

# Chapitre 1

## Examens des années précédentes

### 1.1 Gestion des aléas : janvier 2015

Soit une grandeur  $z = \frac{d^2+ri}{p}$  avec  $d$  une longueur qui a été mesurée sur 7 pièces et dont les valeurs en m sont 34, 32, 35, 29, 34, 30 et 31,  $r = 892$  cm une épaisseur, et  $i = 2.1$  m une profondeur.

La grandeur  $p$  est la pente liant deux grandeurs  $a$  et  $b$  si l'on admet un modèle  $b = pa + c$  avec les mesures  $(a, b)$  en (m,kg) suivantes : (1.1,8.2), (3.2,11.0), (5.1,12.9), (3.8,12.1), (7.1,12.8) et (6.4,15.4). Les incertitudes sur  $a$  et  $b$  sont connues :  $\Delta a = 0.2$  m et  $\Delta b = 0.7$  kg.

Sachant que la littérature donne une valeur de  $z = 3.2$  m<sup>3</sup>/kg,

— donnez la valeur moyenne expérimentale de  $z$  avec son incertitude avec un taux de confiance de 95%.

— la valeur de  $z$  de la littérature est-elle conforme à la valeur de  $z$  expérimentale ?

Si vous utilisez un seuil de signification, vous considèrerez que  $\alpha = 0.05$ .

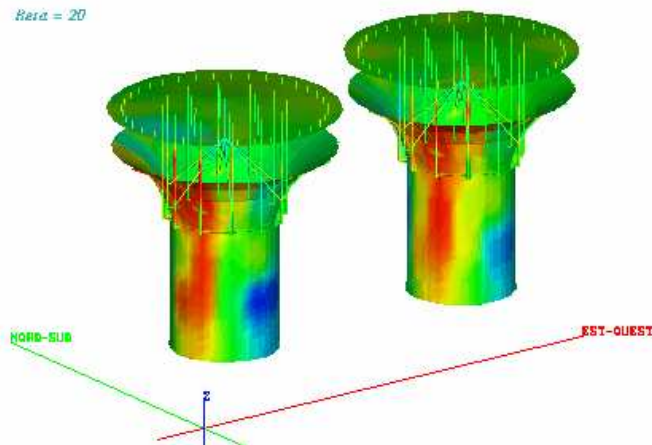


FIGURE 1.1 – Exemple de répartition des pressions sur une cheminée placée dans un écoulement.

## 1.2 Juin 2009 : Tout vient à point, pour qui sait attendre.

Les recherches en aéroélasticité sont orientées vers le couplage aéroélastique, c'est à dire vers l'étude du comportement des structures dont les mouvements au sein de l'écoulement génèrent des efforts induits. Les domaines concernés sont notamment le génie civil (ponts souples, cheminées), les transports (aéronautique, terrestre) et le secteur de l'énergie (tubes d'échangeurs, éoliennes). Une des méthodes repose sur l'hypothèse de faible fréquence réduite, permettant d'utiliser des coefficients aérodynamiques moyens résultant de mesures stationnaires en soufflerie. Le couplage aéroélastique se produisant principalement dans le domaine basse fréquence, les coefficients mesurés sont ensuite introduits dans un code de calcul de structures qui résout le problème dynamique par synthèse modale. Différentes modélisations des efforts aéroélastiques ont été développées afin de rendre compte des différents mouvements possibles de la structure, ainsi que des composantes instationnaires des efforts qui pilotent les échanges d'énergie entre l'écoulement et la structure. Le calcul de certaines quantités linéaires comme l'amortissement aéroélastique permet de détecter facilement les risques d'instabilités aéroélastiques et les vitesses critiques de l'écoulement. Par contre, la prédiction des amplitudes vibratoires effectives nécessite des investigations non linéaires, pour lesquelles les méthodes numériques classiques de résolution sont généralement inadaptées.

Nous simplifierons le problème en considérant les chargement stationnaires dont la figure (1.1) ci-dessous donne un exemple de pressions pariétales.

1. mise en équation du problème d'une cheminée haubannée Une cheminée est modélisée par un cylindre plein encastré à sa base de section circulaire de rayon  $R$  de hauteur  $L$ . Le rapport  $L/R$  est de l'ordre de 5. Elle est haubannée par une poutre de rigidité longitudinale équivalente  $k$ . Cette cheminée est soumise à un vent  $V$  dont la vitesse est dépendante de l'altitude (voir figure 1.2).

Ecrivez les équations qui régissent le système, en précisant les hypothèses que vous faites.

- Faire l'inventaire des surfaces,
  - pour chaque surface précisez les conditions aux limites en déplacement ou en contraintes,
  - donnez la relation entre déplacement et déformation et ses lieux de validité,
  - donnez la relation entre déformation et contrainte et ses lieux de validité,
  - donnez la relation d'équilibre en contrainte et ses lieux de validité.
2. Faites le qcm sur UMTICE intitulé "examen juin 09".

## 1.3 Janvier 2009 : Ah, que la montagne est belle !

Création JM Génevaux, relecture et amélioration M Bentahar. Aucun document n'est autorisé. Calculatrice Ensim autorisée. Examen noté sur 22 points - 5 points en cas d'erreur d'homogénéité

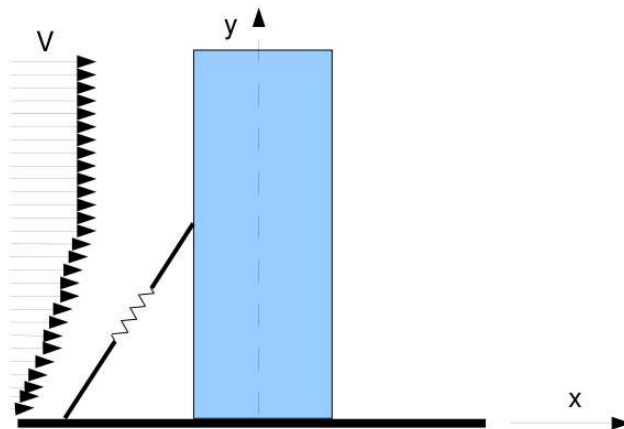


FIGURE 1.2 – Schématisation d'une cheminée placée dans un écoulement.



FIGURE 1.3 – Un remonte-pente.

détectée par le correcteur et non par l'étudiant, -2 points si l'écriture est non complète (manque de la base ou du point dans l'expression d'un torseur). Si vous obtenez 16 points /22, - 5 points d'homogénéité, cela fait 14 points, la note finale est combinée avec la moyenne de vos qcm de cours : si vous avez obtenu 6/10 aux qcm de cours, votre note finale est :  $14 \cdot 15 / 20 + 6 \cdot 5 / 10 = 13,5$ .

