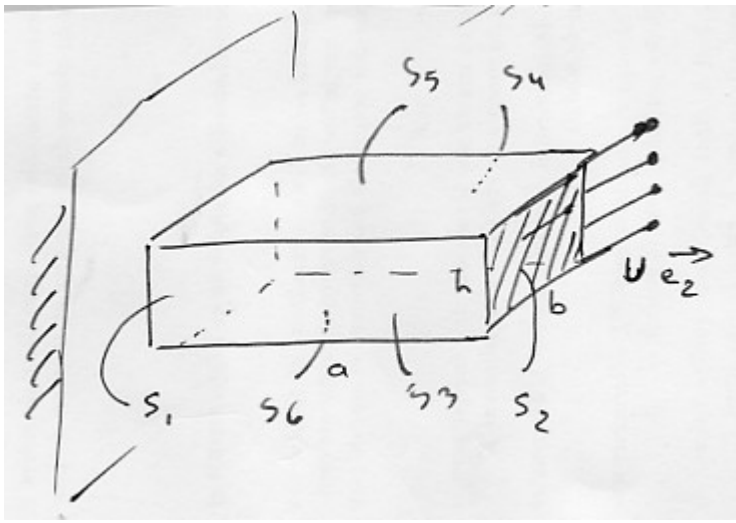
MSD2 td méthodes variationnelles, encadrement de la rigidité d'un joint élastique



1. Equations et conditions aux limites du problème d'équilibre du joint :

equilibre
éd comp.
passage $\vec{\sigma} \to \bar{\bar{\varepsilon}}$
CL dep. S_1
CL dep S_2
CL cont.

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad \Leftrightarrow \vec{\operatorname{div}}\,\bar{\bar{\sigma}} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\varepsilon_{\ell\ell}(\vec{u})\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}(\vec{u}), \quad \text{dans } \Omega, \quad \Leftrightarrow \bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\,\bar{\bar{\varepsilon}} + \lambda(\operatorname{trace}\bar{\bar{\varepsilon}})\,\bar{\bar{I_d}} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{dans } \Omega, \quad \Leftrightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\vec{u} + {}^t\operatorname{grad}\vec{u}) \quad (3)$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad \text{sur } x_1 = 0, \quad \Leftrightarrow \vec{u}(P \in S_1) = \vec{0} \quad (4)$$

$$u_1 = u_3 = 0, \quad u_2 = U, \quad \text{sur } x_1 = a, \quad \Leftrightarrow \vec{u}(P \in S_2) = \vec{U} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{32} = 0, & \text{sur } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = b, \Leftrightarrow \vec{T}(P, \vec{e}_2) = \vec{0} \quad (6) \quad \text{sur } S_3 S_4 \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, & \text{sur } x_3 = 0 \text{ et } x_3 = h. \Leftrightarrow \vec{T}(P, \vec{e}_3) = \vec{0} \quad (7) \quad \text{sur } S_5 S_6 \end{array}\right\}$$

Il s'agit d'un problème régulier de type I, qui admet une unique solution $(\vec{u}, \sigma)$.

↳ les frontières à déplacement imposé et à contrainte imposée sont disjoints

2. L'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles est ici :

$$\mathcal{C} = \mathcal{U}_{ad} = \{\vec{v}, \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)\ v_i \text{ réguliers}, \quad \vec{v}(0, x_2, x_3) = \vec{0} \text{ et}$$

$$\vec{v}(a, x_2, x_3) = U\vec{e}_2 \text{ pour } 0 < x_2 < b \text{ et } 0 < x_3 < h\ \}.$$

Pour que $\vec{v} = A\,x_1\,\vec{e}_2 \in \mathcal{U}_{ad}$, il faut et il suffit que $\vec{v}(0, x_2, x_3) = \vec{0}$ (automatiquement satisfaite) et que $\vec{v}(a, x_2, x_3) = U\,\vec{e}_2 \Longrightarrow A$ doit vérifier : $A\,a = U$. Donc les champs de déplacements $\vec{v} = (U\,/\,a)\ x_1\,\vec{e}_2$ sont cinématiquement admissibles.

