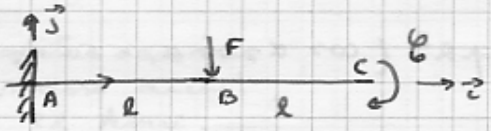
exercice 1



Soit la même poutre que celle de l'exercice 1 du Td4. Elle est de section rectangulaire (b dans la direction $\vec{i}$, h dans la direction $\vec{j}$), de module de Young E.

1) Calculez le déplacement du point C dans la direction $\vec{j}$

Nous avions pour H_1 / $\overrightarrow{AH_1} = x_1 \vec{i}$ $\begin{cases} N_1 = 0 \\ T_{y1} = -F \\ M_{fz1} = -\mathcal{C} - F(\ell - x_1) \end{cases}$

Nous avions pour H_2 / $\overrightarrow{AH_2} = x_2 \vec{i}$ $\begin{cases} N_2 = 0 \\ T_{y2} = 0 \\ M_{fz2} = -\mathcal{C} \end{cases}$

$$\vec{U_C} = \vec{U_A} + \vec{\omega_A} \wedge \vec{AC} + \int_A^B \frac{T_{y1}}{G S_y} \vec{j}\, dx_1 + \int_B^C \frac{T_{y2}}{G S_y} \vec{j}\, dx_2$$

$$+ \int_A^B \frac{M_{f3}}{E I_{G_{3z}}} \vec{z} \wedge \vec{H_1C}\, dx_1 + \int_B^C \frac{M_{f3}}{E I_{G_{3z}}} \vec{z} \wedge \vec{H_2C}\, dx_2$$

la liaison encastrement implique que $\begin{cases} \vec{U_A} = 0 \\ \vec{\omega_A} = 0 \end{cases}$

$T_{y2} = 0$

$\int_A^B \frac{T_{y1}}{G S_y} \vec{j}\, dx_1$ est négligeable devant $\int_A^B \frac{M_{f3}}{E I_{G_z}} \vec{z} \wedge \vec{HC_1}\, dx_1$

donc $$\vec{U_C} = \int_A^B \frac{-\mathcal{C} - F(l - x_1)}{E I_{H_z}} \vec{z} \wedge (2l - x_1) \vec{i}\, dx_1$$

$$+ \int_B^C \frac{-\mathcal{C}}{E I_{H_z}} \vec{z} \wedge (2l - x_2) \vec{i}\, dx_2$$

$$\vec{U_C} \cdot \vec{j} = \frac{1}{EI} \int_0^l \left[-\mathcal{C} - F(l - x_1)\right]\left[2l - x_1\right] dx_1$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_l^{2l} \left[-\mathcal{C}\right]\left[2l - x_2\right] dx_2$$

$$\vec{U_C} \cdot \vec{j} = \frac{1}{EI}\left[\left[-\frac{5}{6} F l^3 - \frac{3}{2} \mathcal{C} l^2\right] + \left[-\frac{1}{2} \mathcal{C} l^2\right]\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{5}{6} F l^3 - 2 \mathcal{C} l^2\right]$$

2) Calculez la rotation du point C par la méthode energétique

Par définition $\dfrac{\partial W_{int}}{\partial \mathcal{C}} = \overrightarrow{\omega_C} \cdot \dfrac{\vec{\mathcal{C}}}{\|\vec{\mathcal{C}}\|}$

$$W_{int} = \frac{1}{2}\left[\int_A^B \left(\underbrace{\frac{T_{y_1}^2}{G S_y}}_{\text{négligeable}} + \frac{M_{f_{31}}^2}{E I_{G_3}} \right) dx_1 + \int_B^C \frac{M_{f_{32}}^2}{E I_{G_3}} dx_2 \right]$$

$$\frac{\partial W_{int}}{\partial \mathcal{C}} = \int_A^B \frac{M_{f_{31}}}{E I_{G_3}} \frac{\partial M_{f_{31}}}{\partial \mathcal{C}} dx_1 + \int_B^C \frac{M_{f_{32}}}{E I_{G_3}} \frac{\partial M_{f_{32}}}{\partial \mathcal{C}} dx_2$$

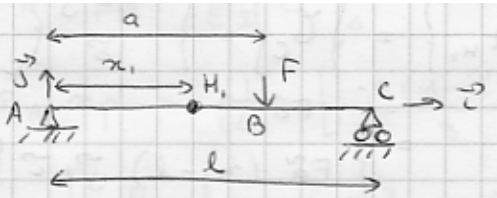
Or $\dfrac{\partial M_{f_{31}}}{\partial \mathcal{C}} = -1$ et $\dfrac{\partial M_{f_{32}}}{\partial \mathcal{C}} = -1$

$$\frac{\partial W_{int}}{\partial \mathcal{C}} = \frac{1}{EI}\int_0^l \left[-\mathcal{C} - F(l - x_1)\right](-1)\, dx_1 + \frac{1}{EI}\int_l^{2l} \left[-\mathcal{C}\right](-1)\, dx_2$$

$$\overrightarrow{\omega_C} \cdot (-\vec{k}) = \frac{1}{EI}\left[\mathcal{C} l + \frac{1}{2} F l^2\right] + \frac{1}{EI}\mathcal{C} l$$

$$\overrightarrow{\omega_C} \cdot \vec{k} = \frac{1}{EI}\left(-2\mathcal{C} l - \frac{1}{2} F l^2\right)$$

Exercice 2



1) Quel est le déplacement d'un point de la fibre moyenne dans la direction $\vec{j}$, tel que $\overrightarrow{AP} = x_p \vec{i}$

Il nous faut utiliser les formules de Bresse

Il nous faut les torseurs des efforts intérieurs

Il nous faut les réactions aux liaisons.

