14h08

Examen 03-10

Energie cinétique.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} 6m \left[\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2}\right]^2$$

$$+ \frac{1}{2} J \left(\frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{\ell}\right)^2$$

avec J l'inertie de rotation autour de l'axe $G_2\vec{z}$

G_2 centre de masse du solide 2

Si $y_1(t) = Y_1 \sin \omega t$

$y_2(t) = Y_2 \sin \omega t$.

$$\frac{2 T_{max}}{\omega^2} = m Y_1^2 + m Y_2^2 + \frac{3}{2} m \left(Y_1^2 + 2 Y_1 Y_2 + Y_2^2\right)$$

$$+ \frac{J}{\ell^2} \left(Y_2^2 - 2 Y_1 Y_2 + Y_1^2\right)$$

Or $J = \frac{6 m \ell^2}{12}$

$$\frac{2 T_{max}}{\omega^2} = Y_1^2 m \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right]$$

$$+ Y_2^2 m \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right]$$

$$+ Y_1 Y_2 m \left[3 - 1\right]$$

Soit la matrice de masse $M = m \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

14h20

15h55 Energie potentielle

$$V = \frac{1}{2} k_2 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 + \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{y_2 - y_1}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{y_2 - y_1}{\ell}\right)^2$$

$[N m^{-1} m^2]$?

$N m$

$$2 V_{maxi} = k Y_1^2 + k Y_2^2 + 5 k \ell^2 \left(\frac{Y_2 - Y_1}{\ell}\right)^2 + 5 k \ell^2 \left(\frac{Y_2 - Y_1}{\ell}\right)^2$$

$$= Y_1 k \left[1 + 10\right.$$

$$+ Y_2 k \left[1 + 10\right.$$

$$+ Y_1 Y_2 k \left[-20\right]$$

d'où $K = k \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ -10 & 11 \end{bmatrix}$

16h03

10h 3) Vecteur test

On choisit comme premier mode une translation de la poutre vers le haut.

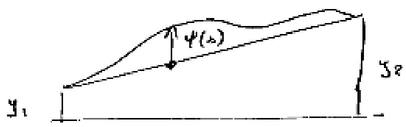
$$v^* = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Par Rayleigh. $R^* = \left[\dfrac{[1 \;\; 1]\, m \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[1 \;\; 1]\, k \begin{bmatrix} 11 & -10 \\ -10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right]^{-1}$

$$R^* = \frac{2}{8} \quad \frac{k}{m}$$

$$\omega^2 \simeq \frac{1}{4}\frac{k}{m} \Rightarrow \omega \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

16h06 5)



l'énergie cinétique de la structure déformable est donnée par.

la vitesse

$$v(s,t) = \left[\psi(s) + y_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} s\right] \omega \cos \omega t$$

d'où

$$T = \frac{1}{2} m \omega^2 Y_1^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 Y_2^2 + \frac{1}{2}\frac{6m}{l} \int_0^l \left[\psi + Y_1 + \frac{Y_2 - Y_1}{l} s\right]^2 ds \text{ omega^2}$$

L'énergie potentielle est

$$V = \frac{1}{2} k Y_1^2 + \frac{1}{2} k Y_2^2 + 5 k l^2 \left[\frac{Y_2 - Y_1}{l} + \psi'(0)\right]^2 + 5 k l^2 \left[\frac{Y_2 - Y_1}{l} + \psi'(l)\right]^2$$

en négligeant l'energie cinétique de rotation relative dûe au mouvement de psi / droite A A', ainsi que l'énergie potentielle de déformation interne dans la poutre

16h12

16h31 4) conditions aux limites

$\psi(s)$ étant le déplacement relatif / droite AA',

$$\psi(0) = 0$$
$$\psi(l) = 0$$

Il n'y a pas de condition en rotation car la rotation est possible aux extrémités.

Equation de moment

$$k \left(\psi'(0) + \frac{Y_2 - Y_1}{l}\right) = \psi''(0)\, EI$$

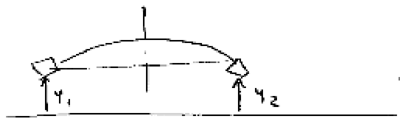
$$k \left(\psi'(l) + \frac{Y_2 - Y_1}{l}\right) = -\psi''(l)\, EI$$

~~Equation en effort tranchant~~ $\cancel{\frac{dM}{ds} = -T_s}$

$\cancel{EI\,\psi'''(s) =}$

7) On considère une solution symétrique.

$$\psi(s) = +a\left[\left(s - \frac{\ell}{2}\right)^2 - \frac{\ell^2}{4}\right]$$



On a bien $\left|\begin{array}{l}\psi(0) = 0 \\ \psi(\ell) = 0\end{array}\right.$

et $y_1 = b$

$y_2 = b$

Soit la fonction test en normalisant par le déplacement des masselottes

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ c\left[\frac{s^2}{\ell^2} - \frac{s}{\ell}\right] \end{bmatrix}$$

16h47) par exemple $c = 1$

8) Calcul de l'expression du Rayleigh

$$\tilde{T} = \frac{6m}{\ell}\int_0^\ell \left[c\left[\frac{s^2}{\ell^2} - \frac{s}{\ell}\right] + 1\right]^2 ds \qquad \tilde{s} = \frac{s}{\ell}$$

$$= \frac{6m}{\ell}\,\ell\int_0^1 \left(1 + \tilde{s}^2 - \tilde{s}\right)^2 d\tilde{s}$$

$$= \frac{6m\ell}{\ell}\,\frac{7}{10}$$

$$2\frac{T_{maxi}}{\omega^2} = \left(\frac{25}{5} + 2\right)m = \frac{35}{5}\,m = 7\,m$$

$$\tilde{V} = 5k\ell^2\left[\left(-\frac{1}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{1}{\ell}\right)^2\right]$$

car $\psi'(s) = \left(\frac{2s}{\ell^2} - \frac{1}{\ell}\right)$

$$2\tilde{V} = k\left[1 + 1 + 10\right] \Rightarrow 2V = 12\,k$$

$$\rightarrow \boxed{\omega^2 \simeq \frac{12}{7}\,\frac{k}{m}}$$

16h53