Calculons le champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v})$ et le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\vec{v})$ associés par le loi de comportement (2)-(3). $\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\text{grad}\,\vec{v} + {}^t\text{grad}\,\vec{v})$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{U}{a} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{U}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\otimes(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}, \qquad \boldsymbol{\sigma}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 & \mu\frac{U}{a} & 0 \\ \mu\frac{U}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\otimes(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})},$$

$\boldsymbol{\sigma}(\vec{v})$ satisfait les équations d'équilibre (1), mais on n'a pas $\sigma_{12} = 0$ sur $x_2 = 0$ et $x_2 = b$ donc $\boldsymbol{\sigma}(\vec{v})$ ne vérifie pas les conditions aux limites (6). La solution $\vec{u}$ du problème (1)-(7) n'est donc pas de la forme $(U/a)\, x_1\, \vec{e}_2$.

3. L'ensemble des champs de contraintes cinématiquement admissibles est ici : statiquement

$$\mathcal{S} = \Sigma_{ad} = \{\tau,\ \tau = \{\tau_{ij}\},\ \tau_{ij} = \tau_{ji},\ \tau_{ij,j} = 0 \text{ dans } \Omega,\ \tau_{i2} = 0 \text{ sur } x_2 = 0 \text{ et } x_2 = b,\ \tau_{i3} = 0 \text{ sur } x_3 = 0 \text{ et } x_3 = h\}.$$

On vérifie aisément que les champs

$$\tau = \begin{pmatrix} Bx_1\left(\frac{b}{2} - x_2\right) & \frac{B}{2}\, x_2(x_2 - b) & 0 \\ \frac{B}{2}\, x_2(x_2 - b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\otimes(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})},$$

satisfont les équations d'équilibre (1) et les conditions aux limites (6)-(7) et ceci $\forall B \in \mathbb{R}$ donc $\tau \in \Sigma_{ad}$.

Pour qu'un champ de cette forme soit solution du problème (1)-(7), il faut qu'il vérifie les équations de Beltrami qui s'écrivent ici :

$$(1+\nu)\,\Delta\,\tau_{ij} + \tau_{\ell\ell,ij} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (i,j = 1,2,3).$$

On vérifie aisément * que l'équation correspondante au couple $(i = 1,\ j = 2)$ n'est satisfaite que si $B = 0$ et que les autres équations sont automatiquement satisfaites. Donc, seul le champ $\tau \equiv 0$ (parmi les champs de la forme choisie) peut être solution du problème (1)-(7). Or $\tau \equiv 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{v}) \equiv 0 \Longrightarrow \vec{v} = \vec{\rho} \in \mathcal{R}$ mais $\vec{\rho}$ ne peut pas vérifier à la fois les conditions aux limites (4) et (5). Donc la famille de champs choisie ne contient pas la solution du problème (1)-(7).

* Pour $i = 1$ $j = 2$

Soit $C = (1+\nu)\,\Delta\,\tau_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2}\left[\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}\right]$

$$= (1+\nu)\left[\frac{\partial^2 \tau_{12}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tau_{12}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \tau_{12}}{\partial x_3^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2}\left[\tau_{11}\right]$$

$$= (1+\nu)\left[0 + B + 0\right] - \left[B\right]$$

$$= \nu B$$

Pour que Beltrami soit vérifiée, il faut que $B = 0$

Partie 2 :

1. On établit aisément la formulation variationnelle en déplacements du problème : $\vec{u}$ solution du problème (1)-(7) vérifie

$$\vec{u} \in \mathcal{U}_{ad}, \overset{\mathcal{C}}{=} a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad},$$

avec l'energie de déformation en déplacement

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_\Omega [\lambda\, \varepsilon_{\ell\ell}(\vec{u})\, \varepsilon_{kk}(\vec{v}) + 2\mu\, \varepsilon_{ij}(\vec{u})\, \varepsilon_{ij}(\vec{v})] dx,$$

et la formulation variationnelle en contraintes s'écrit : $\boldsymbol{\sigma}$ solution du problème (1)-(7) vérifie :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_{ad}, \overset{\mathcal{S}}{=} A(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\tau}), \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad},$$

avec l'énergie de déformation en contrainte

$$A(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_\Omega \left[\frac{1+\nu}{E}\, \sigma_{ij}\, \tau_{ij} - \frac{\nu}{E}\, \sigma_{\ell\ell}\, \tau_{kk}\right] dx,$$

travail des forces extérieures

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau}) = U \int_0^b \int_0^h \tau_{12}(a, x_2, x_3)\, dx_2\, dx_3.$$

