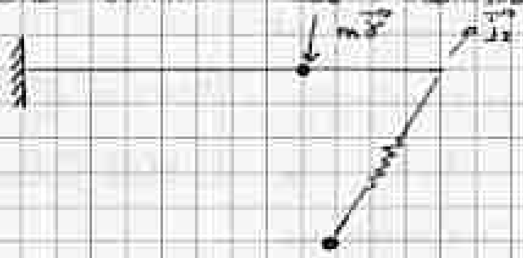
Examen RdR LP1AV Décembre 2006.

9401) 1)



9402) c) Soit $\vec{u}_B$ le déplacement du point B. L'allongement du ressort correspond à la projection de ce déplacement sur l'axe de ce ressort.

$$\vec{u}_B \cdot \vec{J_2} = \Delta l$$

la réaction du ressort sur la poutre est donc

$$\vec{F} = -k\,\Delta l\,\vec{J_2} = -k\left(\vec{u}_B \cdot \vec{J_2}\right)\vec{J_2}$$

3) ~~Es~~ D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué ~~au~~ ~~par~~ à la masse m.

$$m \gamma \vec{j_3} = \Sigma \vec{F}_{ext \to m}$$

Donc la poutre exerce sur la masse un effort $m \gamma \vec{j_3}$

Donc, par le principe d'action et de réaction, la masse exerce sur la poutre

$$\{\mathcal{T}_3\} = \begin{Bmatrix} -m\gamma \vec{j_3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$$

4) Pour déterminer si le système est hyperstatique, écrivons l'équilibre de la poutre AB.

<u>bilan des actions.</u> (le problème est plan)

liaison encastrement en A $\quad \{\mathcal{T}_1\} = \begin{Bmatrix} R_{i1} \vec{i} + R_{j1} \vec{j} \\ \Pi_1 \vec{k} \end{Bmatrix}_A$

liaison du ressort en B $\quad \{\mathcal{T}_2\} = \begin{Bmatrix} \vec{F} = -k\,(\vec{u_B} \cdot \vec{j_2})\,\vec{j_2} \\ 0\,\vec{k} \end{Bmatrix}_B$

la masse sur la poutre en D (le chargement) $\quad \{\mathcal{T}_3\} = \begin{Bmatrix} -m\gamma \vec{j_3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$

la masse de la poutre est négligée.

l'équilibre se traduit par $\Sigma \{\mathcal{T}_i\} = \{0\}$.

Soit

$$\{0\} = \begin{Bmatrix} R_{i1} \vec{i} + R_{j1} \vec{j} \\ \Pi_1 \vec{k} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{F} = -k(\vec{u_B} \cdot \vec{j_2})\,\vec{j_2} \\ 0\,\vec{k} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} -m\gamma \vec{j_3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$$

Ecriture en un même pt.

$$\{0\} = \begin{Bmatrix} R_{i1} \vec{i} + R_{j1} \vec{j} \\ \Pi_1 \vec{k} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{F} = -k(\vec{u_B} \cdot \vec{j_2})\,\vec{j_2} \\ -k(\vec{u_B} \cdot \vec{j_2})\,\vec{j_2} \wedge -l\,\vec{i} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -m\gamma \vec{j_3} \\ -m\gamma \vec{j_3} \wedge \left(-\frac{2}{3} l\, \vec{i}\right) \end{Bmatrix}$$

D'où les 3 équations.

$$\begin{cases} R_{i1} - \frac{1}{2} k\,(\vec{u_B} \cdot \vec{j_2}) - m\gamma\, c75 = 0 \\ R_{j1} - \frac{\sqrt{3}}{2} k\,(\vec{u_B} \cdot \vec{j_2}) - m\gamma\, s75 = 0 \\ \Pi_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} l\, k\,(\vec{u_B} \cdot \vec{j_2}) - m\gamma\, \frac{2}{3} l\, s75 = 0 \end{cases}$$

avec $c75 = \cos \pi \frac{75}{180}$ $\quad s75 = \sin \pi \frac{75}{180}$

la donnée du problème est γ, on ne peut théoou les 4 inconnues $R_i\vec{x}$, $R_j\vec{y}$, M_i, F

on choisit l'inconnue hyperstatique F $\left(= -k(\overrightarrow{u_B} \cdot \vec{j_1}) \right)$

3) $$\begin{cases} R_{ix} = m g\, c75 - \frac{1}{2} F \\ R_{jy} = m g\, s75 - \frac{\sqrt{3}}{2} F \\ M_i = s75 \frac{2}{3} m g\, l_1 - l_1 F \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

4) Pour déterminer F, il faut calculer le déplacement du point B. Pour ce faire, on a besoin de la formule de Bresse entre A et B. Il faut donc calculer le $\mathcal{T}_{eff\,int}$ en $H_1 \in [AD]$ et en $H_2 \in [DB]$.

