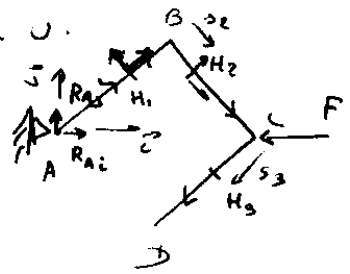
décembre 2007 . 1

(rédaction de la correction 37 minutes)
→ longueur OK !

Portique en U.

14640 1)



14642 2) On oriente la poutre de A → B → C → D

$$\left\{\mathcal{T}\ \text{eff int}_{H_3}\right\} = \sum_i \left\{\mathcal{T}_{s_i}\right\} = \left\{0\right\}$$

3) Il n'y a pas de sollicitation en H_3.

14643 4)
$$\left\{\mathcal{T}\ \text{eff int}_{H_2}\right\} = \sum_i \left\{\mathcal{T}_{s_i}\right\} = \left\{\mathcal{T}_1\right\} = \left\{\begin{matrix} -F\vec{i} \\ \vec{0}\vec{k} \end{matrix}\right\}_C$$

$$= \left\{\begin{matrix} -F\vec{i} \\ -F\vec{i} \wedge \overrightarrow{CH_2} \end{matrix}\right\}_{H_2} = \left\{\begin{matrix} -F\vec{i} \\ -F\vec{i} \wedge \left(\sqrt{2}\,l - s_2\right)\left(\frac{-\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}\right) \end{matrix}\right\}_{H_2}$$

$$= \left\{\begin{matrix} -F\vec{i} \\ -F\left(\frac{\sqrt{2}\,l - s_2}{\sqrt{2}}\right)\vec{k} \end{matrix}\right\}_{H_2}$$

14646 5) On se place dans le repère local

$$\vec{i} = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}} \ ; \ \vec{j} = \frac{\vec{y}-\vec{x}}{\sqrt{2}} \ ; \ \vec{z} = \vec{k}$$

d'où

$$\left\{\mathcal{T}\ \text{eff int}_{H_2}\right\} = \left\{\begin{matrix} -\frac{F}{\sqrt{2}}\vec{x} - \frac{F}{\sqrt{2}}\vec{y} \\ -F\left(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}\right)\vec{k} \end{matrix}\right\}_{H_2}$$

Par identification

effort normal : $N_2 = -\frac{F}{\sqrt{2}}$

effort tranchant dans la direction $\vec{y}$: $T_{y2} = -\frac{F}{\sqrt{2}}$

moment fléchissant autour de l'axe $\vec{z}$:

$$M_{fz_2} = -F\left(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}\right)$$

décembre 2007.2

14h50 6) $\left\{ \mathcal{T}_{\text{eff int}\, H_1} \right\} = + \sum \left\{ \mathcal{T}_{s1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -F\vec{i} \\ 0\,\vec{k} \end{matrix} \right\}_C$

7) On déplace le torseur au point H_1

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{eff int}\, H_1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -F\vec{i} \\ -F\vec{i} \wedge (\vec{CB} + \vec{BH_1}) \end{matrix} \right\}_{H_1}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} -F\vec{i} \\ -F\vec{i} \wedge \left[-l\vec{i} + l\vec{j} + (\sqrt{2}l - s_1)\left(\frac{-\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}\right) \right] \end{matrix} \right\}_{H_1}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} -F\vec{i} \\ -F\left(l - l + \frac{s_1}{\sqrt{2}}\right)\vec{k} \end{matrix} \right\}_{H_1}$$

On se place dans le repère local.

$$\vec{i} = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\sqrt{2}} \; ; \; \vec{j} = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{\sqrt{2}} \; ; \; \vec{z} = \vec{k}$$

$$\left\{ \mathcal{T}_{\text{eff int}\, H_1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -\frac{F}{\sqrt{2}}\vec{x} + \frac{F}{\sqrt{2}}\vec{y} \\ -F\frac{s_1}{\sqrt{2}}\vec{z} \end{matrix} \right\}_{H_1}$$

Par identification.

effort normal $N_1 = -\frac{F}{\sqrt{2}}$

effort tranchant dans la direction $\vec{y}$ $T_{y_1} = \frac{F}{\sqrt{2}}$

moment fléchissant autours de l'axe $\vec{z}$ $Mf_{z_1} = -F\frac{s_1}{\sqrt{2}}$

14h56 / 15h00 8)

$$I_{H_z} = \iint y^2 \, dS$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} [r\cos\theta]^2 \, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_{r=0}^{R} r^3 \, dr$$

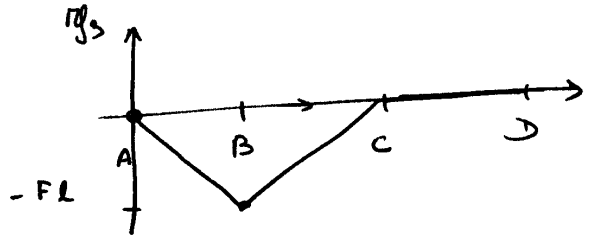
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right] d\theta \quad \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{4\, 2^4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

15h03 9) la section la plus sollicitée est celle où le moment fléchissant est maximal.