La structure d'un remonte pente (figure 1.3) est constituée principalement d'une poutre courbée en forme de "S", d'une structure "siège" et d'un tirant.

### 1.3.1 Structure sans tirant

Considérons dans un premier temps la structure formée uniquement de la poutre en "S" et du siège. Nous modéliserons ceci par (voir figure 1.4) :

- une poutre de ligne moyenne sous forme de deux arcs de cercle de rayon  $a$  reliant les points A, B, C et D, de section tubulaire creuse, de module d'Young  $E$ , de moment quadratique par rapport à une direction transverse  $I_{Hz}$ , d'aire de section droite  $S$ . La fibre moyenne ABC est un arc de centre  $O_1$ . La fibre moyenne CD est un arc de cercle de centre  $O_2$ .
- une poutre indéformable de ligne droite reliant les points D, E et G.

Le chargement sera une force connue  $F$  appliquée en E. La pesanteur est négligée. La liaison en A avec le câble est modélisée par un appui simple de normale  $\vec{A}\vec{j}$ .

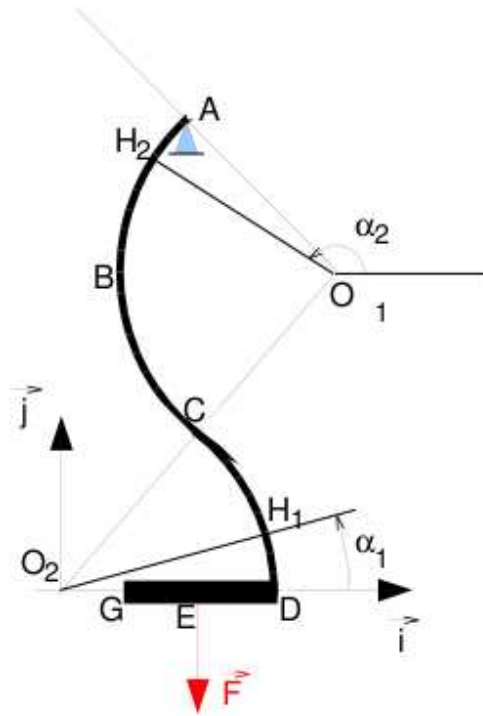


FIGURE 1.4 – Modèle 1 du remonte pente.

On donne les coordonnées des points dans une base directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  telle que  $\vec{j}$  soit opposé au sens de la pesanteur :  $O_2\vec{G} = \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{i}$ ,  $O_2\vec{E} = \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{i}$ ,  $O_2\vec{D} = a\vec{i}$ ,  $O_2\vec{H}_1 = a \cos \alpha_1 \vec{i} + a \sin \alpha_1 \vec{j}$ ,  $O_2\vec{C} = \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{j}$ ,  $O_2\vec{O}_1 = a\sqrt{2}\vec{i} + a\sqrt{2}\vec{j}$ ,  $O_1\vec{B} = -a\vec{i}$ ,  $O_1\vec{A} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{j}$ ,  $O_1\vec{H}_2 = a \cos \alpha_2 \vec{i} + a \sin \alpha_2 \vec{j}$ .

1. Après avoir tracé l'évolution du moment fléchissant le long de la poutre en "S", quelle est la section droite dans laquelle le moment fléchissant est maximal ?
2. Après avoir tracé l'évolution de l'effort normal le long de la poutre en "S", quelle est la section droite dans laquelle l'effort normal est maximal ?
3. En quel point la contrainte est maximale ?.

### 1.3.2 Structure avec tirant

Considérons dans un second temps la structure précédente à laquelle est ajoutée le tirant BG (voir figure 1.5).

Si l'on considère que ce tirant est articulé à ces deux extrémités B et G, ce tirant ne peut subir qu'un effort dans la direction BG. Notons  $N_3$  l'effort normal dans ce tirant à priori inconnu.

1. Quel est l'allongement de ce tirant sous cet effort normal  $N_3$  ?
2. Le système complet (poutre en "S", siège et tirant) est-il hyperstatique ?
3. Quelle-s est-sont la-les équation-s cinématique-s associée-s à chaque inconnue hyperstatique ?
4. Comment résoudre-riez-vous les équations précédentes ? (donnez la démarche, ne pas faire les calculs).

### 1.3.3 partie C : On rappelle,

- que l'examen est noté sur 20, mais une erreur d'homogénéité dans la copie implique de perdre au plus 2 points, et que une écriture incomplète de torseur implique aussi de perdre au plus 2 autres point.

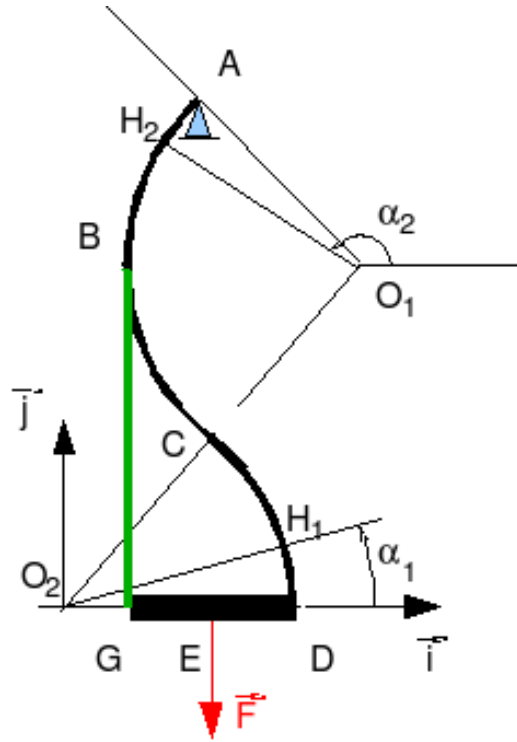


FIGURE 1.5 – Modèle 2 du remonte pente.

— que les formules de Bresse s'écrivent,

$$\begin{aligned} \{U_{Pfin}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_{Pfin} \\ \check{u}_{Pfin} \end{array} \right\}_{Pfin} & (1.1) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_{Pdeb} + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (M_x/GI_0^c \check{x} + M f_y/EI_{Hy} \check{y} + M f_z/EI_{Hz} \check{z}) ds \\ \check{u}_{Pdeb} + \check{\omega}_{Pdeb} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (N/ES \check{x} + T_y/GS_y \check{y} + T_z/GS_z \check{z}) ds \\ + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (M_x/GI_0^c \check{x} + M f_y/EI_{Hy} \check{y} + M f_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \end{array} \right\}_{Pfin} & (1.2) \end{aligned}$$

— que la relation entre contrainte à une distance  $\hat{y}$  de la fibre moyenne est donnée par,

$$\sigma_{xx}(\hat{y}) = \frac{N}{S} - \frac{M_{fz}(s)\hat{y}}{I_{Hz}}. \quad (1.3)$$

## 1.4 Mars 2008 : Mise en équation d'un problème et contraintes induites par un champ de température

Les deux parties 1.4.1 et 1.4.2 sont indépendantes. Tous les documents personnels sont autorisés (polycopiés, notes de cours personnelles, notes de td...)