Les théorèmes de l'énergie s'écrivent alors pour $(\vec{u}, \boldsymbol{\sigma})$ solution du problème (1)-(7) :

$$\vec{u} \in \mathcal{U}_{ad},\ \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_{ad}, \quad -J(\boldsymbol{\tau}) \leq -J(\boldsymbol{\sigma}) = I(\vec{u}) \leq I(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad},\ \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad},$$

avec $I(\vec{v}) = \frac{1}{2}\, a(\vec{v}, \vec{v})$ et $J(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2}\, A(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) - \mathcal{L}(\boldsymbol{\tau})$.

2. Par définition

$$F = \left[\iint_{plaque} \boldsymbol{\sigma}(\vec{n})\, dS\right] . \vec{e}_2 = \int_0^b \int_0^h \sigma_{12}(a, x_2, x_3)\, dx_2\, dx_3.$$

Considérons le problème d'équilibre P_0 défini par les équations (1) - (7) où l'équation (5) est remplacée par $u_1 = u_3 = 0$ $u_2 = 1$, sur $x_1 = a$. Soient $(\vec{u}^0, \boldsymbol{\sigma}^0)$ la solution de ce problème P_0. On vérifie aisément que la solution du problème (1)-(7) s'écrit : $\vec{u} = U\vec{u}^0$ et $\boldsymbol{\sigma} = U\boldsymbol{\sigma}^0$, (linéarité d'un problème d'élasticité). D'où

$$F = UK \quad \text{avec} \quad K = \int_0^b \int_0^h \sigma_{12}^0(a, x_2, x_3) dx_2 dx_3,$$

constante indépendante de U, qui ne dépend que des propriétés mécaniques et géométriques du joint.

Méthode de Galerkin

En prenant $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}$ solution du problème (1)-(7) dans la formulation variationnelle en contraintes, on obtient : $A(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma})$ et donc $J(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}\,\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma})$

soit $J(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}\,U\,F = -\frac{1}{2}\,K\,U^2$, de sorte que les théorèmes de l'énergie conduisent à :

$$-J(\boldsymbol{\tau}) \leq \frac{1}{2}\,K\,U^2 \leq I(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad}.$$

En choisissant des fonctions tests $\vec{v} \in \mathcal{U}_{ad}$ et $\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad}$, on obtiendra de cette manière un encadrement du module de rigidité au cisaillement K.

3. En prenant $\vec{v} = (U/a)\,x_1\,\vec{e}_2 \in \mathcal{U}_{ad}$, on trouve aisément* $I(\vec{v}) = \frac{\mu}{2}\,\frac{U^2}{a}\,b\,h$ d'où une borne supérieure pour K :

$$K \leq \mu\,\frac{b\,h}{a}.$$

* En effet

l'eq. (5.25) $\quad \frac{1}{2}\gamma\delta \leq \underbrace{\int \frac{1}{2}\,\bar{\bar{\varepsilon}}'(u) : \bar{\bar{\bar{\bar{A}}}}(u) : \bar{\bar{\varepsilon}}'(u)\,d\Omega}_{I(v)}$

$$\frac{1}{2}\gamma\delta \leq \int_\Omega \frac{1}{2}\,\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{v}) : \bar{\bar{\sigma}}(v)\,d\Omega.$$

$$\frac{1}{2}\gamma\delta \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{U}{a} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{U}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(1\otimes 1)} : \begin{bmatrix} 0 & \mu\frac{U}{a} & 0 \\ \mu\frac{U}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(1\otimes 1)} d\Omega.$$

$$\frac{1}{2}\gamma\delta \leq \frac{1}{2}\int_\Omega 2\left[\frac{1}{2}\,\frac{U}{a}\,\mu\,\frac{U}{a}\right] d\Omega$$

$$\frac{1}{2}\gamma\delta \leq \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{U^2}{a^2}\int_\Omega d\Omega$$

$$\frac{1}{2}\gamma\delta \leq \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{U^2}{a^2}\,[a\,b\,h]$$

$$\frac{1}{2}\gamma\delta \leq \frac{\mu}{2}\,\frac{U^2}{a}\,b\,h$$

$$\frac{1}{2}\,K\,U\,U \leq \frac{\mu}{2}\,\frac{U^2}{a}\,b\,h$$

$$K \leq \mu\,\frac{b\,h}{a}$$

4. En choisissant τ de la forme donnée au I-3°), on obtient après calculs,

$$J(\tau) = \alpha\, B^2 + \beta\, B\, U = \tilde{J}(B),$$

avec $\alpha = \dfrac{h}{4E}\left(\dfrac{a^3 b^3}{18} + (1+\nu)\dfrac{a\, b^5}{30}\right) > 0$ et $\beta = \dfrac{h\, b^3}{12} > 0$.

