1) • Pour un cylindre

$$\bar{\bar{I}}_{S/R} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\otimes(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

avec $C = \int_S (x^2+y^2)\,dm$

$$= \iiint_S \rho\, r^2\, r\,dr\,d\theta\,dz = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \int_0^R r^3\,dr$$

$$= \frac{2\pi\,\ell\,\rho\,R^4}{4} = \pi R^2 \ell \rho\, \frac{R^2}{2} = \frac{m\,R^2}{2}$$

$$A = \int_S (x^2+z^2)\,dm = \int_S (y^2+z^2)\,dm$$

$$2A = \int_S (x^2+y^2+2z^2)\,dm = \int_S (x^2+y^2)\,dm + 2\int_S z^2\,dm$$

$$2A = C + 2\rho \iiint z^2\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

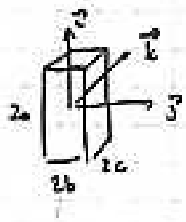
$$A = \frac{C}{2} + \rho\, 2\pi \frac{R^2}{2}\frac{2\ell^3}{3\,8} = \frac{C}{2} + \rho \frac{\pi R^2 \ell^3}{3.4} = \frac{C}{2} + m\frac{\ell^2}{12}$$

$$I(G_1,S) = \begin{bmatrix} \frac{m_1 R^2}{4} + m_1\frac{\ell^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 R^2}{4} + m_1\frac{\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 R^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00028 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00028 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00024 \end{bmatrix}$$

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\otimes(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ kg m²

$(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)\otimes(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$

• Pour un parallélépipède



$$I_{G\vec{k}} = \int (x_1^2 + x_2^2)\,dm = \frac{m_1}{3}\left[a^2+b^2\right]$$

Par permutation circulaire

$$I_{G\vec{i}} = \frac{m_1}{3}\left[b^2+c^2\right]$$

$$I_{G\vec{j}} = \frac{m_1}{3}\left[c^2+a^2\right]$$

$$I(G_2,S_2) = \begin{bmatrix} 1,33 & 0 & 0 \\ 0 & 6,66 & 0 \\ 0 & 0 & 7,73 \end{bmatrix} 10^{-3}\ \text{kg m}^2$$

$G_2\ (\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)\otimes(\vec{x}_1,\vec{x}_2\ \vec{x}_3)$

$$I(G_4,S_4) = \begin{bmatrix} 0,021 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0256 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0272 \end{bmatrix}\ \text{kg m}^2$$

$G_4\ (\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)\otimes(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$

2) • $\overline{\overline{I}}(S_1, G) = \overline{\overline{I}}(S_1, G_1) + \overline{\overline{I}}(m_1(G_1), G)$

$\overline{\overline{I}}(m_1(G_1), G)$ = tenseur d'inertie d'une masse ponctuelle en G_1 de masse m_1

$$I_{G x_1 x_1} = \iiint (x_2^2 + x_3^2)\, dm$$

$$= \left[(\overrightarrow{G_1G} \cdot \vec{x_2})^2 + (\overrightarrow{G_1G} \cdot \vec{x_3})^2 \right] \iiint dm$$

$$= m_1 \left(0 + \left(\frac{0{,}025}{2} + 0{,}025 + 0{,}05 + \frac{0{,}025}{2} \right)^2 \right)$$

$$I_{G x_2 x_2} = m_1$$

$$I_{G x_3 x_3} = m_1 \, (0 + 0) = 0$$

$$I_{G x_1 x_2} = -\iiint x_1 x_2 \, dm = (\overrightarrow{G_1G} \cdot \vec{x_1})(\overrightarrow{G_1G} \cdot \vec{x_2})\, m_1$$

$$= 0$$

idem pour les autres, donc :

$$\overline{\overline{I}}_{S_1/G} = \begin{bmatrix} 0{,}00937 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}00937 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}00025 \end{bmatrix}_{G\,(\vec{x_1}\vec{x_2}\vec{x_3}) \otimes (\vec{x_1}\vec{x_2}\vec{x_3})} \text{kg m}^2$$