### 1.4.1 Mise en équation d'un problème

On considère l'effaçage d'un tableau avec une brosse constituée de deux matériaux : un bloc de feutre et un support bois (voir figure (1.6)). Donner l'ensemble des équations qui régissent le problème. Ne pas le résoudre. On supposera que la main agit sur la surface supérieure en bois de la brosse.

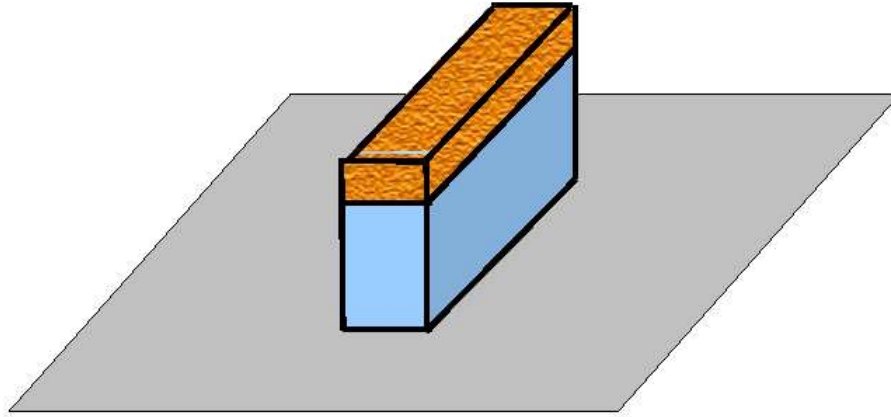


FIGURE 1.6 – Une brosse effaçant un tableau.

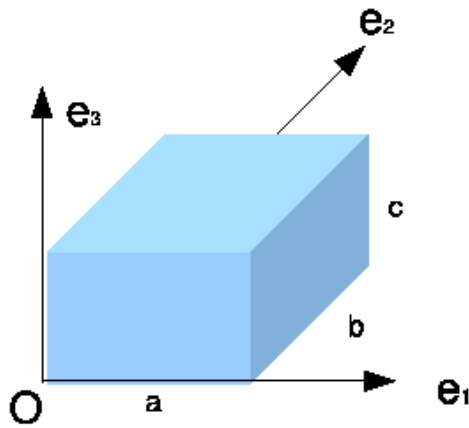


FIGURE 1.7 – Un parallélépipède soumis à un champ de température.

### 1.4.2 Contraintes induites par la température

Un parallélépipède rectangle de dimensions  $(a,b,c)$  (voir figure 1.7) est soumis à un champ de température tel que en tout point P tel que  $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ , une élévation de température  $t$  est donnée par  $t(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ . On souhaite calculer les contraintes internes, si elles existent, dues à cette élévation de température. On considèrera donc qu'aucune action n'est exercée par contact sur ses surfaces extérieures, que la pesanteur est négligée et que aucune condition aux limites en déplacement n'est appliquée sur les surfaces extérieures.

- Les équations suivantes sont données. Précisez pour chacune d'elle en quels points P elles sont valables, leur signification physique et les significations physiques des termes qui composent chacune d'elle.
  - $\vec{T}(P, \vec{e}_1) = \vec{0}$
  - $\bar{\epsilon} = \left( \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\bar{\sigma}) \bar{I}_d \right) + \alpha t \bar{I}_d$ ,
  - $\vec{T}(P, \vec{e}_2) = \vec{0}$
  - $\text{div} \bar{\sigma} = \vec{0}$
  - $\bar{\epsilon} = 1/2 \left( \text{grad} \bar{u} + {}^T \text{grad} \bar{u} \right)$
  - $\vec{T}(P, \vec{e}_3) = \vec{0}$
- En fonction des valeurs des paramètres  $a_0, a_1, a_2$  et  $a_3$  supposés connus, le champ de température implique-t-il des contraintes dans le parallélépipède? Vous écrirez la nullité du

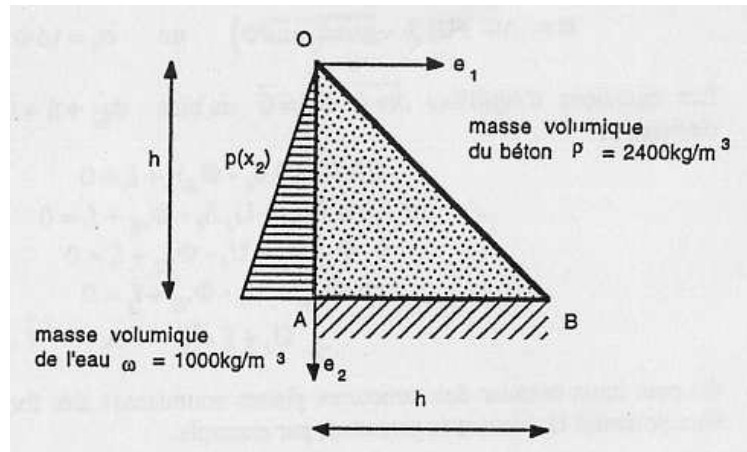


FIGURE 1.8 – Barrage poids.

tenseur des contraintes en tout point, en déduisez l'expression du tenseur des déformations, et utilisez les équations de compatibilité.

3. Vous donnerez un exemple de champ de déplacement possible. Comment les autres champ de déplacement admissibles peuvent-ils être déduits ?

## 1.5 Février 2008 : comparaison de solution msd et rdm

Nous souhaitons comparer dans le cas d'un barrage poids, la solution de mécanique des solides déformables à la solution de théorie des poutres afin de quantifier les écarts entre modèles. Tous les documents sont autorisés pour cet examen.

Soit le barrage poids tel que décrit figure 1.8. Le chargement, supposé connu, est donné par la pression de l'eau et le poids propre du barrage. Le barrage est encastré à sa base. Le problème est considéré en déformations planes. On donne  $E = 15000 \text{ N/mm}^2$  le module de Young,  $\nu = 0.25$  le coefficient de Poisson,  $h = 50 \text{ m}$  la hauteur du barrage,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  l'accélération de la pesanteur.

