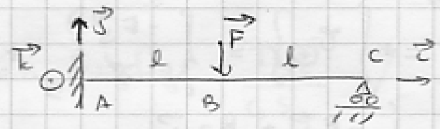
Td 6 Système hyperstatique - Résolution.

<u>exercice 1</u>



Soit la poutre droite encastrée en A, chargée en B, appuyée simplement en C.

<u>bilan des actions</u>

encastrement en A $\{\mathcal{T}_A\} = \begin{Bmatrix} R_1\vec{i} + R_2\vec{j} \\ M_1\vec{k} \end{Bmatrix}_A$

chargement en B $\{\mathcal{T}_B\} = \begin{Bmatrix} -F\vec{j} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$

appuis sur rouleau de normale $C\vec{j}$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} R_3\vec{j} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

l'équilibre du système se traduit par $\Sigma\{\mathcal{T}\} = \{0\}$

$$\begin{Bmatrix} R_1\vec{i} + R_2\vec{j} \\ M_1\vec{k} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -F\vec{j} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} R_3\vec{j} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1\vec{i} + R_2\vec{j} \\ M_1\vec{k} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -F\vec{j} \\ -F\vec{j}\wedge\vec{BA} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} R_3\vec{j} \\ R_3\vec{j}\wedge\vec{CA} \end{Bmatrix}_A = \{0\}$$

$$\begin{cases} \boxed{R_1} = 0 \\ R_2 + R_3 - F = 0 \\ M_1 - Fl + R_3\, 2l = 0 \end{cases}$$

○ : le chargement
□ : inconnue déterminable

1) Si l'on choisi R_3 comme inconnue hyperstatique, écrire les réactions en fonction du chargement et de R_3. Même question avec M_1

<u>si R_3</u> $\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = F - R_3 \\ M_1 = Fl - 2l R_3 \end{cases}$

<u>si R_1</u> $\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = F\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{M_1}{2l} \\ R_3 = \frac{1}{2l}\left(Fl - M_1\right) \end{cases}$

2) Quelle est l'équation cinématique associée à cette inconnue hyperstatique ? dans chaque cas R_1, M_1 ?

si R_3 $\quad \vec{v}_C \cdot \vec{j} = 0$ que l'on peut écrire $\dfrac{\partial W_{int}}{\partial R_3} = 0$

si Π_1 $\quad \vec{\omega}_A \cdot \vec{k} = 0$ que l'on peut écrire $\dfrac{\partial W_{int}}{\partial \Pi_1} = 0$

3) écrire les torseurs d'effort intérieurs en fonction du chargement et de l'inconnue hyperstatique choisie.

* dans le cas où l'inconnue hyperstatique est R_3

• Pour $H_1 \in [AB]$ $\quad \overrightarrow{AH_1} = x_1 \vec{i}$ On oriente la poutre de A vers B

$$\left\{\mathcal{T}_{eff\,int\,H_1}\right\} = +\left\{\mathcal{T}_{\oplus}\right\} = \left\{\begin{matrix} -F\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B + \left\{\begin{matrix} R_3\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C$$

$$= \left\{\begin{matrix} -F\vec{j} + R_3\vec{j} \\ \left[-F(l-x_1) + R_3(2l-x_1)\right]\vec{k} \end{matrix}\right\}_{H_1}$$

le repère local $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ coïncide avec le repère global $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donc

$$= \left\{\begin{matrix} (R_3 - F)\,\vec{y} \\ \left[-F(l-x_1) + R_3(2l-x_1)\right]\vec{z} \end{matrix}\right\}_{H_1}$$

effort tranchant dans la direction $\vec{y}$ $\quad T_{y_1} = R_3 - F$

moment fléchissant autour de l'axe $H_1\vec{z}$

$$Mf_{z_1} = -F(l-x_1) + R_3(2l-x_1)$$

• Pour $H_2 \in [B, C]$ $\quad \overrightarrow{AH_2} = x_2 \vec{i}$

$$\left\{ \tau_{eff\,int\,H_2} \right\} = + \left\{ \tau_{\oplus} \right\} = \left\{ \tau_c \right\} = \left\{ \begin{matrix} R_3 \vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} R_3 \vec{j} \\ R_3 (2l - x_2) \vec{k} \end{matrix} \right\}_{H_2}$$