On oriente les poutres de A vers B.

- Pour $H_1 \in [AD]$ $\quad \overrightarrow{AH_1} = x_1 \vec{i}$

$$\left\{ \mathcal{T}_{eff\,int\,H_1} \right\} = + \sum \left\{ \mathcal{T}_{ext} \right\}$$

$$= \left\{ \mathcal{T}_1 \right\} + \left\{ \mathcal{T}_2 \right\}$$

$$= \begin{Bmatrix} F \vec{j_2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} -m g \vec{j_3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$$

$$= \begin{Bmatrix} F \vec{j_2} \\ F \vec{j_2} \wedge \overrightarrow{BH_1} \end{Bmatrix}_{H_1} + \begin{Bmatrix} -m g \vec{j_3} \\ -m g \vec{j_3} \wedge \overrightarrow{DH_1} \end{Bmatrix}_{H_1}$$

$$= \begin{Bmatrix} F \vec{j_2} - m g \vec{j_3} \\ \vec{k}\left[F (l_1 - x_1) \frac{\sqrt{3}}{2} - m g \left(\frac{2 l_1}{3} - x_1 \right) s75 \right] \end{Bmatrix}_{H_1}$$

le repère local $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est égal au repère global $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donc :

$$= \begin{Bmatrix} \vec{x} \left(\frac{1}{2} F - m g\, c75 \right) + \vec{y} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} F - m g\, s75 \right) \\ \vec{z} \left(F \frac{\sqrt{3}}{2} (l_1 - x_1) - m g \left(\frac{2 l_1}{3} - x_1 \right) s75 \right) \end{Bmatrix}_{H_1}$$

D'où les composantes

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2} F - m g\, c75 \\ T_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} F - m g\, s75 \\ M_{f3\,1} = F \frac{\sqrt{3}}{2} (l_1 - x_1) - m g \left(\frac{2 l_1}{3} - x_1 \right) s75 \end{cases}$$

- Pour $H_2 \in [DB]$

le calcul est identique avec juste les torseurs $\mathcal{T}_2$ ~~en second~~

$$\begin{cases} N_2 = \frac{1}{2} F \\ T_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} F \\ M_{f3\,2} = F \frac{\sqrt{3}}{2} (l_1 - x_2) \end{cases}$$

7) L'inconnue hyperstatique F est telle que

$$F = -k\,(\vec{U_B}\cdot\vec{J_2})$$

Utilisons les équations de Bresse entre A et B.

$$\vec{U_B} = \vec{U_A} + \vec{\omega_A}\wedge\vec{AB}$$

$$+ \int_A^D \left(\frac{N_1}{ES}\vec{x} + \cancel{\frac{T_1}{GS_y}\vec{y}}\right) dx_1$$

$$+ \int_D^B \left(\frac{N_2}{ES}\vec{x} + \cancel{\frac{T_2}{GS_y}\vec{y}}\right) dx_2$$

$$+ \int_A^D \left(\frac{Mg_{3,1}}{EI_{H_3}}\vec{3}\wedge\vec{H_1B}\right) dx_1$$

$$+ \int_D^B \left(\frac{Mg_{32}}{EI_{H_3}}\vec{3}\wedge\vec{H_2B}\right) dx_2$$

Le déplacement dû à l'effet tranchant est négligeable devant le déplacement dû au moment fléchissant donc (/ ci-dessus)

Le pt A est encastré $\vec{U_A} = 0$ $\vec{\omega_A} = 0$.

$$\vec{U_B}\cdot\vec{J_2} = \frac{1}{ES}\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2l_1}{3}}\left(\frac{1}{2}F - m\gamma\, c75\right)dx_1$$

$$+ \frac{1}{ES}\,\frac{1}{2}\int_{\frac{2l_1}{3}}^{l_1}\frac{1}{2}F\,dx_2$$

$$+ \frac{1}{EI_{H_3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,F\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{2l_1}{3}}(l_1-x_1)^2\,dx_1$$

$$+ \frac{1}{EI_{H_3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-m\gamma\,\cancel{\tfrac{2l_1}{3l_1}}\, s75\right)\int_0^{\frac{2l_1}{3}}(l_1-x_1)\,\left(\frac{2l_1}{3}-x_1\right)dx_1$$

$$+ \frac{1}{EI_{H_3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{F\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{2l_1}{3}}^{l_1}(l_1-x_2)^2\,dx_2$$

$$\cancel{+\frac{1}{EI_{H_3}}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\vec{U_B}\cdot\vec{J_2} = \frac{1}{2ES}\left(\frac{1}{2}F\,l_1\right) + \frac{1}{2ES}(-m\gamma\, c75)\frac{2l_1}{3}$$

$$+ \frac{1}{EI_{H_3}}\,\frac{3}{4}\,F\int_0^{l_1}(l_1-x_1)^2\,dx_1$$

$$+ \frac{1}{EI_{H_3}}\left(-\frac{m\gamma\,\cancel{l_1}\, s75}{\cancel{l_1}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{2l_1}{3}}(l_1-x_1)\left(\frac{2l_1}{3}-x_1\right)dx_1$$