### 1.5.1 Barrage poids : solution en mécanique des solides déformables

1. Donnez la condition aux limites en un point  $M_1$  appartenant au segment  $[OA]$ , tel que  $O\vec{M}_1 = x_{2m1}\vec{e}_2$ .
2. Donnez la condition aux limites en un point  $M_2$  appartenant au segment  $[OB]$ , tel que  $O\vec{M}_2 = x_{m2}\vec{e}_1 + x_{m2}\vec{e}_2$ .
3. Donnez la condition aux limites en un point  $M_3$  appartenant au segment  $[AB]$ , tel que  $O\vec{M}_3 = x_{1m3}\vec{e}_1 + h\vec{e}_2$ .
4. La résolution du problème par les fonctions d'Airy fournit un tenseur des contraintes en tout point  $M$  de coordonnées  $(x_1, x_2)$  telles que  $O\vec{M} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$  exprimé sous la forme suivante :  $\bar{\sigma} = -\omega g x_2 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 - \omega g x_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 - \omega g x_1 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + ((\rho - 2\omega)g x_1 - (\rho - \omega)g x_2) \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + (\nu(\rho - 2\omega)g x_1 - \nu \rho g x_2) \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$ . Tracez le cercle de Mohr des contraintes au point  $M_1$ , en précisant les valeurs des contraintes et directions principales.
5. Le déplacement du point  $O$ , sommet du barrage, est (en mm)  $\vec{u} = 1.9\vec{e}_1 + 0.8\vec{e}_2$ . Quel est l'état de contrainte en ce point ?

### 1.5.2 Barrage poids : solution en théorie des poutres

Malgré sa forme peu élancée, le barrage est modélisé par sa fibre moyenne reliant le point  $D$  milieu de  $[AB]$  au point  $O$ .

1. Dessinez la structure, son chargement, ses conditions aux limites.

2. Donnez les torseurs de chargement de celle-ci.
3. Calculez le torseur des efforts intérieurs en un point  $H$  tel que  $D\vec{H} = -t/2\vec{e}_1 - t\vec{e}_2$ .
4. Calculez le vecteur de translation du point  $O$  (l'angle de rotation n'est pas à calculer).  
Exprimez votre réponse dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$
5. Calculez l'état de contrainte au point  $M_1$ .

### 1.5.3 Barrage poids : comparaison des solutions

1. Comparez les valeurs de contraintes des deux modèles au point  $M_1$ . Commentez.
2. Comparez les valeurs des déplacements des deux modèles au point  $O$ . Commentez.



## 1.6 Décembre 2007 : Et si mon père avait raison...

### 1.6.1 partie A : Portique en U

Soit le problème plan, dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ , formé par une poutre constituée de trois segments de droite  $AB$ ,  $BC$  et  $CD$ , tel que  $\vec{AB} = l(\vec{i} + \vec{j})$ ,  $\vec{BC} = l(\vec{i} - \vec{j})$  et  $\vec{CD} = l(-\vec{i} - \vec{j})$ . Cette structure est liée au référentiel extérieur :

— en A un appui simple,

Cette structure subie un chargement au point C :

— une force  $-F\vec{i}$

1. dessinez le repère, la structure, les liaisons et le chargement, et les réactions éventuelles aux liaisons.
2. Soit le point  $H_3$  compris entre C et D, repéré par la distance  $CH_3 = s_3$ . Quel est le torseur des efforts intérieurs en  $H_3$  ?
3. Quelles sont les sollicitations en ce point.
4. Soit le point  $H_2$  compris entre B et C, repéré par la distance  $BH_2 = s_2$ . Quel est le torseur des efforts intérieurs en  $H_2$  ?
5. Quelles sont les sollicitations en ce point.
6. Soit le point  $H_1$  compris entre A et B, repéré par la distance  $AH_1 = s_1$ . Quel est le torseur des efforts intérieurs en  $H_1$  ?
7. Quelles sont les sollicitations en ce point.
8. Si la section droite de la poutre est de section circulaire de diamètre  $d$ , le moment quadratique en flexion est  $I_{Hz} = \pi d^4/64$ . Quel est le point de la poutre de contrainte maximale ? Donnez l'expression du rapport  $\sigma_{xx}^{max}/F$ .
9. Si  $E$  est le module de Young du matériau constituant la poutre, donnez l'expression de la rotation du point C.

### 1.6.2 partie B : Tranche de vie

Novembre 1973, dans une cuisine, une famille est attablée. Le père, entre deux gorgées de soupe, s'adresse à son fils :

— "Arrête de te balancer sur les deux pieds arrières de ta chaise!"

— "..."

... et le fils de continuer à se balancer. Le père hausse le ton :

— "Je t'ai dis d'arrêter de te balancer! Tu vas l'abîmer!"

— "Mais non, elle est solide."

— "Jean-Michel, c'est pas une raison pour augmenter les contraintes. Alors tu la remets sur ces 4 pieds et vite fait!"

Le fils s'exécute.

Trente ans plus tard, montrez que le père avait raison : les contraintes sont beaucoup plus grandes lorsqu'on se balance sur une chaise que lorsqu'on est assis normalement. (Toute ressemblance avec une première partie d'un examen... n'est sans doute pas fortuite).

### 1.6.3 partie C : On rappelle,

— que l'examen est noté sur 20, mais une erreur d'homogénéité dans la copie implique de perdre au plus 2 points, et que une écriture incomplète de torseur implique aussi de perdre au plus 2 autres points.

— que les formules de Bresse s'écrivent,

$$\{U_B\} = \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_B \\ \check{u}_B \end{array} \right\}_B \quad (1.4)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_A + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) ds \\ \vec{u}_A + \check{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \int_{s_A}^{s_B} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{HB} ds \end{array} \right\}_B \quad (1.5)$$

— que la relation entre contrainte à une distance  $\hat{y}$  de la fibre moyenne est donnée par,

$$\sigma_{xx}(\hat{y}) = \frac{N}{S} - \frac{M_{fz}(s)\hat{y}}{I_{Hz}}. \quad (1.6)$$

## 1.7 Novembre 2007 : isostatisme

Soit le problème plan, formé par une poutre constituée d'un segment de droite  $AB$ , tel que  $\vec{AB} = l_1\vec{i}$ , un segment de droite  $BC$ , tel que  $\vec{BC} = l_2\vec{j}$ . Cette structure est liée au référentiel extérieur :

- en A un appui simple,
- en C, un appui sur rouleau de normale  $C\vec{i}$ .

Cette structure subie un chargement au point B :

- une force  $\vec{F}$  dont la direction n'est pas précisée,
- un couple  $C\check{k}$ .

Quel est le degré d'hyperstatisme de cette structure ?