le repère local $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ coïncide avec le repère global $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donc

$$= \left\{ \begin{matrix} R_3 \vec{y} \\ R_3 (2l - x_2) \vec{z} \end{matrix} \right\}_{H_2}$$

effort tranchant dans la direction $\vec{y}$ $\quad T_{y_2} = R_3$

moment fléchissant autour de l'axe $H_2 \vec{z}$

$$Mf_{z_2} = R_3 (2l - x_2)$$

4) Déterminez l'inconnue hyperstatique par la méthode énergétique

$$\frac{\partial W_{int}}{\partial R_3} = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial R_3} \left[\frac{1}{2} \int_A^B \left(\frac{T_{y_1}^2}{G S_y} + \frac{Mf_{z_1}^2}{E I_{Hz}} \right) dx_1 + \frac{1}{2} \int_B^C \left(\frac{T_{y_2}^2}{G S_y} + \frac{Mf_{z_2}^2}{E I_{Hz}} \right) dx_2 \right.$$

On néglige $\dfrac{T_{yi}^2}{G S_y} \Big/ \dfrac{Mf_{zi}^2}{E I_{Hz}}$, d'où

$$0 = \int_A^B \frac{Mf_{z_1}}{E I_{Hz}} \frac{\partial Mf_{z_1}}{\partial R_3} dx_1 + \int_B^C \frac{Mf_{z_2}}{E I_{Hz}} \frac{\partial Mf_{z_2}}{\partial R_3} dx_2$$

$$0 = \int_A^B \left(-F (l - x_1) + R_3 (2l - x_1) \right) (2l - x_1) \, dx_1$$

$$+ \int_B^C R_3 (2l - x_2)(2l - x_2) \, dx_2$$

$$F \int_0^l (l-x_1)(2l-x_1)\, dx_1 = R_3 \left[\int_0^l (2l-x_1)^2 dx_1 + \int_l^{2l} (2l-x_2)^2 dx_2 \right]$$

$$R_3 = F \frac{\int_0^l (l-x_1)(2l-x_1)\, dx_1}{\int_0^{2l} (2l-x_2)^2\, dx_2} = F \frac{\frac{5}{6} l^3}{\frac{8}{3} l^3}$$

$$R_3 = F \frac{5}{6}\frac{3}{8} = \frac{5}{16} F$$

5) Quel est le déplacement vertical du point D milieu de AB ?

On utilise la formule de Bresse en allant de A vers D

$$\vec{U_D} = \vec{U_A} + \vec{\omega_A} \wedge \vec{AD} + \int_A^D \left(\frac{T_{y_1}}{GS_y} \vec{y} + \frac{M_{f_{3_1}}}{EI_{H_3}} \vec{3} \wedge \vec{H_1 D} \right) dx_1$$

L'encastrement en A donne $\vec{U_A} = 0$

$\vec{\omega_A} = 0$

$\frac{T_{y_1}}{GS_y} \vec{y}$ négligeable / $\frac{M_{f_{3_1}}}{EI_{H_3}} \vec{3} \wedge \vec{H_1 D}$

$\int^D$

$$\vec{v_D} \cdot \vec{j} = \frac{1}{EI_{H_3}} \int_A^D \left[-F(l - x_1) + \frac{5}{16} F(2l - x_1) \right] \left[x_D - x_1 \right] dx_1$$

$$\vec{v_D} \cdot \vec{j} = \frac{F}{EI_{H_3}} \int_0^{x_D} \left[\frac{5(2l - x_1)}{16} - (l - x_1) \right] (x_D - x_1) \, dx_1$$

$$\vec{v_D} \cdot \vec{j} = \frac{F}{EI_{H_3}} x_D^3 \left[\frac{11}{96} - \frac{3}{16} \frac{l}{x_D} \right]$$

$$= \frac{F}{EI_{H_3}} \frac{l^3}{8} \left[\frac{11}{96} - \frac{3}{16} 2 \right]$$

$$\vec{v_D} \cdot \vec{j} = \frac{F}{EI_{H_3}} l^3 \left[- \frac{25}{768} \right]$$