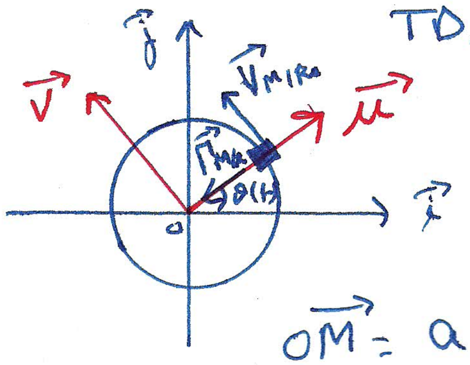
Exo1 : Mouvement de rotat°

TD n° 2



1°/ $\vec V(M/R_0)$ et $\vec\Gamma(M/R_0) = f\left(\begin{matrix}\theta(t)\\ \dot\theta(t)\\ \ddot\theta(t)\end{matrix}\right)$?

$\vec{OM} = a\,\vec u$

$R(O, \vec u, \vec v, \vec k)$

$R_0(O, \vec i, \vec j, \vec k)$

$$\vec V(M/R_0) = \frac{d}{dt}(\vec{OM})_{/R_0}$$

$$\left(\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right)_{R_0} = \frac{d\,\vec{OM}}{dt}\Big/_{R} + \vec\Omega_{R/R_0} \wedge \vec{OM}$$

$$\boxed{\vec V_{M/R_0} = \dot\theta\,\vec k \wedge a\,\vec u = a\,\dot\theta\,\vec v}$$

$$\vec\Gamma_{M/R_0} = \left[\frac{d}{dt}\vec V_{M/R_0}\right] = \frac{d}{dt}(a\dot\theta\vec v)$$

$$= a\ddot\theta\,\vec v + \cancel{\dot a}^{\,0}\,\dot\theta\,\vec v + a\dot\theta\,\frac{d\vec v}{dt}\Big/_{R_0}$$

$$= a\ddot\theta\,\vec v + a\dot\theta\left[\cancel{\left[\frac{d\vec v}{dt}\right]_R}^{\,0} + \dot\theta\,\vec k \wedge \vec v\right]$$

$$= a\ddot\theta\,\vec v + a\dot\theta^2(-\vec u) \Rightarrow \boxed{a\ddot\theta\,\vec v - a\dot\theta^2\,\vec u = \vec\Gamma_{M/R_0}}$$

2°/ Mvt de rotation uniforme $\Rightarrow \vec\Gamma_{M/R_0} = -a\dot\theta^2\,\vec u$

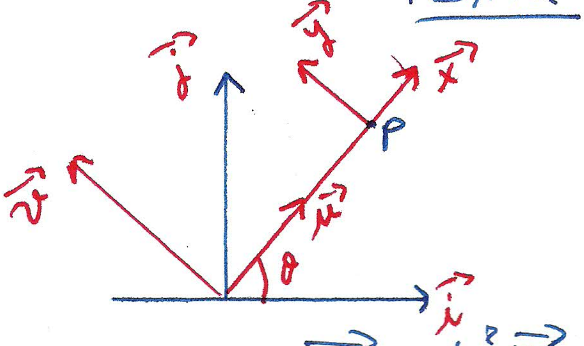
3°/ $\begin{cases} g = 9{,}81\ m/s^2 \\ 2a = 20\,m \end{cases}$; $\dot\theta = \sqrt{\frac{\Gamma_{M/R_0}}{a}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{10}} \simeq 1$ rad/s

