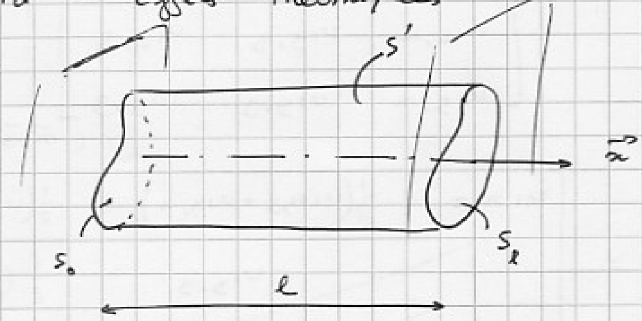
RSD2 Td Effets thermiques



- changement uniforme de t° : τ
- pas de frottement sur S_ℓ et S_0

1) . loi de comportement

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}_\tau + \bar{\bar{\varepsilon}}_\sigma$$

$$\hookrightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \alpha \, \tau \, \bar{\bar{I}}_d + \frac{1+\nu}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \operatorname{trace} \bar{\bar{\sigma}} \, \bar{\bar{I}}_d$$

. Passage $\vec{u} \to \bar{\bar{\varepsilon}}$ $\quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\operatorname{grad}}}\, \vec{u} + {}^t \overline{\overline{\operatorname{grad}}}\, \vec{u})$

. équilibre $\quad \overrightarrow{\operatorname{div}}\, \bar{\bar{\sigma}} + \vec{0} = 0$

car pas de forces volumiques

. CL en contrainte

. ~~-~~ $P \in S_0$ $\quad \vec{T}(P, -\vec{x}) \cdot \vec{t} = 0$ $\quad \forall P \; \forall \vec{t}$ (vecteur tangent au plan)

. $P \in S_\ell$ $\quad \vec{T}(P, \vec{x}) \cdot \vec{t} = 0$ $\quad \forall P \; \forall \vec{t}$

. $P \in S'$ $\quad \vec{T}(P, \vec{n}) = \vec{0}$ $\quad \forall P$ $\vec{n}$ normale au plan tg.

. C.L en déplacement

- $P \in S_0$ $\quad \vec{u}(P) \cdot \vec{x} = 0 \quad \forall P$
- $P \in S_\ell$ $\quad \vec{u}(P) \cdot \vec{x} = 0 \quad \forall P$

2) On décompose le problème en 2 sous-problème.

pb 1 ↳ élévation de t° non gênée

pb 2 ↳ imposition d'un déplacement δ sur la surface S_ℓ sans frottement.

la somme des 2 pb doit vérifier que le déplacement $P \in S_\ell$ $\quad \vec{u}(P) \cdot \vec{x} = 0$

* pb 1 On fait l'hypothèse que le champs de contrainte est nul (t° uniforme).

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_1 = \alpha \tau \bar{\bar{I}}_d$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{0}}$$

Calcul de $\vec{u}_1$ / $\quad \bar{\bar{\varepsilon}}_1 = \frac{1}{2} \; \bar{\bar{\text{grad}}}\,\vec{u}_1 + {}^t\bar{\bar{\text{grad}}}\,\vec{u}_1$

Posons $\quad \vec{u}_1 = u_{1x}\,\vec{x} + u_{1y}\,\vec{y} + u_{1z}\,\vec{z}$

$$\bar{\bar{\text{grad}}}\,\vec{u} = \begin{bmatrix} u_{1x,x} & u_{1x,y} & u_{1x,z} \\ u_{1y,x} & u_{1y,y} & u_{1y,z} \\ u_{1z,x} & u_{1z,y} & u_{1z,z} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_1 = \begin{bmatrix} u_{1x,x} & \frac{1}{2}(u_{1x,y}+u_{1y,x}) & \frac{1}{2}(u_{1x,z}+u_{1z,x}) \\ S & u_{1y,y} & \frac{1}{2}(u_{1y,z}+u_{1z,y}) \\ & & u_{1z,z} \end{bmatrix}_{(\;)\otimes(\;)}$$

D'où les équations.

$$\begin{cases} u_{1x,x} = \alpha\tau \\ u_{1y,y} = \alpha\tau \\ u_{1z,z} = \alpha\tau \\ u_{1x,y} + u_{1y,x} = 0 \\ u_{1x,z} + u_{1z,x} = 0 \\ u_{1y,z} + u_{1z,y} = 0 \end{cases}$$

le champs de déplacement $\begin{cases} u_{1x} = \alpha\tau x + A \\ u_{1y} = \alpha\tau y + B \\ u_{1z} = \alpha\tau z + C \end{cases}$

On pour $x = 0$ choisissons $u_{1x} = 0 \rightarrow A = 0$
pour $y = 0,\ z = 0$ choisissons $\begin{vmatrix} u_{1y} = 0 & \rightarrow B = 0 \\ u_{1z} = 0 & \rightarrow C = 0 \end{vmatrix}$

L'ensemble des équations sont vérifiées. La solution étant unique, c'est la solution du pb.

