Ex ①

① * l'equation d'equilibre

$$\overrightarrow{div}\,\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = 0$$

avec $f = ar\vec{e_\theta}$ (a est une constante)

<u>en coordonné cylindrique</u>

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + f_r = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + f_r = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} \right) + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_r = 0 \end{cases}$$

② Nous sommes toujours dans l'Hypothèses des contraintes plans qui impose cette fois-ci que le tenseur des contraintes

$$\overline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_3}) \otimes (\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_3})}$$

l'equation d'equilibre se traduit par ②

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma_{rr}}{dr} + \dfrac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) = 0 \\ \dfrac{d\sigma_{r\theta}}{dr} + \dfrac{1}{r}\left(2\sigma_{r\theta}\right) + ar \end{cases}$$

$$\left\{ \dfrac{d\sigma_{r\theta}}{dr} + \dfrac{1}{r}\sigma_{r\theta} = -ar \right.$$

Cette equation peut s'ecrire sous la forme:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\sigma_{\theta r}\right) = -ar$$

dr

③ la lois de comportement se traduit par:

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1+V}{E}\bar{\bar{\sigma}} - \frac{V}{E}\,\mathrm{tra}\,\bar{\bar{\sigma}}\,I$$

en déduit, que: $\varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1+V}{E}\sigma_{r\theta}$

en coordonnées cylindrique:

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

θ n'intervient pas dans la diff équation donc

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\right) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta}$$

On a : $$\frac{d(r^2\sigma_{r\theta})}{dr} = -ar^3$$

$$r^2\sigma_{r\theta} = \frac{-ar^4}{4} + c$$

$$\boxed{\sigma_{r\theta} = -\frac{ar^2}{4} + \frac{c}{r^2}}$$

$$\frac{d u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{2(1+\nu)}{E}\left(\frac{-ar^2}{4} + \frac{c}{r^2}\right)$$

On a

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) = \frac{1}{r}u_\theta + \frac{r}{r}\frac{du_\theta}{d\theta}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) = \frac{2(1+\nu)}{E}\left(-a\frac{r^2}{4} + \frac{c}{r^2}\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) = \frac{2(1+\nu)}{E}\left(-\frac{ar}{4} + \frac{C}{r^3}\right)$$

$$\boxed{\frac{u_\theta}{r} = \frac{2(1+\nu)}{E}\left(-\frac{ar^2}{8} - \frac{C}{2r^2} + B\right)}$$

$$u_\theta = \frac{2(1+\nu)}{E}\left(\frac{-ar^2}{8} - \frac{c}{2r} + Br\right)$$

4) Les condition aux limites

chargé sur la sur face extérieure

$(r = R_2)$

se qui se traduit

$\sigma_{r\theta}(R_2) = 0 \Rightarrow$

$$\sigma_{r\theta}(R_2 = 0) \Rightarrow -\frac{aR_2^2}{4} + \frac{C}{R_2^2} = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{aR_2^2}{4} \times R_2^2$$

$$\boxed{C = a\frac{R_2^4}{4}}$$

le disque est bloqué avec un cylindre indéformable

de rayon R_1

ce qui se traduit par:

$U_\theta = 0$ en $r = R_1$

$$0 = \frac{2(1+\nu)}{E}\left(-\frac{a R_1^2}{8} - \frac{a R_2^4}{8 R_1} + B R_1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{a R_1^2}{8} + \frac{a R_2^4}{8 R_1^2}}$$

$$\vec{\Gamma} = r\ddot{\alpha}\,\vec{e_\theta} - r\dot{\alpha}^2\,\vec{e_r}$$

$$f_\theta = a r\,\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \rho r \ddot{\alpha} = a r \qquad \ddot{\alpha} = \frac{\omega}{T}$$

$$a = \rho\ddot{\alpha} \Rightarrow a = \rho\frac{\omega}{T}$$

$= 4{,}90\ 10^{9}$ SI