## 1.8 Décembre 2006 : porte bagage

Ne trouvant dans le commerce un porte bagage avant répondant aux fonctionnalités souhaitées, un cycliste mécanicien décide de se le fabriquer. Cet objet au design novateur est constitué d'une boîte aux dimensions adaptées à la taille de son ordinateur, fixée au cadre du vélo par deux poutres (voir figure 1.9). La première poutre droite relie les points A et B telle que  $\vec{AB} = l_1\vec{i}$ . Le vecteur  $\vec{j}$  sera pris orthonormé par rapport à  $\vec{i}$  et appartenant au plan du cadre du vélo. Cette poutre est en liaison encastrement en A avec la potence. Pour que cette poutre ne fléchisse pas trop sous le poids de l'ordinateur, une seconde poutre CB relie la base de la fourche en C avec le point B. Pour simplifier, le point C sera considéré dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\vec{CB} = l_2\vec{j}_2$ , avec un angle de  $60^\circ$  entre  $\vec{i}$  et  $\vec{j}_2$ . Le seul chargement extérieur sera dû à la masse de l'ordinateur, qui sera considéré pour simplifier comme une masse ponctuelle  $m$  au point D tel que  $\vec{AD} = \frac{2}{3}l_1\vec{i}$ .

Après quelques jours d'utilisation, une déformation plastique apparaît sur la poutre AB : la limite d'élasticité a sans doute été dépassée du fait des accélérations intempestives provoquées par les cahots de la route (et non par les coups de pédales... restons modeste!). L'objectif de ce problème est de vérifier cette hypothèse.

Afin de simplifier le problème, seule la poutre AB est considérée, la poutre CB est remplacée par un ressort ayant comme rigidité  $k = SE/l_2$  ( $E$  le module de Young,  $S$  l'aire de la section droite) agissant en B dans la direction  $\vec{j}_2$  par un effort  $\vec{F}$  dont le torseur de réaction sera noté  $\tau_3$ . On considèrera aussi que la direction  $\vec{j}$  est une direction principale de la section droite de la poutre AB.

1. Dessinez la sous-structure AB et ses conditions aux limites.
2. Ecrire la relation entre le déplacement du point B et la force  $F$  qu'exerce le ressort sur la poutre AB.
3. Si la masse  $m$  subit une accélération  $\gamma\vec{j}_3$ , quel est le torseur de chargement  $\tau_1$  exercé sur la poutre. On considèrera que l'angle entre  $\vec{i}$  et  $\vec{j}_3$  est de  $75^\circ$ . Pour simplifier les notations, je vous invite à noter  $\cos(75) = c75$  et  $\sin(75) = s75$ .

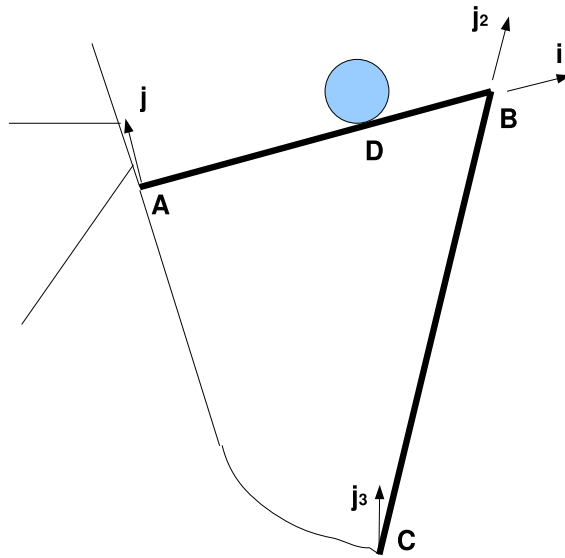


FIGURE 1.9 – Un porte bagage de vélo de fabrication local donc non importé de Chine.

4. Le système considéré est-il hyperstatique, et si oui de quel ordre? Dans le cas où vous le trouverez hyperstatique, choisissez comme inconnue hyperstatique la force  $F$  du ressort sur la poutre.
5. Ecrire les inconnues déterminables en fonction de  $\gamma$ ,  $m$ ,  $c75$ ,  $s75$ ,  $l_1$  et l'éventuelle inconnue hyperstatique  $F$ .
6. Calculez les torseurs d'efforts intérieurs dans les sections où cela est nécessaire.
7. Exprimez l'inconnue hyperstatique en fonction de  $\gamma$ ,  $m$ , les caractéristiques de section de la poutre ( $S$  l'aire de la section droite,  $I_{Hz}$  le moment quadratique autour de l'axe  $H\vec{z}$ ), et celles du matériau ( $E$  le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson). On mettra cette équation sous la forme  $F = \alpha m \gamma$ . Donnez l'expression de  $\alpha$ .
8. Si la poutre est de section rectangulaire de largeur  $b = 1\text{cm}$ , de hauteur  $h = 2\text{mm}$ , de module d'Young  $E = 70\text{MPa}$ , de longueur  $l_1 = 0.3\text{m}$ , de longueur  $l_2 = 0.5\text{m}$ , tout calcul fait, on trouve  $\alpha = 0.58$ . Cette valeur vous paraît-elle logique?
9. En quel point H le moment fléchissant est-il maximal?
10. Quelle est la contrainte maximale sur la fibre supérieure et inférieure de la poutre au droit du point H? On rappelle que  $I_{Hz} = b * h^3 / 12 = 6.67 * 10^{12} \text{m}^4$ .
11. Quel est l'accélération maximale que peut subir la poutre. On rappelle que pour l'aluminium  $\sigma_{limite} = 50\text{MPa}$ .
12. Commentez le résultat. Pourquoi ce cycliste avisé a utilisé des poutres de section droite en L et non rectangulaire comme modélisé dans ce problème simplifié?

On rappelle :

- que 2 items de correction sont consacrés à l'homogénéité de vos équations, et à l'écriture complète des torseurs.
- que les formules de Bresse s'écrivent,

$$\{U_B\} = \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_B \\ \vec{u}_B \end{array} \right\}_B \quad (1.7)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_A + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) ds \\ \vec{u}_A + \check{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \int_{s_A}^{s_B} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{HB} ds \end{array} \right\}_B \quad (1.8)$$

- que la relation entre contrainte à une distance  $\hat{y}$  de la fibre moyenne est donnée par,

$$\sigma_{xx}(\hat{y}) = \frac{N}{S} - \frac{M_{fz}(s)\hat{y}}{I_{Hz}}. \quad (1.9)$$

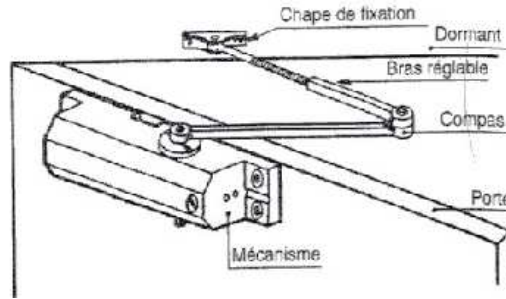


FIGURE 1.10 – Une vue du ferme-porte.