Or $\displaystyle\int_0^{l_1} (l_1 - x_1)^2\, dx_1 = \int_0^{l_1} u^2\, du = \frac{l_1^3}{3}$

$$\int_0^{\frac{2l_1}{3}} (l_1 - x_1) \left(\frac{2l_1}{3} - x_1\right) dx_1 = \cancel{\int_{\frac{1}{3}l_1}^{l_1} u\, du = \frac{1}{2}\left[l_1^2 - \frac{l_1^2}{9}\right] = \frac{l_1^2 4}{9}} = \frac{14}{81}\, l^3$$

d'où

$$\vec{v_B} \cdot \vec{J_2} = F\left[\frac{l_1}{4ES} + \frac{l_1^3}{EI_{H_3}\, 4}\right]$$

$$- m\gamma \left[\frac{c75\, l_1}{3ES} + \frac{14\, l_1^3\, \Delta 75}{81\, EI_{H_3}} \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Or $F = -k(\vec{v_B} \cdot \vec{J_2})$

d'où

$$F\left[1 + k\left(\frac{l_1}{4ES} + \frac{l_1^3}{EI_{H_3} 4}\right)\right] = k m\gamma \left[\frac{c75\, l_1}{3ES} + \frac{\sqrt{3}\, 14\, \Delta 75\, l_1}{81\; 2\; EI_{H_3}}\right]$$

$$F = m\gamma \left[\frac{\dfrac{c75\, l_1}{3ES} + \dfrac{14\, \Delta 75\, l_1^3}{81\, EI_{H_3}} \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{k} + \dfrac{l_1}{4ES} + \dfrac{l_1^3}{4EI_{H_3}}}\right] = \alpha\, m\gamma$$

$F = 0.58\; m\gamma$

8) Pour H_1 :

$$Mf_{3_1} = m\gamma\left[\left(x_1 - \frac{2l_1}{3}\right) s75 + \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}(l_1 - x_1)\right]$$

La fonction est linéaire en x_1, le maximum est soit en $x_1 = 0$ soit en $\frac{2l_1}{3}$

Pour H_2 :

$$Mf_{3_2} = m\gamma\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha(l_1 - x_2)\right]$$

Il est nul en $x_2 = l_1$, le maxi ne peut être qu'en $x_2 = \frac{2l_1}{3}$

Il faut donc comparer.

$$Mf_{3_0} = m\gamma\left[\left(0 - \frac{2l_1}{3}\right)s75 + \alpha\frac{\sqrt{3}}{2} l_1\right]$$

$$Mf_{3\frac{2}{3}} = m\gamma\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\frac{l_1}{3}\right]$$

Pour $\alpha = 0.58$

$$Mf_{3_0} = m\gamma l_1\left[-\frac{2\, s75}{3} + \alpha\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = m\gamma l_1\,[-0.14]$$

$$Mf_{3\frac{2}{3}} = m\gamma l_1\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\right] = m\gamma l_1\,[0{,}29]$$

le moment fléchissant est maximal ~~et l'élément~~ exactement au pt D

$M_{f_3} = \cancel{1.683} \; m \gamma l_1$
$+0.29$

9) en $x_1 = \frac{2 l_1}{3}$

$N_1 = m \gamma \left[\frac{\alpha}{2} - c75 \right] = m \gamma \; (\cancel{0,176}) \; 0,0303$

d'où $\sigma = - m \gamma \left[\frac{+0{,}303}{S} - \frac{0.29 \; l_1}{I_{H_3}} \hat{y} \right]$

le module de la contrainte est maximal en $\hat{y} = -\frac{h}{2}$

$$|\sigma| = m \gamma \left[\frac{+0.58 \ldots}{S} + \frac{0.29 \; l_1 \; h}{2 \; I_{H_{3}}} \right]$$

$$= m \gamma \left[\cancel{1.84} \; 10^7 \right] \left[6.44 \; 10^6 \right]$$

10) Pour de l'aluminium $\sigma < 50 \; MPa$

$$m \gamma \left[\overset{6.44 \; 10^6}{\cancel{1.84 \; 10^7}} \right] < 50 \; 10^6$$

$$\gamma < \frac{50 \; 10^6}{m \; \underset{2.29}{\cancel{1.84}} \; 10^7}$$

$$\gamma < \underset{2.59}{\cancel{\ldots}} \; m \, s^{-2}.$$