Le déplacement d'un p^t $P \in S\ell$ est.

$$\begin{cases} u_{1x} = \alpha \tau \ell \\ u_{1y} = \alpha \tau y \\ u_{1z} = \alpha \tau z \end{cases}$$

* pb 2 On impose un déplacement δ normal à la surface $S\ell$. sans cht de t^o

Choisissons un champ de déplacement $\vec{u}_2$ simple

$$\begin{cases} u_{2x} = \delta \dfrac{x}{\ell} \\ u_{2y} = \beta y \\ u_{2z} = \beta z \end{cases}$$

Le champs de déformation est calculable.

$$\operatorname{grad} \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Le champs de contraintes est calculable.

$$\bar{\bar{\sigma}}_2 = 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}} + \lambda(\operatorname{trace} \bar{\bar{\varepsilon}})\, \bar{\bar{I}}d$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_2 = \begin{bmatrix} 2\mu\frac{\delta}{\ell} + \lambda\left(2\beta + \frac{\delta}{\ell}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\beta + \lambda(\ ) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu\beta + \lambda(\ ) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

les C.L ~~en~~ en contrainte

- sur $P \in S_0$ $\quad \bar{\bar{\sigma}}_2 \cdot (-\vec{x}) = \begin{bmatrix} -\left[2\mu \frac{\delta}{l} + \lambda\left(2\beta + \frac{\delta}{l}\right)\right] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

$\vec{T}_2(P, -\vec{x}) \cdot \vec{t} = 0$ vérifiée.

- sur $P \in S_l$ $\quad \bar{\bar{\sigma}}_2 \cdot (\vec{n}) = \begin{bmatrix} +(\quad) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

$\vec{T}_2(P, -x) \cdot \vec{t} = 0$ vérifiée.

- sur $P \in S'$, par exemple pour un pt de normal $\vec{n} = \vec{y}$

$\bar{\bar{\sigma}}_2 \cdot (\vec{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\mu\beta + \lambda\left(2\beta + \frac{\delta}{l}\right) \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

- sur $P \in S'$ pour un pt de normal $\vec{z}$

$\bar{\bar{\sigma}}_2 (\vec{z}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\mu\beta + \lambda\left(2\beta + \frac{\delta}{l}\right) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

les C.L en déplacement.

$P \in S_0 \quad \vec{u_2} \cdot \vec{x} = \delta \frac{0}{l} = 0$

$P \in S_l \quad \vec{u_2} \cdot \vec{x} = \delta$

* Supperposition des 2 problèmes

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u_1} + \vec{u_2} \\ \bar{\bar{\varepsilon}} &= \bar{\bar{\varepsilon}}_1 + \bar{\bar{\varepsilon}}_2 \\ \bar{\bar{\sigma}} &= \bar{\bar{\sigma}}_1 + \bar{\bar{\sigma}}_2 \end{aligned} \right.$$

- CL en contrainte.

Pour $P \in S' \Rightarrow \vec{T}(P, \vec{n}) = 0$

$$\bar{\bar{\sigma}}_1 \cdot \vec{n} + \bar{\bar{\sigma}}_2 \cdot \vec{n} = 0$$

$$2\mu\beta + \lambda\left(2\beta + \frac{\delta}{l}\right) = 0$$

d'où $(2\mu + \lambda)\beta = -\lambda \frac{\delta}{l}$

$$\beta = \frac{-\lambda}{2\mu + \lambda} \frac{\delta}{l} = -\nu \frac{\delta}{l}$$

Les autres CL en contraintes sont vérifiées.

- CL en déplacement.
  - $P \in S_0$ $\vec{n}.(\vec{u_1} + \vec{u_2}) = \vec{0}$
    $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ Vérifiée.
  - $P \in S_l$ $\vec{n}.(\vec{u_1} + \vec{u_2}) = \vec{0}$

$$\alpha \tau l + \delta = 0$$

$$\boxed{\delta = -\alpha \tau l}$$ Vérifiée

- Le champs de contrainte total est donc.

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}}_1 + \bar{\bar{\sigma}}_2$$

$$= \bar{\bar{0}} + \begin{bmatrix} 2\mu \frac{\delta}{l} + \lambda(-2\nu+1)\frac{\delta}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\left(-\nu\frac{\delta}{l}\right) + \lambda(-2\nu+1)\frac{\delta}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \text{iden} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\delta}{l}(2\mu + \lambda - 2\nu\lambda) \\ \sigma_{yy} = \frac{\delta}{l}(-2\mu\nu + \lambda - 2\nu\lambda) \\ \sigma_{zz} = \sigma_{yy} \end{cases}$$

Or $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ $\lambda = E\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

en remplaçant.

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E\frac{\delta}{l} = -E\alpha\tau \\ \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

- Le champs de déformation total est

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}_1 + \bar{\bar{\varepsilon}}_2 = \begin{bmatrix} \alpha\tau(\cancel{1-1})^{=0} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\tau(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\tau(1+\nu) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- Le champs de déplacement

$$\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2} = \alpha\tau(1+\nu)y\,\vec{y} + \alpha\tau(1+\nu)z\,\vec{z}$$

• équation d'équilibre.

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\overset{\approx}{\sigma} = \overrightarrow{\mathrm{div}}\,\overset{\approx}{\sigma}_1 + \overrightarrow{\mathrm{div}}\,\overset{\approx}{\sigma}_2$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{div}}\,\overset{\approx}{0} + \overrightarrow{\mathrm{div}}\left[-E\alpha\tau\ \vec{x}\otimes\vec{x}\right]$$

$$= \vec{0}$$

vérifiée.