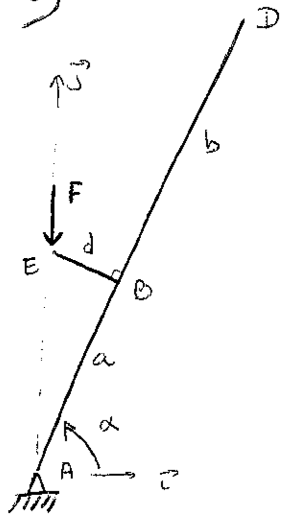
modèle a)



bilan des actions

passerelle $\rightarrow$ $\left\{\mathcal{T}_1\right\} = \left\{\begin{matrix} -F\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_E$

appui simple $\left\{\mathcal{T}_1\right\} = \left\{\begin{matrix} R_1\vec{i} + R_2\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A$

Equilibre de la structure

$$\Sigma\left\{\mathcal{T}\right\} = \left\{0\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} -F\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_E + \left\{\begin{matrix} R_1\vec{i} + R_2\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A = \left\{0\right\}$$

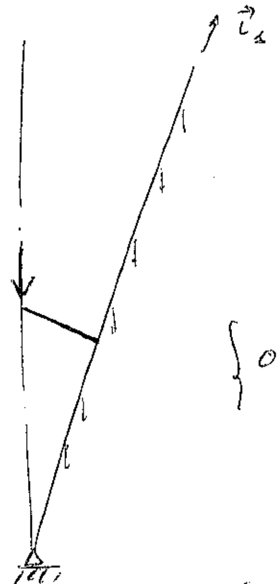
$$\left\{\begin{matrix} -F\vec{j} \\ \vec{0} - F\vec{j} \wedge - \cdot\vec{j} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} R_1\vec{i} + R_2\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A = \left\{0\right\}$$

$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = F \\ 0 = 0 \end{cases}$$

la structure est en équilibre

modèle b)

Avec le poids propre de la poutre AD



On ajoute

$$\left\{d\mathcal{T}\right\} = \left\{\begin{matrix} \rho S(s_p)\, g\, (-\vec{j})\, ds_p \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_P$$

L'équilibre donne

$$\left\{0\right\} = \left\{\begin{matrix} -F\vec{j} + R_1\vec{i} + R_2\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A + \int_A^D \left\{\begin{matrix} \rho S(s_p)\, g\, ds_p\, (-\vec{j}) \\ \rho S(s_p)\, g\, ds_p\, (-\vec{j}) \wedge - s_p \vec{i}_1 \end{matrix}\right\}_P$$

$$\left\{0\right\} = \left\{\begin{matrix} R_1\vec{i} + \left(R_2 - F - \int_0^{a+b} \rho S(s_p)\, g\, ds_p\right)\vec{j} \\ \int_0^{a+b} -\rho S(s_p)\, g\, ds_p\ \ s_p \cos\alpha \quad \vec{k} \end{matrix}\right\}_A$$

le système ne peut pas être à l'équilibre car l'équation du moment autour de l'axe A k n'est pas nulle.

modèle c)

Avec le poids propre de la poutre, et une réaction horizontale de la passerelle sur la poutre.

$$\left\{\mathcal{T}_1\right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_3 \vec{\imath} \;\; - F \vec{\jmath} \\ 0 \, \vec{k} \end{array} \right\}_E$$

L'équilibre s'écrit.

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_3 + R_1) \vec{\imath} + \left(R_2 - F - \int_0^{a+b} \rho \, S(s_p) \, g \, ds_p \right) \vec{\jmath} \\ \left(- R_3 \sqrt{a^2+d^2} - \rho g \cos\alpha \int_0^{a+b} s_p \, S(s_p) \, ds_p \right) \vec{k} \end{array} \right\}_A = \{0\}$$

le système d'équation est.

