Exo 1 : Inertie - Huyghens, Equilibrage

1°/ Matrice d'inertie des pièces 1, 2, 4 en leurs centres d'inertie respectifs G1, G2, G4.

ⓐ I_{G1} : $I_{zz_{G1}} = \int_V (x^2+y^2)\, dm$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z \end{cases}$$

$$I_{zz_{G1}} = \iiint \rho r^2 r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \iiint \rho r^3\, dr\, d\theta\, dz = \rho \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} dz$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi h \Rightarrow \boxed{I_{zz} = M\frac{R^2}{2}}$$

$$I_{xx} + I_{yy} = \iiint (x^2+z^2)\, dm + \iiint (y^2+z^2)\, dm$$

$$2I_{yy} = 2I_{xx} = I_{zz} + 2\iiint z^2\, dm$$

$$\Rightarrow \iiint z^2\, dm = \iiint \rho z^2 r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \rho \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} z^2\, dz$$

$$= \rho \frac{R^2}{2} 2\pi \left.\frac{z^3}{3}\right|_{-h/2}^{h/2} = \rho R^2 \pi \frac{2h^3}{24} = \frac{Mh^2}{12}$$

D'où : $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} + M\frac{h^2}{6} = \frac{MR^2}{2} + \frac{Mh^2}{6}$

(b) I_{G_2} : $I_{11} = \iiint (y^2+z^2)\, dm$

$$= \int_{-z/2}^{z/2}\int_{-y/2}^{y/2}\int_{-x/2}^{x/2} (y^2+z^2)\,\rho\, dx\, dy\, dz$$

$I_{11} = \rho\, \frac{x}{3}\left(\frac{y^3}{4} + \frac{z^4}{4}\right)$ sachant que $M = \rho xyz \Rightarrow I_{11} = \frac{M}{12}(y^2+z^2$

$$\Rightarrow I_{G_2} = \frac{M}{12}\begin{bmatrix} y^2+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

(2) Thm d'Huyghens :

$I_G = I_{G_2} + I_{(G,\ \text{masse } (2) \text{ placée en } G)}$;

$$I_G = I_{G_2} + M\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ba & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

(a, b, c) sont les coordonnées de G_2/G et

$$I_G = I_{G_1} + M\begin{bmatrix} \alpha^2+\gamma^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\beta\alpha & \alpha^2+\gamma^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & \alpha^2+\beta^2 \end{bmatrix}$$

(3) Equilibrage statique :

$M\,\overrightarrow{OG_E} = m\,\overrightarrow{OG} + m_1\,\overrightarrow{OG_1} + m_2\,\overrightarrow{OG_2}$

$\overrightarrow{OG_E}$ est placé sur l'axe de rotation.

$$\begin{cases} m x_g + m_1 E_1 - m_2 E_1 = 0 \\ m y_g = 0 \end{cases} \quad x_g = \left(\frac{m_2 - m_1}{m}\right) E_1$$