C'est donc au point H, → B

la contrainte est donc en ce pt H,

$$\sigma_{xx} = \frac{-F}{\sqrt{2}\,\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{F\ell}{\frac{\pi d^4}{64}}\,\tilde{y}$$

Elle est maximale, de compression en $\tilde{y} = -\frac{d}{2}$

$$\left|\sigma_{xx}^{max}\right| = F\,\frac{\sqrt{2}}{\pi d^2} + \frac{F\ell\, 64\, d}{2\pi d^4}$$

$$= \frac{F}{\pi d^2}\left[\sqrt{2} + 32\,\frac{\ell}{d}\right]$$

D'où $$\frac{\sigma_{xx}^{max}}{F} = \frac{1}{\pi d^2}\left[\sqrt{2} + 32\,\frac{\ell}{d}\right]$$

15h09 10) la symétrie du problème par rapport au plan $(B, \vec{j}, \vec{k})$ implique que la rotation du pt B est nulle.

Donc utilisons la formule de Bresse en rotation entre B et C.

$$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_B + \int_B^C \frac{M_{f3}}{E I_{H3}}\,\vec{k}\, ds$$

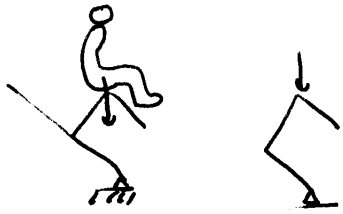
$$= \frac{-F\vec{k}}{E I_{H3}}\int_0^{\sqrt{2}\ell}\left(\ell - \frac{s_2}{\sqrt{2}}\right) ds_2 = \frac{-F\vec{k}}{E\,\frac{\pi d^4}{64}}\left[\ell s_2 - \frac{s_2^2}{2\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}\ell}$$

$$= \frac{-F\vec{k}\,64}{E\pi d^4}\left[\sqrt{2}\ell^2 - \frac{2\ell^2}{2\sqrt{2}}\right] = \frac{-F\vec{k}\,64\,\ell^2}{E\pi d^4\sqrt{2}}\left[1\right]$$

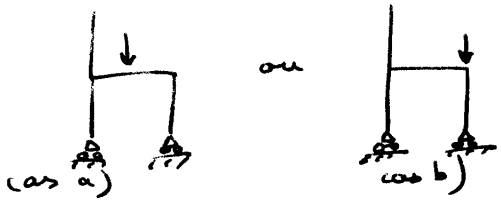
décembre 2007.4

$$\vec{\omega}_c = \frac{-F\,\ell^2}{E\,\pi\,d^4}\,\frac{64}{\sqrt{2}}\,\vec{k}$$

Partie B.



* Si l'on suppose que l'axe $\vec{i}$ est vertical, et que $\vec{F} = m\vec{g}$ avec m la $\frac{1}{2}$ masse du fils, On retrouve le problème de la partie A.
* Il suffit donc de calculer le niveau de contrainte lorsque la chaise repose sur ses 4 pieds.
* En fonction de la position du chargement les torseurs des efforts intérieurs varient.



Calculons le cas b .... qui n'est cité pas le plus défavorable. La poutre est en compression pure la contrainte est $\sigma_{xx}^{b} = -\dfrac{F}{\frac{\pi d^2}{4}}$

le rapport $\left|\dfrac{\sigma_{xx}^{max}}{\sigma_{xx}^{b}}\right| = \dfrac{\frac{4}{\pi d^2}\left[\sqrt{2} + 32\,\frac{\ell}{d}\right]}{\frac{\pi d^2}{4}}$

$$= 2 + 128\,\frac{\ell}{d}$$

Dans le cas réaliste où $\ell/d = 10$

$$\left|\frac{\sigma_{xx}^{max}}{\sigma_{xx}}\right| = 1282 .$$

la contrainte est 1282 fois plus grande si le fils se balance.

15h21