bilan des actions

liaison appui simple en A $\{\mathcal{T}_A\} = \begin{Bmatrix} R_1\vec{i} + R_2\vec{j} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$

liaison appui sur rouleau de normale $c\vec{j}$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{Bmatrix} R_3\vec{j} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

chargement $\{\mathcal{T}_B\} = \begin{Bmatrix} -F\vec{j} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$

L'équilibre donne $\Sigma\{\mathcal{T}\} = \{\mathcal{T}_A\} + \{\mathcal{T}_B\} + \{\mathcal{T}_C\} = \{0\}$

Soit le système

$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 + R_3 - F = 0 \\ R_3 l - F a = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = F(1-\tilde{a}) \\ R_3 = F\frac{a}{l} = F\tilde{a} \end{cases}$$

- torseur des efforts intérieurs

On oriente la poutre de A vers C

* Soit H_1 / $\overrightarrow{AH_1} = x_1 \vec{i}$

$$\left\{\mathcal{T}_{\text{eff int}\,H_1}\right\} = -\left\{\mathcal{T}_A\right\} = \left\{\begin{matrix} -F(1-\tilde{a})\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A$$

$$= \left\{\begin{matrix} F(\tilde{a}-1)\vec{j} \\ F(\tilde{a}-1)\vec{j} \wedge \overrightarrow{AH_1} \end{matrix}\right\}_{H_1} = \left\{\begin{matrix} F(\tilde{a}-1)\vec{j} \\ -F(\tilde{a}-1)(x_1)\vec{k} \end{matrix}\right\}_{H_1}$$

le repère local $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ correspond au repère global $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donc

$$\begin{cases} N_1 = 0 \\ T_{y_1} = F(\tilde{a}-1) \\ \mathcal{M}_{z_1} = F(1-\tilde{a})x_1 \end{cases}$$

* Soit H_2 / $\overrightarrow{AH_2} = x_2 \vec{i}$

$$\left\{\mathcal{T}_{\text{eff int}\,H_2}\right\} = \left\{\mathcal{T}_C\right\} = \left\{\begin{matrix} F\tilde{a}\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C = \left\{\begin{matrix} F\tilde{a}\vec{j} \\ F\tilde{a}\vec{j} \wedge \overrightarrow{CH_2} \end{matrix}\right\}_{H_2}$$

$$= \left\{\begin{matrix} F\tilde{a}\vec{j} \\ F\tilde{a}(x_2 - l)\vec{j} \wedge \vec{i} \end{matrix}\right\}_{H_2} = \left\{\begin{matrix} F\tilde{a}\vec{j} \\ F\tilde{a}(l-x_2)\vec{k} \end{matrix}\right\}_{H_2}$$

le repère local $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ correspond au repère global $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donc

$$\begin{cases} N_2 = 0 \\ T_{y_2} = F\tilde{a} \\ \mathcal{M}_{z_2} = F\tilde{a}(l - x_2) \end{cases}$$

- Déplacement d'un point P / $\overrightarrow{AP} = x_P \vec{i}$

les deux données qui positionnent la poutre dans l'espace sont $\vec{v_A} = 0$ et $\vec{v_C} = 0$

l'équation de Brusse les liants :

$$\vec{v_C} = \vec{v_A} + \vec{\omega_A} \wedge \vec{AC} + \int_A^C \frac{M_{fz}}{EI} \vec{z} \wedge \vec{HC} \, dx$$

permet de calculer $\vec{\omega_A}$, que l'on peut ensuite utiliser dans le calcul de $\vec{v_P}$:

$$\vec{v_P} = \vec{\omega_A} \wedge \vec{AP} + \int_A^P \frac{M_{fz1}}{EI_{H_z}} \vec{z} \wedge \vec{H_1P} \, dx_1$$

avec $\vec{0} = \vec{0} + \vec{\omega_A} \wedge l\vec{i} + \frac{1}{EI}\int_0^a F(1-\tilde{a}) x_1 \vec{z} \wedge (l-x_1)\vec{i} \, dx_1$

$$+ \frac{1}{EI}\int_a^l F\tilde{a}(l-x_2) \vec{z} \wedge (l-x_2)\vec{i} \, dx_2$$

$$0 = \omega_A l \vec{j} + \frac{1}{EI}\vec{j}\int_0^a F(1-\tilde{a}) x_1 (l-x_1) \, dx_1$$

$$+ \frac{1}{EI}\vec{j}\int_a^l F\tilde{a}(l-x_2)^2 \, dx_2$$

$$-\omega_A l = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6l} Fa^2(-5al + 2a^2 + 3l^2)\right]$$

$$+ \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3l} Fa(l^3 - 3al^2 + 3la^2 - a^3)\right]$$

$$-\omega_A = \frac{Fal}{6EI}(\tilde{a}^2 - 3\tilde{a} + 2)$$

$$\vec{v_P} = \omega_A \vec{k} \wedge x_P \vec{i} + \frac{1}{EI}\int_0^{x_P} (-F(\tilde{a}-1)x_1) \vec{z} \wedge (x_P - x_1)\vec{i} \, dx_1$$

$$= \omega_A x_P \vec{j} + \frac{1}{EI}\vec{j}\int_0^{x_P} F(1-\tilde{a}) x_1 (x_P - x_1) \, dx_1$$

$$\vec{v_P} \cdot \vec{j} = \omega_A x_P + \frac{1}{EI}\left[\frac{F(1-\tilde{a})}{3} x_P^3\right]$$

$$\vec{v_P} \cdot \vec{j} = \frac{1}{EI}\left[\frac{Fal x_P}{6}\left[-\tilde{a}^2 + 3\tilde{a} - 2\right] + \frac{F(1-\tilde{a}) x_P^3}{3}\right]$$