*

$$J(\tau) = \frac{1}{2} A(\tau,\tau) - \mathcal{I}(\tau)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{1+\nu}{E}\tau_{ij}\tau_{ij} - \frac{\nu}{E}\tau_{ll}\tau_{ll}\right] d\Omega$$

$$- U\int_0^b\int_0^h \tau_{12}(a, x_2, x_3)\, dx_2\, dx_3$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{1+\nu}{E}\left[\tau_{11}\tau_{11} + \tau_{12}\tau_{12} + \tau_{21}\tau_{21}\right] - \frac{\nu}{E}\left[\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}\right]\left[\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}\right]\right] d\Omega$$

$$- U\int_0^b\int_0^h \frac{B}{2} x_2(x_2 - b)\, dx_2\, dx_3$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{1+\nu}{E}\left[B^2 x_1^2\left(\frac{b}{2}-x_2\right)^2 + 2\frac{B^2}{4}x_2^2(x_2-b)^2\right] - \frac{\nu}{E}\left[B^2 x_1^2\left(\frac{b}{2}-x_2\right)^2\right]\right] d\Omega$$

$$- U h \frac{B}{2}\int_0^b (x_2^2 - x_2 b)\, dx_2$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{1}{E}\left[B^2 x_1^2\left(\frac{b}{2}-x_2\right)^2\right] d\Omega$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{1+\nu}{E}\frac{B^2}{2}x_2^2(x_2-b)^2\right] d\Omega$$

$$- U h \frac{B}{2}\left[\frac{x_2^3}{3} - \frac{b x_2^2}{2}\right]_0^b$$

$$= \frac{B^2}{2E} \int_{\Omega} x_1^2 \left(\frac{b}{2} - x_2\right)^2 d\Omega$$

$$+ \frac{B^2(1+\nu)}{4E} \int_{\Omega} \left[x_2^2 (x_2 - b)^2\right] d\Omega$$

$$- U h \frac{B}{2} \left(-\frac{b^3}{6}\right)$$

$$= \frac{B^2}{2E} \frac{a^3 b^3 h}{36}$$

$$+ \frac{B^2(1+\nu)}{4E} \frac{a b^5 h}{30}$$

$$+ U B \frac{h b^3}{12} = \alpha B^2 + \beta B U$$

Pour obtenir la meilleure borne possible pour K, on recherche B de façon à avoir $\tilde{J}(B)$ minimum. Le minimum de $\tilde{J}(B)$ est obtenu pour

Recherche du minimum

$$\frac{\partial J}{\partial B} = 0$$

$$2 \alpha B^* + \beta U = 0$$

$$B^* = -\frac{\beta U}{2\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial B^2} = 2\alpha$$

Or $\alpha > 0$ car a, b, h, ν, E positif.

$\hookrightarrow B^*$ correspond à un minimum.

$$B^* = -\frac{\beta U}{2\alpha} \quad \text{et vaut} \quad \tilde{J}(B^*) = -\frac{1}{4}\frac{\beta^2 U^2}{\alpha}.$$

De sorte que la meilleure borne inférieure pour K est donnée par : $\beta^2/2\alpha$. On obtient finalement l'encadrement :

$$\frac{5}{6}\frac{\mu b h}{a}\frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{10}{3}\frac{1}{E}\right)} \leq K \leq \mu \frac{b h}{a}.$$

5. Considérons l'écart relatif e entre les bornes supérieure et inférieure par rapport à la borne supérieure

$$e = \frac{10a^2}{3E\,b^2 + 10a^2} = e(a),$$

b étant fixé. $e(a)$ est une fonction croissante de a, l'écart sera donc minimal et l'encadrement plus précis, lorsque $a \to 0$.
Et lorsque l'épaisseur du joint devient de plus en plus faible, le module de rigidité devient de plus en plus important.