EXO 2

$R_0(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: fixe

$R(O,\vec{u},\vec{v},\vec{k})$, mobile$/R_0$: $\theta = \omega t$

$R_1(P,\vec{x},\vec{y},\vec{k})$ mobile en translat° $/R_0$



$\vec{OP} = at^2\vec{u}$

1°/ $\vec{V}(P/R_0) = ?$

$$\left[\frac{d(\vec{OP})}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{OP}}{dt}\right]_R + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{OP}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(at^2\vec{u}\right)_R + \omega\vec{k} \wedge at^2\vec{u}$$

$$= 2at\vec{u} + at\cancel{\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_R}^{\,0} + a\omega t^2\vec{v}$$

$$\vec{V}_{P/R_0} = 2at\vec{u} + a\omega t^2\vec{v}$$

2°/ $\vec{\Gamma}(P/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_{R/R_0} = \frac{d}{dt}\left[2at\vec{u} + a\omega t^2\vec{v}\right]$

$$= 2a\vec{u} + 2at\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} + 2a\omega t\vec{v} + a\omega t^2\frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_{R_0}$$

$$= 2a\vec{u} + 2a\omega t\vec{v} + 2at\left[\cancel{\frac{d\vec{u}}{dt}}_{/R} + \omega\vec{k}\wedge\vec{u}\right] + 2a\omega t^2\left[\cancel{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{/R} + \omega\vec{k}\wedge\vec{v}\right]$$

$$= 2a\vec{u} + 2a\omega t\vec{v} + 2at\omega\vec{v} + 2a\omega^2t^2\vec{u}$$

$$\vec{\Gamma}(P/R_0) = \vec{u}\left(2a - 2a\omega^2t^2\right) + \underbrace{4at\omega\vec{v}}_{\text{coriolis}}$$

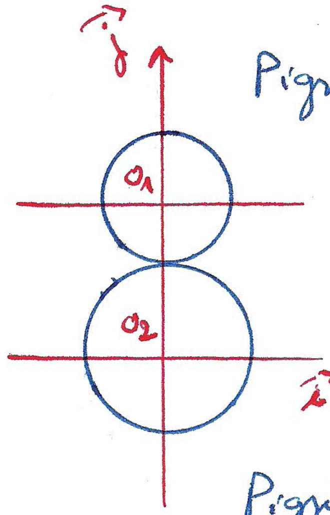
EXO3 : Vitesses Relative entre solides

$\omega_{1/0}$: Vitesse de rotat° pignon 1

$\omega_{2/0}$: " " " 2

dp_1 : diamètre (dit primitif) du pignon 1

dp_2 : " " du pignon 2



Rappel : un engrenage est composé d'un pignon et d'une roue.

Pignon : nom donné à une seule roue ou à la roue la plus petite
Quand il y a plus de deux roues on parle alors d'un "train d'engrenage"

On définit le rapport de transmission comme étant :

$$R = \frac{\text{Vitesse Sortie}}{\text{Vitesse Entrée}} = \frac{\text{Nbre de dents de l'entrée (Menant)}}{\text{Nbre de dents de sortie (Mené)}}$$

$R > 1 \Rightarrow$ Multiplicateur.

$R < 1 \Rightarrow$ Réducteur

La relat° circonférence/pas est définie comme :

$$\frac{\pi D_2}{Z_2} = \frac{\pi D_1}{Z_1} \Rightarrow \frac{D_2}{Z_2} = \frac{D_1}{Z_1}$$

où D : diamètre
Z : nbre de dents
P : pas de denture

fin Rappel

EXO3 (Suite) TD°2

Au point de contact entre les deux pignons:

$\Rightarrow$ Nous avons la même vitesse linéaire mais pas la même vitesse angulaire.

$$V = \omega \frac{D}{2} \Rightarrow D = \frac{2V}{\omega}$$

D'où $\dfrac{2V}{Z_2 \omega_2} = \dfrac{2V}{Z_1 \omega_1} \Rightarrow \boxed{\omega_1 Z_1 = \omega_2 Z_2}$

- Pas de glissement $\Rightarrow$ Même vitesse linéaire

$$\vec{V}(I_1/R_0) = \vec{V}(I_2/R_0)$$

$$\omega_1 \vec{k} \wedge \overrightarrow{OI_1} = \omega_2 \vec{k} \wedge \overrightarrow{OI_2}$$

$$\omega_1 \vec{k} \wedge (-dp_1 \vec{j}) = \omega_2 \vec{k} \wedge (dp_2 \vec{j})$$

$$-\omega_1 dp_1 (-\vec{i}) = \omega_2 dp_2 (-\vec{i})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{dp_2}{dp_1}}$$