## 1.9 Juin 2006 : le compas du ferme-porte

Le compas du ferme porte présenté figure 1.10 est constitué de deux poutres de longueur  $l = 0,25m$ . En ces périodes de chaleur estivale, le bienheureux "enseignant-fonctionnaire-moule" (GdV mai 06) de l'Ensim derrière ses vitres, souhaite faire un courant d'air pour dissiper l'énergie considérable de son cerveau en activité. Coinçant un taille-crayon entre les deux bras du compas à proximité du point B, il bloque cette articulation en B. On peut donc considérer dans cette configuration que le compas ABC est représentable par une seule poutre dont la fibre moyenne est de direction variable. On prendra comme angle ABC  $\theta = 30$ .

1. Le point C est lié à la porte qui ne peut que tourner qu'autour de l'axe  $O\vec{k}$ , avec O sur l'axe des gonds de la porte tel que  $\vec{OA} = \vec{CB}$ . Expliquez les choix des deux liaisons en A et C, visibles sur la figure 1.11, pour modéliser les conditions aux limites de la poutre.
2. Soudain, un courant d'air violent tente de fermer la porte. On représentera l'effet du vent par une force au point C  $\vec{F} = F\vec{j}$  (Attention : les axes  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont ceux de la figure 1.11). Le système est-il hyperstatique ?
3. Dans le cas où il est hyperstatique, choisissez l'inconnue (ou les inconnues) hyperstatique(s), et donnez la (ou les) équation(s) cinématique(s) associée(s).
4. Si l'on considère que la section droite de la poutre ABC est carré de côté  $a$ , donnez la valeur de l'inconnue hyperstatique en fonction du chargement  $F$ , de  $l$ ,  $a$ , du module de Young  $E$  du matériau.
5. Tracez les évolutions de l'effort normal, tranchant et du moment fléchissant en fonction du point  $H$  le long de la poutre ABC.
6. Quelle est la valeur  $F_{max}$  de l'effort pouvant entraîner la rupture d'un des points du compas ? Où se situe le point ?

Merci de préciser les hypothèses que vous utilisez.

On rappelle :

- que 2 items de correction sont consacrés à l'homogénéité de vos équations, et à l'écriture complète des torseurs.
- que les formules de Bresse s'écrivent,

$$\{U_B\} = \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_B \\ \check{u}_B \end{array} \right\}_B \quad (1.10)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_A + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + M f_y/EI_{Hy} \check{y} + M f_z/EI_{Hz} \check{z}) ds \\ \vec{u}_A + \check{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \int_{s_A}^{s_B} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + M f_y/EI_{Hy} \check{y} + M f_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{HB} ds \end{array} \right\}_B \quad (1.11)$$

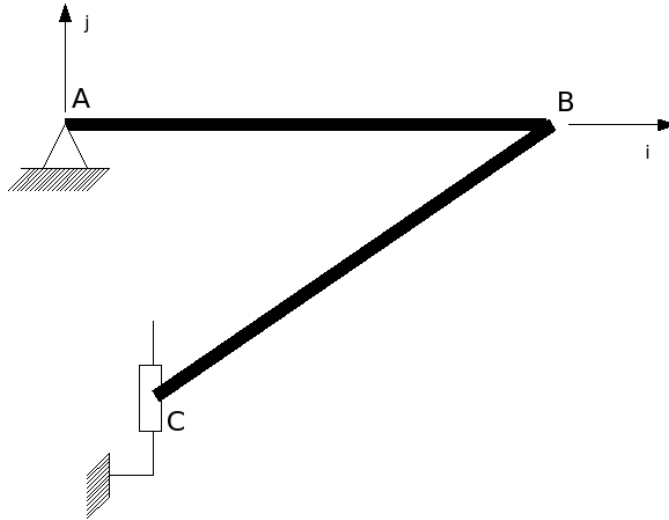


FIGURE 1.11 – Le compas est considéré comme une poutre de fibre moyenne non droite.

— que la relation entre contrainte à une distance  $\hat{y}$  de la fibre moyenne est donnée par,

$$\sigma_{xx}(\hat{y}) = \frac{N}{S} - \frac{M_{fz}(s)\hat{y}}{I_{Hz}}. \quad (1.12)$$

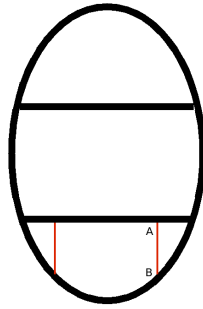


FIGURE 1.12 – Une vue en coupe de la structure d’un Airbus A380.

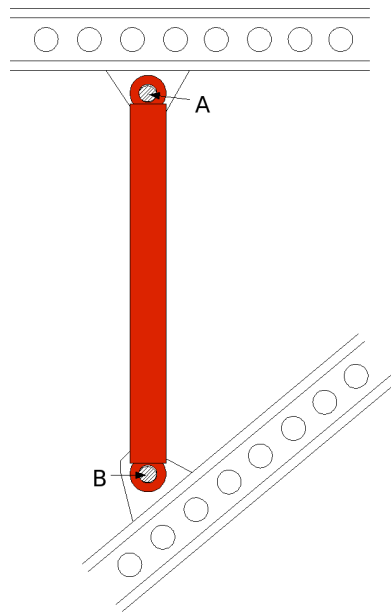


FIGURE 1.13 – La bielle de renfort entre plancher inférieur et coque inférieure.

## 1.10 Mai 2006 : ”Dans l’Airbus 380”

La rigidité de structure d’un Airbus est assurée par un système de poutres qui ne sont pas droites : une coupe dans le plan perpendiculaire de l’axe de l’avion (figure 1.12) montre que la forme extérieure ovale est renforcée par les deux planchers (2 étages passagers). Sous le plancher inférieur, sont positionnées des poutres verticales qui assurent une liaison entre le plancher et la coques inférieure qui délimite la soute.

### 1.10.1 Poutre articulée en A et B : bielle

Chacune de ces poutres est articulée à ses deux extrémités (figure 1.13). L’objectif de ce problème est d’en comprendre l’une des possibles raisons.

1. Soit une poutre droite de section circulaire de rayon  $r$ , liant deux points A et B tels que  $\vec{AB} = l\vec{i}$ . Supposons le problème dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ . Supposons que la liaison en A soit une liaison appuis simple de normale  $\vec{i}$ , et que le point B soit chargé par un torseur ne comportant pas de couple,

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} F_i\vec{i} + F_j\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{array} \right\}_B. \quad (1.13)$$

Montrez que  $F_j = 0$ , pour que cette poutre soit en équilibre.