$$\begin{array}{ll} ① & R_1 + R_3 = 0 \\ ② & R_2 - F - \rho g \int_0^{a+b} S(s_p) \, ds_p = 0 \\ ③ & - R_3 \sqrt{a^2+d^2} - \rho g \cos\alpha \int_0^{a+b} s_p \, S(s_p) \, ds_p = 0 \end{array}$$

chargement $[g, F]$

equation 3 $\longrightarrow$ R_3

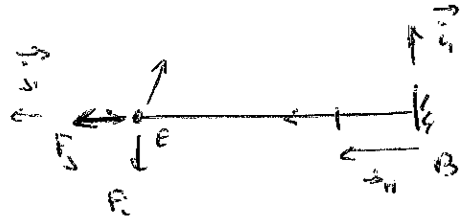
equation 2 $\longrightarrow$ R_2

equation 1 $\longrightarrow$ R_1

le système est isostatique.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = + \dfrac{\rho g \cos\alpha}{\sqrt{a^2+d^2}} \displaystyle\int_0^{a+b} s_p \, S(s_p) \, ds_p \\ R_2 = F + \rho g \displaystyle\int_0^{a+b} S(s_p) \, ds_p \qquad = F + \rho g V \\ R_3 = - \dfrac{\rho g \cos\alpha}{\sqrt{a^2+d^2}} \displaystyle\int_0^{a+b} s_p \, S(s_p) \, ds_p \end{array} \right.$$

10h10 Modèle du bras : modèle d)



① Torseur des efforts intérieurs

On oriente la poutre de B vers E. — le problème est plan.

$$\{\mathcal{T}_{eff\,int}\} = \Sigma \{\mathcal{T}_{s,i}\}$$

$$= \begin{Bmatrix} -F_i \vec{i_1} + F_j \vec{j_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E$$

$$= \begin{Bmatrix} -F_i \vec{i_1} + F_j \vec{j_1} \\ F_i (d - s_H) \vec{k} \end{Bmatrix}_H$$

On se place dans le repère local.

$$\begin{cases} \vec{i_1} = -\vec{y} \\ \vec{j_1} = \vec{x} \\ \vec{k} = \vec{z} \end{cases}$$

$$= \begin{Bmatrix} F_j \vec{x} + F_i \vec{y} \\ F_i (d - s_H) \vec{z} \end{Bmatrix}_H$$

Formules de Bresse — encastrement

$$\vec{u_E} = \cancel{\vec{u_B}} + \cancel{\vec{\omega_B}} \wedge \vec{BE} + \int_0^d \frac{F_j}{ES} \vec{x} \, ds_H + \cancel{\int_0^d \frac{F_i}{GS_y} \vec{y} \, ds_H}$$

$$+ \int_0^d \frac{F_i (d - s_H)}{E I_{Hz}} \vec{z} \wedge (d - s_H) \vec{x} \, ds_H$$

négligeable

$$\vec{u_E} = \frac{F_j d}{E \tilde{b} \tilde{h}} \vec{x} + \frac{F_i d^3}{3 E I_{Hz}} \vec{y}$$

$$\boxed{\vec{u_E} = \frac{F_j d}{E \tilde{b} \tilde{h}} \vec{j_1} + \frac{4 F_i d^3}{E \tilde{b} \tilde{h}^3} (-\vec{i_1})}$$

10h52

② La contrainte maximale est donnée par.

$$\sigma = -\frac{Mf \cdot \tilde{y}}{\frac{b\tilde{h}^3}{12}} + \frac{N}{\tilde{b}\tilde{h}}$$

$$\sigma = + \frac{12 \; F_i \,(d - s_H)}{\underbrace{2 \; b \; \tilde{h}^2}_{>0}} + \underbrace{\frac{F_j}{\tilde{b}\tilde{h}}}_{>0}$$

$$\sigma = + 6 \; \frac{F_i \; (d - s_H)}{b \; \tilde{h}^2} + \frac{F_j}{b\tilde{h}}$$

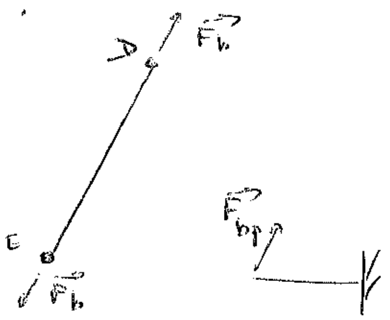
point le plus sollicité $\Rightarrow$ $s_H = 0$ (en B), pour $\tilde{y} = -\frac{\tilde{h}}{2}$

donc sur la fibre inférieure (la face du dessus / gravité)

10h55 ③

$$k \, \Delta l = F_b$$

10h56 ④



D'après le principe d'action et de réaction.

