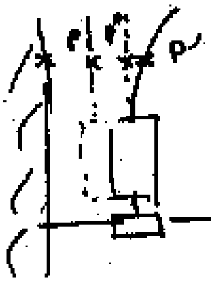
1)



$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP''} + \overrightarrow{P''P'}$$
$$= \left[u_1(t) + \Phi(t)\right] \vec{x}$$

$$\frac{d\overrightarrow{PP'}}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{d\Phi(y,t)}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{PP'}}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \omega\, \phi(y) \cos \omega t$$

$$\frac{d\overrightarrow{PP'}}{dt} = \omega \left[U_1 \cdots + \phi(y)\right] \cos \omega t$$

2) Pour être au plus près de la forme propre du mode, il faut que le chargement de la structure soit le plus proche possible des forces d'inertie du système.

Il serait donc plus judicieux de choisir une force $\vec{F_1}$ sur la masse en translation, une force $\vec{F_2}$ sur la poutre $= \alpha \vec{F_1}$ avec $\alpha = \frac{\rho S l}{m_1}$, et de répartir cette force comme une force linéique le long de la poutre $\vec{f_2} = \frac{\rho S l}{m_1} \frac{F_1}{l} \vec{x}$

Si l'on suppose que la poutre fléchit, on peut mieux répartir cette force linéique en chargeant plus l'extrémité de la poutre que la zone à l'encastrement $\Rightarrow \vec{f_2}(y)$

Un optimum de chargement serait donc

3) Par la méthode de Rayleigh Ritz, on choisit de rechercher une solution comme combinaison linéaires de fonctions tests. Ceci permet d'agrandir l'espace de recherche de solution, et c'est à l'intérieur de cet espace que l'on minimise le coefficient de Rayleigh. L'espace étant plus riche, on explore un domaine plus grand, et la valeur minimale est plus petite

que si les valeurs correspondantes à chacune des fonctions de base

4) Il faut que les fonctions propres vérifient les conditions aux limites cinématiques.
Comme la fonction $\phi(y)$ est définie par rapport au mouvement de la masselotte

$$\phi(0) = 0$$

$$\frac{d\phi}{dy}(0) = 0$$

les deux fonctions polynomiales les plus simples sont :

$$\begin{cases} \phi_1(y) = y^2/\ell^2 \\ \phi_2(y) = y^3/\ell^3 \end{cases}$$

5) Posons $\phi(y) = q_1 \, \phi_1(y) + q_2 \, \phi_2(y)$.
Considérons le déplacement de la masse $w(\ell) = U_1$ suivant.
le système est à 3 degrés de liberté
U_1, q_1, q_2

6) Energie cinétique maximale.

$$T_{maxi} = \omega^2 \left[\frac{1}{2} m_1 U_1^2 + \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho S \left[q_1 \frac{y^2}{\ell^2} + q_2 \frac{y^3}{\ell^3} \right]^2 dy \right.$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} m_1 U_1^2 + \frac{\rho S}{2} \int_0^\ell \left[U_1 + q_1 \frac{y^2}{\ell^2} + q_2 \frac{y^3}{\ell^3} \right]^2 dy \right]$$

Par manima

$$T_{mani} = \omega^2 \left[\begin{array}{l} u_1^2 \left[\frac{m}{2} + \frac{\rho S l}{210} (210) \right] \\ + q_1^2 \left[\frac{\rho S l}{210} \quad 42 \right] \\ + q_2^2 \left[\frac{\rho S l}{210} \quad 70 \right] \\ + u_1 q_1 \left[\frac{\rho S l}{210} \quad 140 \right] \\ + q_1 q_2 \left[\frac{\rho S l}{210} \quad 70 \right] \\ + q_2 u_1 \left[\frac{\rho S l}{210} \quad 105 \right] \end{array} \right.$$

Energie Potentielle

$$V_{mani} = \frac{1}{2} k u_1^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{EI}{l^4} \left[2 q_1 + 6 q_2 \frac{y}{l} \right]^2 dy$$

$$= \frac{1}{2} k u_1^2 + \frac{1}{2} \frac{EI\, l}{l^4} \int_0^1 \left[2 q_1 + 6 q_2 \tilde{y} \right]^2 d\tilde{y}$$

car $\tilde{y} = \frac{y}{l}$ $\quad l\, d\tilde{y} = dy$

$$= \frac{1}{2} k u_1^2 + \frac{1}{2} \frac{EI}{l^3} \left[4 q_1^2 + 12 q_1 q_2 + 12 q_2^2 \right]$$

7) On peut alors construire les matrices de masse et de rigidité par identification avec

$$\frac{T_{man}}{\omega^2} = \frac{1}{2} [u_1 \; q_1 \; q_2] \left[\; M \; \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$V_{man} = \frac{1}{2} [u_1 \; q_1 \; q_2] \left[\; K \; \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$