R_{2x}\vec{x} + R_{2y}\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} R_{3y}\vec{y} \\ 0\vec{z} + R_{3y}\vec{y}\wedge\vec{AO} \end{Bmatrix}_O = \{0$$

$$\begin{Bmatrix} -F\vec{y} \\ -F\vec{y}\wedge\left(c\vec{y} - (a+b)\vec{x}\right) \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} R_{2x}\vec{x} + R_{2y}\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} R_{3y}\vec{y} \\ R_{3y}\vec{y}\wedge -l\vec{x} \end{Bmatrix}_O = \{0$$

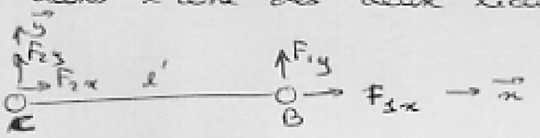
trois équations.

$$\begin{cases} R_{2x} = 0 \\ -F + R_{2y} + R_{3y} = 0 \\ -F(a+b) + R_{3y}\,l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{2x} = 0 \\ R_{2y} = F\left(1 - \dfrac{a+b}{l}\right) \\ R_{3y} = F\,\dfrac{a+b}{l} \end{cases}$$

Le système est isostatique.

$$\left.\begin{aligned} [R_{2y}] &= [N] \\ [R_{3y}] &= [N]\frac{[m]}{[m]} \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{résultats homogènes.}$$

• Montrons qu'une poutre entre deux ~~liaisons~~ articulations, non-chargée ~~le~~ long de celle-ci ne subit que des efforts dans l'axe des deux liaisons.



bilan des ~~sollic~~ efforts.

~~en~~ chargement en C $\qquad \mathcal{T}_1 = \begin{Bmatrix} F_{2x}\vec{x} + F_{2y}\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_C$

chargement en B $\qquad \mathcal{T}_2 = \begin{Bmatrix} F_{1x}\vec{x} + F_{2y}\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_B$

l'équilibre se traduit par. $\Sigma\{\mathcal{T}\} = \{0\}$

$$\begin{Bmatrix} F_{2x}\vec{x} + F_{2y}\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_C + \begin{Bmatrix} F_{1x}\vec{x} + F_{2y}\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_B = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2x}\vec{x} + F_{2y}\vec{y} \\ 0\vec{z} + (F_{2x}\vec{x} + F_{2y}\vec{y}) \wedge l'\vec{x} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} \quad \\ \quad \end{Bmatrix}_B = \{0\}$$

3 équations.

$$\begin{cases} F_{2x} + F_{1x} = 0 \\ F_{2y} + F_{1y} = 0 \\ -l\,F_{2y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{2y} = 0 \\ F_{1y} = 0 \\ F_{2x} = -F_{1x}. \end{cases}$$

les ~~fo~~ seuls efforts possibles sont dans la direction BC.

• Isolons la poutre ~~de~~ 1 : pb plan

<u>bilan des efforts</u>

chargement ponctuel $\qquad \{\mathcal{T}_1\} = \begin{Bmatrix} -F\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_D$

chargement linéique $\qquad \{d\mathcal{T}_2\} = \begin{Bmatrix} -p\vec{y}\,ds \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_E$

liaison appuis simple $\qquad \{\mathcal{T}_3\} = \begin{Bmatrix} R_{3x}\vec{x} + R_{3y}\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_A$

liaison $2 \to 1$ (articulation) $\qquad \{\mathcal{T}_4\} = \begin{Bmatrix} -R_4\cos\alpha\,\vec{x} + R_4\sin\alpha\,\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_B$

l'équilibre se traduit par $\Sigma \{\tau\} = \{0\}$

$$\begin{Bmatrix} -F\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix}_D + \int_A^D \begin{Bmatrix} -p\vec{y}\,ds \\ -p\vec{y}\,ds \wedge (\ell - s)\vec{x} \end{Bmatrix}_D + \begin{Bmatrix} R_{3x}\vec{x} + R_{3y}\vec{y} \\ (R_{3x}\vec{x} + R_{3y}\vec{y}) \wedge \ell\vec{x} \end{Bmatrix}_D$$

$$+ \begin{Bmatrix} -R_4\cos\alpha\,\vec{x} + R_4\sin\alpha\,\vec{y} \\ (-R_4\cos\alpha\,\vec{x} + R_4\sin\alpha\,\vec{y}) \wedge \frac{\ell}{4}\vec{x} \end{Bmatrix}_D = \{0\}$$