• Pour le solide S_2

$$\overline{\overline{I}}_{S_2/G} = \begin{bmatrix} 0{,}00133 + m_2\left(0^2 + \left(\frac{0{,}025}{2} + 0{,}05 + \frac{0{,}025}{2}\right)^2\right) & 0 & \\ 0 & 0{,}00666 + m_2 (\quad) & 0 \\ & 0 & 0{,}00773 + m_2\left(\left(\frac{0{,}10}{2}\right)^2\right) \end{bmatrix}_{G\,(\vec{x_1}\vec{x_2}\vec{x_3}) \otimes (\vec{x_1}\vec{x_2}\vec{x_3})}$$

$$-m_1 \left(\frac{0{,}10}{2} \right) \left(\frac{0{,}025}{2} + 0{,}05 + \frac{0{,}025}{2} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}00133 + 2{,}559 \cdot 0{,}005625 & 0 & -2{,}559 \cdot 0{,}00375 \\ 0 & 0{,}00666 + 2{,}559 \cdot 8{,}125 & 0 \\ -2{,}559 \cdot 0{,}00375 & 0 & 0{,}00773 + 2{,}559 \cdot 0{,}0025 \end{bmatrix}_{G\,(\vec{x_1}\vec{x_2}\vec{x_3}) \otimes (\vec{x_1}\vec{x_2}\vec{x_3})}$$

$$\overline{\overline{I}}_{S_2/G} = \begin{bmatrix} 1.57 & 0 & -0,959 \\ 0 & 2,745 & 0 \\ -0,959 & 0 & 1,413 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3) \otimes (\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3)} 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

3) On doit rendre le repère $\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3$ principal d'inertie : il ne devra comporter que des termes sur la diagonale

$$I(G,V) = \begin{bmatrix} 0,0562 & 0 & -0,0249 \\ 0 & 0,1184 & 0 \\ -0,0249 & 0 & 0,0717 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3) \otimes (\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3)} +$$

$$+ m_1 \begin{bmatrix} E_3^2 & 0 & E_1 E_3 \\ 0 & E_1^2 + E_3^2 & 0 \\ E_1 E_3 & 0 & E_1^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3) \otimes (\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3)}$$

$$+ m_2 \begin{bmatrix} E_3^2 & 0 & E_1 E_3 \\ & E_1^2 + E_3^2 & \\ E_1 E_3 & 0 & E_1^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3) \otimes (\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3)}$$

Il faut donc que :

$$-0,0249 + (m_1 + m_2)\, E_1 E_3 = 0$$

Par symétrie on choisira $m_1 = m_2$

d'où $m = \dfrac{0,0249}{2\, E_1 E_2} = \dfrac{0,0249}{2 \cdot 0,1 \cdot 0,075} = 1,66$ kg

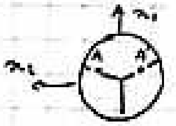
L'hypothèse de masse ponctuelle est abusive.

Exercice 2

• équilibrage statique : le centre de gravité des rayons doit se situer sur l'axe de rotation. C'est le cas de "Flat" et "Wind", mais pas de "Sword". La jante "Sword" est donc à éviter

• équilibrage dynamique : l'axe de rotation doit être un axe principal d'inertie. les termes hors diagonale doivent être nuls

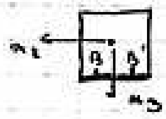
$$I_{x_1x_2} = -\int x_1 x_2 \, dm$$



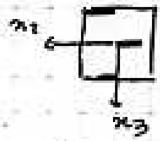
"Flat" ou "Wind"

Pour tout pt A, $\exists$ A' $\Rightarrow$ $I_{x_1x_2} = 0$ pour les 2 modèles

$$I_{x_2x_3} = -\int x_2 x_3 \, dm$$



"Flat"



"Wind"

"Flat" pour tout pt B $\exists$ B'
$I_{x_2x_3} = 0$

"Wind" $I_{x_2x_3} \neq 0 \Rightarrow$ déséquilibrée.