$$\vec{F_{bp}} = -\vec{F_b}$$

10h57 ⑤ Si on suppose le pt D fixe,

la longueur de la barre sans forces est $l = \sqrt{b^2 + d^2}$

Avec les chargements, la longueur de la barre est

$$l' = \sqrt{(b - \vec{v_E} \cdot \vec{i})^2 + (d + (\vec{v_E} \cdot \vec{j}))^2}$$

On peut négliger le second ~~terme~~ déplacement / premier.

$$l' = \sqrt{(b - v_{Ei})^2 + d^2}$$

$$\Delta l = l' - l$$
$$= \sqrt{(b - v_{Ei})^2 + d^2} - \sqrt{b^2 + d^2}$$

Posons $\varepsilon = \dfrac{v_{Ei}}{b} \ll 1$

$\gamma = \dfrac{d}{b} \ll 1$

11h04)
——
13h02)

$$\Delta l = b\left[\sqrt{(1-\varepsilon)^2+\gamma^2} - \sqrt{1+\gamma^2}\right]$$

$$= b\left[\sqrt{1-2\varepsilon+\cancel{\varepsilon^2}+\gamma^2} - \sqrt{1+\gamma^2}\right]$$

$$= b\left[1+\tfrac{1}{2}\gamma^2 - \varepsilon - 1 - \tfrac{1}{2}\gamma^2\right]$$

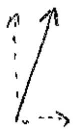
car $(1+\varepsilon)^{1/2} = 1+\tfrac{1}{2}\varepsilon$

$$= -b\,\varepsilon$$

$$= -b\,\frac{v_{Ei}}{b}$$

13h01) $\boxed{\Delta l = -v_{Ei}}$ au premier ordre

6 Il faut ajouter le chargement $\vec{F}_{bp}$
Si on le décompose suivant les 2 directions.



$$\vec{F}_{bp} = -F_{bp1}\,(+\vec{x}) - F_{bp2}\,\vec{y}$$

Le chargement total en E est.

$$\{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} (F_j - F_{bp1})\,\vec{x} - (F_i - F_{bp2})\,\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E$$

Le résultat final est.

$$\vec{v}_E = \frac{F_j - F_{bp1}}{E\,\tilde{b}\,\tilde{h}}\,\vec{j}_1 + \frac{4\,(F_i - F_{bp2})\,d^3}{E\,\tilde{b}\,\tilde{h}^3}\,(-\vec{i}_1)$$

Or $\Delta l = -\vec{v}_{Ei}$

$$\frac{F_b}{k} = \frac{4\,(F_i - F_{bp2})\,d^3}{E\,\tilde{b}\,\tilde{h}^3}$$

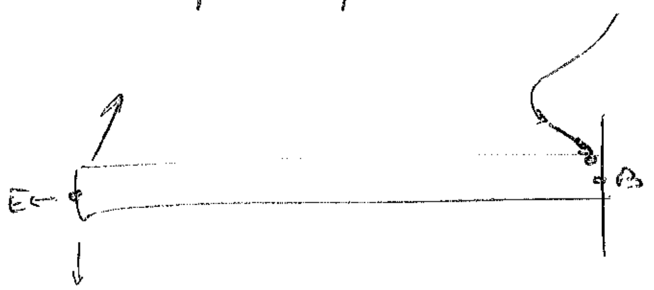
Or $F_{bp2} = F_b \cos\beta$ $\qquad F_{bp1} = F_b \sin\beta$

$$F_b\left(\frac{\cos\beta}{k} + \frac{4\,d^3}{E\,\tilde{b}\,\tilde{h}^3}\right) = \frac{4\,d^3}{E\,\tilde{b}\,\tilde{h}^3}\,F_i$$

$$\boxed{F_b = F_i\left[\frac{1}{\dfrac{E\,\tilde{b}\,h^3\cos\beta}{4\,d^3\,k}+1}\right]} = F_i\,\delta$$

d'où $\vec{v}_E = \dfrac{F_j - \delta F_i}{E \tilde{b} \tilde{h}} \vec{j_1} + \dfrac{4 F_i (1 - \delta) d^3}{E \tilde{b} \tilde{h}^3} (-\vec{i_1})$

7) les signes des forces globales sont inchangées donc le pt le plus sollicité est toujours



la contrainte maximale est

$$\sigma = 6 \frac{F_i (1-\delta) d}{b \tilde{h}^2} + \frac{F_j - F_i \delta \sin\beta}{\tilde{b} \tilde{h}}$$

(3h15) 8) la contrainte maximale diminue. car $\delta > 0$