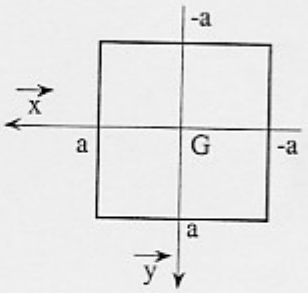
MSD2 td torsion

Cas du prisme à base carrée

Dans le cas d'un prisme à base carrée soumis à des sollicitations de torsion, on peut imaginer de choisir une fonction de torsion en considérant les équations des 4 droites qui constituent le contour. A savoir :

$$x = \pm a$$

$$y = \pm a$$



Ce qui conduit à une fonction de torsion de la forme :

$$\phi(x,y) = A(x^2-a^2)(y^2-a^2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2Ay(x^2-a^2) \rightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2A(x^2-a^2)$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = 2A(x^2+y^2-2a^2)$$

Avec la fonction choisie il est impossible de faire correspondre l'expression du laplacien avec -2 pour tout (x,y). La fonction de torsion proposée ne convient donc pas. En fait, dans le cas qui nous intéresse, la solution est une série de Fourier s'annulant sur le contour :

$$\phi(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_{pq} \cos\left\{(2p+1)\frac{\pi x}{2a}\right\} \cos\left\{(2q+1)\frac{\pi y}{2a}\right\}$$

On peut calculer, le Laplacien de ϕ à partir de l'expression ci-dessus :

$$\Delta\phi(x,y) = -\frac{\pi^2}{4a^2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_{pq} \left\{(2p+1)^2+(2q+1)^2\right\} \cos\left\{(2p+1)\frac{\pi x}{2a}\right\} \cos\left\{(2q+1)\frac{\pi y}{2a}\right\}$$

Il faut ensuite identifier les termes contenant les coefficients A_{pq} avec le développement en série de Fourier(1) de -2. Ce dernier s'écrit :

$$-2 = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \cos\left\{(2p+1)\frac{\pi x}{2a}\right\} \cos\left\{(2q+1)\frac{\pi y}{2a}\right\}$$

avec :

$$a_{pq} = -\frac{32}{\pi^2} \frac{(-1)^{p+q}}{(2p+1)(2q+1)}$$

Ce qui donne la solution exacte du problème de torsion sur une poutre carrée. Les coefficients A_{ij} de la fonction de torsion sont donc :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{128a^2}{\pi^4} \frac{1}{(2i+1)(2j+1)\left\{(2i+1)^2+(2j+1)^2\right\}}$$

Cette suite est rapidement décroissante ($1/i^3$ et $1/j^3$), le tableau ci dessous donne les premiers termes. A partir de i=j=2 les termes sont inférieurs à 1% du premier terme de la série.

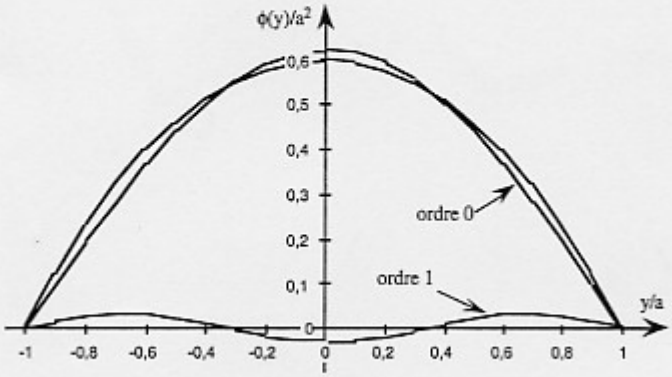
A_{ij}	i = 0	= 1	= 2
j = 0	$5{,}00\ 10^{-1}$	$-3{,}3\ 10^{-2}$	$7{,}6\ 10^{-3}$
= 1	$-3{,}3\ 10^{-2}$	$6{,}17\ 10^{-3}$	$-1{,}9\ 10^{-3}$
= 2	$7{,}6\ 10^{-3}$	$-1{,}9\ 10^{-3}$	$8{,}00\ 10^{-4}$