2. Dans ce cas, quelles sont les sollicitations possibles de cette poutre ?

3. Sont-elles constantes quelque soit le point H, tel que  $\vec{AH} = s\vec{i}$ ?
4. Sous les efforts dynamiques, la structure globale de l'avion se déforme (l'amplitude de mouvement de l'extrémité de l'aile peut être de plusieurs mètres). Si l'on prend comme référence le point A, la déformation globale de la structure de l'avion implique que le point B se déplacera par rapport au point A. Appelons C le point appartenant à la structure de l'avion et coïncidant à B. Soit le torseur de déplacement en C,

$$\{U_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_C \vec{k} \\ u_i \vec{i} + u_j \vec{j} \end{array} \right\}_C . \quad (1.14)$$

La liaison entre la bielle et la structure en B, laisse possible la rotation autour de l'axe  $\vec{k}$ . Le torseur de déplacement en B est donc,

$$\{U_3\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_B \vec{k} \\ u_i \vec{i} + u_j \vec{j} \end{array} \right\}_B , \quad (1.15)$$

avec la valeur de  $\omega_B$  qui n'est pas imposée par la structure. Quelles sont les valeurs des composantes du torseur des efforts intérieurs dans la bielle, en fonction de  $u_i$  et  $u_j$  qui seront supposés positifs et petits par rapport à la longueur  $l$  (ce sont les données connues du problème)?

5. Quelle est la contrainte maximale subie par la bielle? Où se situe-t-elle le long de cette bielle?

### 1.10.2 Poutre encastree en A, articulée en B

Etudions le second cas où la liaison en A est une liaison encastrement.

1. Dans ce cas, quelles sont les sollicitations possibles de cette poutre?
2. Sont-elles constantes quelque soit le point H, tel que  $\vec{AH} = s\vec{i}$ ?
3. Supposons comme précédemment que le torseur de déplacement du point B soit imposé à,

$$\{U_3\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_B \vec{k} \\ u_i \vec{i} + u_j \vec{j} \end{array} \right\}_B . \quad (1.16)$$

Quelles sont les valeurs des composantes du torseur des efforts intérieurs dans la poutre, en fonction de  $u_i$  et  $u_j$  qui seront encore supposés positifs et petits par rapport à la longueur  $l$  (ce sont à nouveau les données connues du problème)?

4. Quelle est la contrainte maximale subie par la bielle? Où se situe-t-elle le long de cette bielle?

### 1.10.3 Comparaison des deux montages

1. Quelle est la liaison en A qu'il faut choisir afin de limiter les sollicitations dans la poutre (ou bielle) AB?

### 1.10.4 Quelques rappels...

On rappelle :

- que 2 items de correction sont consacrés à l'homogénéité de vos équations, et à l'écriture complète des torseurs.



— que les formules de Bresse s'écrivent,

$$\{U_B\} = \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_B \\ \check{u}_B \end{array} \right\}_B \quad (1.17)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_A + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) ds \\ \vec{u}_A + \check{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \int_{s_A}^{s_B} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{HB} ds \end{array} \right\}_B \quad (1.18)$$

— que la relation entre contrainte à une distance  $\hat{y}$  de la fibre moyenne est donnée par,

$$\sigma_{xx}(\hat{y}) = \frac{N}{S} - \frac{M_{fz}(s)\hat{y}}{I_{Hz}}. \quad (1.19)$$

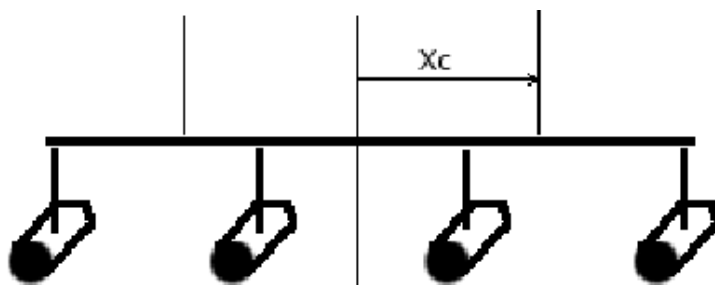


FIGURE 1.14 – Une poutre et ses quatre projecteurs.

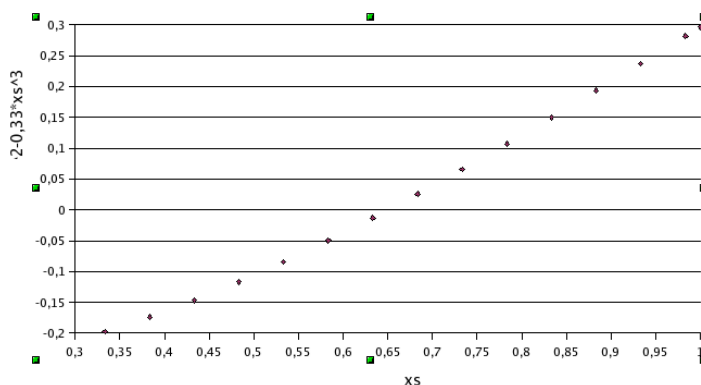


FIGURE 1.15 – la fonction  $y = -0,26 - 0,11 * x_c/l + (x_c/l)^2 - 0,33 * (x_c/l)^3$

## 1.11 Décembre 2005 : "La culture coûte cher?... Essayons l'ignorance !"

En attendant la mise en application de ce slogan, l'éclairagiste d'une salle de théâtre doit suspendre à 10 mètres de haut, 4 projecteurs. Pour cela, il utilise une poutre de section circulaire de diamètre  $d = 0.05$  m, creuse (épaisseur  $e = 0.002$  m), en acier ( $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa,  $\nu = 0.3$ ), à laquelle il accroche les quatre projecteurs : un à chaque extrémité de la poutre de longueur  $2l$ , et les deux autres, tels que les distances entre projecteurs soient les mêmes (voir figure 1.14).

Pour hisser ces projecteurs, il dispose de deux câbles qu'il peut accrocher le long de la poutre en deux emplacements qu'il peut choisir. Sous le poids des projecteurs, bien supérieurs au poids de la poutre, la poutre fléchi, et les projecteurs ne sont pas à la même hauteur.

Ce perfectionniste interpelle alors Julie(\*), stagiaire dans ce théâtre :

- Dis donc, Julie, t'es pas dans une école d'ingénieur ? Y'a ma poutre qui fléchi sous le poids des projos. J'fais comment pour qu'ils soient horizontaux ?
- Tu veux savoir, à quelle distance  $x_c$  par rapport au milieu de la poutre tu dois fixer les câbles pour que le déplacement des projecteurs sous leur poids soit le même ?
- Ouaip ! Si cela te fait plaisir de le dire comme cela...
- Pas de problème, je te donne la réponse dans 2 heures. Je vais utiliser la symétrie du problème en mettant une glissière au milieu.

