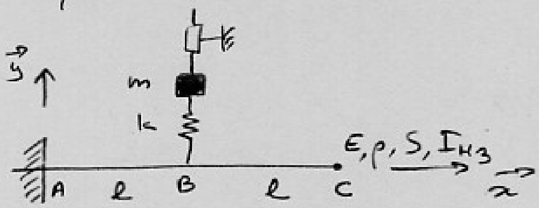

Soit une poutre droite de longueur 2ℓ, de module d'Young E, de masse volumique ρ, ~~d'~~aire de section droite S, de moment quadratique autour de l'axe $\vec{H_3}$ I_{H3}, et une masselotte de masse m assujettie à se translater uniquement dans la direction $\vec{y}$ ~~[illegible]~~ et reliée à la poutre par un ressort de rigidité k. On souhaite calculer la première fréquence propre de ce système mixte (continu et discret) par la méthode de Rayleigh.

* Calcul de l'énergie cinétique maximale

Soit $\Psi(s,t) = \bar{\Psi}(s) \sin \omega t$. le déplacement transverse de la poutre

$u(t) = U \sin \omega t$ le déplacement dans la direction $\vec{y}$ de la masse m

$$T = \frac{1}{2}\, m U^2 \omega^2 \left(+\overset{\cancel{\sin}}{\cos}\, \omega t\right)^2 + \frac{1}{2} \rho S \int_0^{2\ell} \bar{\Psi}^2(s)\, \omega^2 \left(+\overset{\cancel{\sin}}{\cos}\, \omega t\right)^2 ds$$

$$T = \left[\frac{1}{2} m U^2 + \frac{1}{2} \rho S \int_0^{2\ell} \bar{\Psi}^2(s)\, ds \right] \omega^2 \left(\overset{\cancel{\sin}}{\cos}\, \omega t\right)^2$$

Posons $T_{max} = \dfrac{1}{2} \omega^2 \left[m U^2 + \cancel{2} \rho S \displaystyle\int_0^{2\ell} \bar{\Psi}^2(s)\, ds \right]$

* Calcul de l'énergie potentielle maximale

$$W = \left[\frac{1}{2} k \left(U - \Psi\left(\frac{\ell}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{2\ell} \bar{\Psi}''^2\, E I_{H3}\, ds \right] (\sin \omega t)$$

Posons $W_{max} = \dfrac{1}{2} \left[k \left(U - \Psi\left(\frac{\ell}{2}\right)\right)^2 + E I_{H3} \displaystyle\int_0^2 \bar{\Psi}''^2 ds \right]$

* le système est conservatif donc

$$W_{max} = T_{max}$$

$$\omega^2 = \frac{k\left[\left[U - \psi(\frac{\ell}{2})\right]^2 + EI_{H3}\int_0^{2\ell} \bar{\psi}''^2\, ds\right]}{m U^2 + \rho S \int_0^{2\ell} \bar{\psi}^2\, ds}$$

Soit $\begin{cases} m = \alpha \rho S \ell \\ k = \beta \dfrac{EI_{H3}}{\ell^3} \\ \cancel{U = \gamma\, \psi(\frac{\ell}{2})} \end{cases}$ $\qquad N\, m^{-2}\, m^4\, m^{-3}$

$$\omega^2 = \frac{\frac{EI_{H3}}{\ell^3}}{\rho S \ell}\left[\frac{\beta\left[U - \psi(\frac{\ell}{2})\right]^2 + \ell^3\int_0^{2\ell}\bar{\psi}''^2\, ds}{\alpha U^2 + \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell}\bar{\psi}^2\, ds}\right]$$

$\begin{cases} U = \gamma \ell \\ \psi = \delta \ell \end{cases}$ $\qquad ds = \ell\, d\tilde{s}$

$$\omega^2 = \frac{EI_{H3}\,\ell^2}{\rho S \ell^4\, \ell^2}\left[\frac{\beta\left[\gamma - \delta(\frac{1}{2})\right]^2 + \ell\int_0^{2\ell}\delta''^2\, ds}{\alpha\gamma^2 + \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell}\delta^2\, ds}\right]$$

$$\omega^2 = \frac{EI_{H3}}{\rho S \ell^4}\left[\frac{\beta\left(\gamma - \delta(\frac{1}{2})\right)^2 + \int_0^2\left(\frac{d^2\delta}{d\tilde{s}^2}\right)^2 d\tilde{s}}{\alpha\gamma^2 + \int_0^2 \delta^2\, d\tilde{s}}\right]$$

$$[\omega^2] = \left[\frac{E I_{H3}}{\rho S \ell^4}\right] = \left[\frac{N\, m^{-2}\, m^4}{kg\, m^{-3}\, m^2\, m^4}\right] = \left[\frac{kg\, m\, s^{-2}\, m^2}{kg\, m^3}\right]$$

$$= \left[s^{-2}\right] \qquad \text{homogène.}$$

2) (26' pour rédaction de la correction.)