(1)

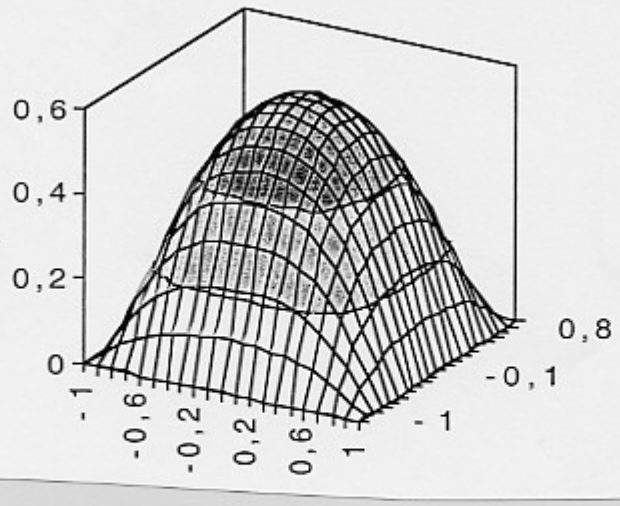
remarque : on obtient les coefficients du développement en série de Fourier d'une fonction Φ, par le calcul des intégrales :

$$A_{ij} = \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a}\Phi(x,y)\cos(2i+1)\frac{\pi x}{2a}\cos(2j+1)\frac{\pi y}{2a}\,dxdy$$

Le graphique ci-dessous donne une représentation de la fonction de torsion $\phi(x,y)$ dans le plan x = 0. On y voit aussi la contribution des termes i et j = 0 et 1 , sur la solution globale (i et j = 3).



En 3D, la fonction de torsion $\phi(x,y)$ à la forme représentée sur le graphe ci-dessous (développement à l'ordre 1).



$I_0^c = 2\mu K \iint \phi\, dS$

DSD 2 Td2 Torsion d'une section carrée

Calcul du moment quadratique carrée

$$I_0^c = 2\mu k \iint \phi \, dS$$

$$I_0 = \iint r^2 \, dS$$

Calcul de $\iint \phi \, dS = \iint \sum \sum A_{ij} \cos\left((2i+1)\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left((2j+1)\frac{\pi y}{2a}\right) dx\,dy$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a^2 A_{ij} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \cos\left[(2i+1)\frac{\pi}{2}\tilde{x}\right] \cos\left[(2j+1)\frac{\pi}{2}\tilde{y}\right] d\tilde{x}\,d\tilde{y}$$

car $x = a\tilde{x}$ $\quad dx = a\,d\tilde{x}$

$$= a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} I_{0_{ij}}^c$$

avec $I_{0_{ij}}^c = A_{ij} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \cos[\ ] \cos[\ ] \, d\tilde{x}\,d\tilde{y}$

$$= A_{ij} \frac{2^2}{\pi^2} \left[\sin[\ ]\right]_{-1}^{1} \left[\sin[\ ]\right]_{-1}^{1} \frac{1}{(2i+1)} \frac{1}{(2j+1)}$$

$$= A_{ij} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2i+1)} \frac{1}{(2j+1)} \left[2\sin\left(\pi i + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\pi j + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$I_{0_{ij}}^c = A_{ij} \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2i+1)} \frac{1}{(2j+1)}$$

ens 13/2/8

$$I_{0_{00}}^{c} = 0,5326$$

$$I_{0_{0m1;0m1}}^{c} = 0,5096$$

$$I_{0_{0m2;0m2}}^{c} = 0,5126$$

le moment quadratique non corrigé est

$$I_r = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} (x^2+y^2)\, dS$$

$$= a^4 \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}$$

$$= a^4 \int_{-1}^{1} \left(2\tilde{x}^2 + \frac{2}{3}\right) d\tilde{x}$$

$$= a^4 \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right)$$

$$= a^4 \frac{8}{3}$$

$$= a^4\ 2,67$$