3 équations

$$\begin{cases} R_{3x} - R_4\cos\alpha = 0 \\ -F - p\ell + R_{3y} + R_4\sin\alpha = 0 \\ -p\frac{\ell^2}{2} - R_{3y}\,\ell - R_4\sin\alpha\,\frac{\ell}{4} = 0 \end{cases}$$

car $\int_0^\ell (\ell - s)\,ds = \left[\ell s - \frac{s^2}{2}\right]_0^\ell = \ell^2 - \frac{\ell^2}{2} = \frac{\ell^2}{2}$

$$\begin{cases} R_{3y} = -R_4\sin\alpha + F + p\ell \\ -R_4\sin\alpha\,\frac{\ell}{4} + R_4\sin\alpha\,\ell - F\ell - p\ell^2 + p\frac{\ell^2}{2} = 0 \\ R_{3x} = R_4\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_4 = \dfrac{F\ell + \frac{1}{2}p\ell^2}{\sin\alpha\,\frac{3}{4}\ell} = \dfrac{4F + 2p\ell}{3\sin\alpha} \\ R_{3y} = \dfrac{3F + 3p\ell - 4F - 2p\ell}{3} \\ R_{3x} = \dfrac{+4F + 2p\ell}{3}\,\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_4 = \dfrac{4F + 2p\ell}{3\sin\alpha} \\ R_{3y} = \dfrac{-F \mp \text{[illegible]}\,p\ell}{3} \\ R_{3x} = \dfrac{4F + 2p\ell}{3}\,\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{cases}$$

$$[R_4] = \frac{[N] - [N m^{-1} m]}{[1]}$$

$$[R_{3y}] = \frac{[N] + [N m^{-1} m]}{[1]}$$

$$[R_{3x}] = \frac{N + [N m^{-1} m]}{[1]}$$

$\downarrow$

résultats homogènes.

le système est isostatique

- Une tige articulée à ses deux extrémités et non chargée entre celles-ci ne peut transmettre [redacted] qu'une résultante portée par la direction ~~des~~ de la droite reliant ses deux extrémités.

- Isolons la poutre 1

le problème n'est pas plan.

* bilan des actions -

liaison pivot d'axe $A\vec{x}$ $\quad \{\mathcal{T}_1\} = \left\{ \begin{array}{l} R_{1x}\vec{x} + R_{1y}\vec{y} + R_{1z}\vec{z} \\ C_{1y}\vec{y} + C_{1z}\vec{z} \end{array} \right\}_A$

$2 \to 1 \quad \{\mathcal{T}_2\} = \left\{ \begin{array}{l} R_2 \cos\alpha\,(-\cos\beta\,\vec{y} - \sin\beta\,\vec{x}) + R_2 \sin\alpha\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$

avec $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \operatorname{tg}\beta = \dfrac{a}{b}$

chargement $\quad \{\mathcal{T}_3\} = \left\{ \begin{array}{l} -F\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$

* l'équilibre se traduit par $\Sigma\{\mathcal{T}\} = \{0\}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{1x}\vec{x} + R_{1y}\vec{y} + R_{1z}\vec{z} \\ C_{1y}\vec{y} + C_{1z}\vec{z} + (R_{1x}\vec{x} + R_{1y}\vec{y} + R_{1z}\vec{z}) \wedge b\vec{y} \end{array} \right\}_B$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -R_2\cos\alpha\sin\beta\,\vec{x} - R_2\cos\alpha\cos\beta\,\vec{y} + R_2\sin\alpha\,\vec{z} \\ \cancel{-R_2\cos\alpha\sin\beta\,\vec{x}} \quad \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} -F\vec{z} \\ -F\vec{z} \wedge \frac{b}{2}\vec{y} \end{array} \right\}_B = \{0\}$$

On obtient 6 équations

$$\left\{ \begin{array}{lllll} R_{1x} & \cancel{-bR_{1y}} & -R_2\cos\alpha\sin\beta & & = 0 \\ R_{1y} & & -R_2\cos\alpha\cos\beta & & = 0 \\ R_{1z} & \cancel{+bR_{1x}} & +R_2\sin\alpha & -F & = 0 \\ & -bR_{1z} & & +F\frac{b}{2} & = 6 \\ C_{1y} & & & & = 0 \\ C_{1z} & +bR_{1x} & & & = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} C_{1y} = 0 \\ R_{1z} = \dfrac{F}{2} \\ R_2 = \dfrac{F - \frac{F}{2}}{\sin\alpha} = \dfrac{F}{2\sin\alpha} \\ R_{1y} = -F \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha} \\ R_{1x} = +F \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha} \\ C_{1z} = -Fb \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha} \end{cases}$$

$$[R_{1z}] = [N]$$

$$[R_2] = [N]/[1]$$

$$[R_{1y}] = [N]\frac{[1]}{[1]}$$

$$[R_{1x}] = [N]$$

$$[C_{1z}] = [N][m]$$

$$\downarrow$$

le système est isostatique

résultat homogène.