(\*) Toute ressemblance avec des personnages existant ou ayant existé sont totalement fortuites.

On rappelle :

- que 2 items de correction sont consacrés à l'homogénéité de vos équations, et à l'écriture complète des torseurs.
- que les formules de Bresse s'écrivent,

$$\{U_B\} = \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_B \\ \vec{u}_B \end{array} \right\}_B \quad (1.20)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_A + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) ds \\ \vec{u}_A + \check{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \int_{s_A}^{s_B} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{HB} ds \end{array} \right\}_B \quad (1.21)$$

- que, en prenant soint d'introduire la variable adimensionnelle  $\tilde{x} = x/l$ , les calculs sont simplifiés, l'homogénéité vite vérifiée.

## 1.12 Juin 2005 : Poutre cantilever sous une charge répartie (tout document autorisé)

Soient une base directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , trois points  $A, B$  et  $C$  tels que  $\vec{AB} = l\vec{i}$ ,  $\vec{BC} = l\vec{i}$ . Soit une poutre droite  $ABC$ , de section rectangulaire  $bh$  avec  $b$  la largeur dans la direction  $\vec{z}$  et  $h$  l'épaisseur dans la direction  $\vec{y}$  avec  $\vec{z} = \vec{k}$  et  $\vec{y} = \vec{j}$ , de module d'Young  $E$ , encastree en  $A$ , chargée en tout point  $P$  appartenant au segment  $AB$ , tel que  $\vec{AP} = x_p\vec{i}$  par une charge répartie  $-a(1 - x_p/l)dx_p\vec{j}$ .

1. Calculer le déplacement du point  $C$ .
2. Dans le cas où un appui sur rouleau de normale  $B\vec{j}$  est présent en  $B$ , calculez le déplacement en  $C$ .

Vous exprimerez vos résultats en fonction de  $E, b, h, a$  et  $l$ .

On rappelle :

- que 2 items de correction sont consacrés à l'homogénéité de vos équations, et à l'écriture complète des torseurs.
- que les formules de Bresse s'écrivent,

$$\{U_B\} = \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_B \\ \vec{u}_B \end{array} \right\}_B \quad (1.22)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_A + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) ds \\ \vec{u}_A + \check{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \int_{s_A}^{s_B} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{HB} ds \end{array} \right\}_B \quad (1.23)$$

- que, avec un peu de finesse, on peut calculer les deux questions comme des cas particuliers d'un même problème,
- que, en prenant soint d'introduire la variable adimensionnelle  $\tilde{x} = x/l$ , les calculs sont simplifiés, l'homogénéité vite vérifiée, et, sauf erreur de ma part, la série d'intégrales fournies sur une feuille à part, permet de gagner du temps.

## 1.13 Mai 2005 : Effondrement d'une serre, sous le poids de la neige (examen a faire sans document, sauf la feuille des torseurs transmissibles aux liaisons, complétée par vos soins.)

Le 9 avril 2005, 50 cm de neige tombaient dans la région de la Drôme. Une serre formée d'armature (voir figure 1.16) recouverte d'une bâche plastique résista sans problème. Mais cette

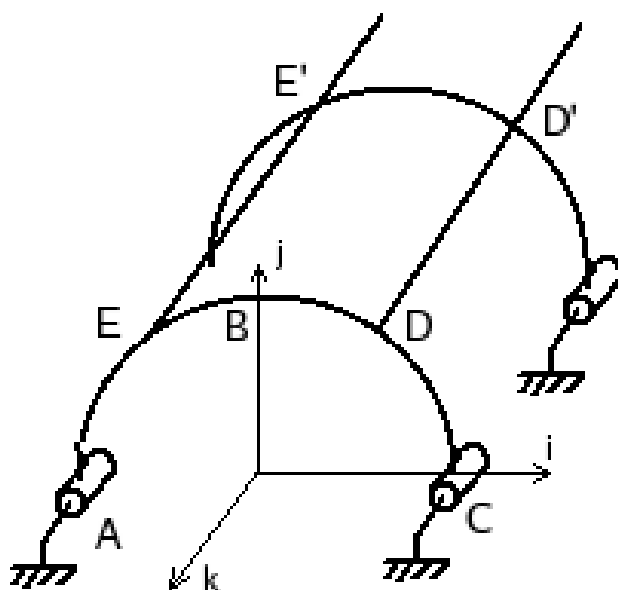


FIGURE 1.16 – Vue générale de l’armature d’une serre.

averse de neige fut alors suivie d’une averse de pluie. L’eau, au lieu de ruisseler, imbiba la neige et augmenta encore le chargement. Sous ces efforts, la tension de la bâche augmenta. Celle-ci exerça des efforts horizontaux sur les arceaux, qui s’équilibraient deux à deux pour les arceaux centraux. Par contre, pour l’arceau de l’extrémité de la serre ce chargement horizontal dû à la tension de la bâche, n’était équilibré que par les réactions de l’arceau et le sollicitait donc bien plus que les autres. L’arceau d’extrémité s’effondra, entraînant l’effondrement de 4 arceaux successifs.

L’objectif de ce problème est de calculer le type de sollicitation engendré dans l’arceau d’extrémité par une charge horizontale.

1. Simplification du problème. Les arceaux sont reliés entre eux par des tirants (EE’ DD’ sur la figure 1.16). Nous étudierons le problème sans prendre en compte ces tirants. L’arceau d’extrémité peut donc être considéré comme lié au sol par des liaisons pivot d’axe  $C\vec{k}$  et  $A\vec{k}$ . On considèrera que sa fibre moyenne décrit un arc de cercle de rayon  $a$ . Sa section droite est un tube creux circulaire de rayons extérieur  $r$  et de rayon intérieur  $r'$ .

La neige n’étant restée que sur la partie supérieure de la bâche, seul le haut de l’arceau est chargé horizontalement. Pour simplifier le problème on peut soit considérer :

- soit une charge concentrée en  $B$  de valeur  $-F\vec{k}$  (avec  $F$  en N),
- soit une charge linéique horizontale entre les points  $D$  et  $E$  d’intensité  $-\frac{3F}{a\pi}\vec{k}ds$ . Si l’angle  $\phi$  entre  $\vec{OC}$  et  $\vec{OH}$  permet de repérer un point de la fibre moyenne, on considèrera que  $\phi_E = \pi/3$  et  $\phi_D = 2\pi/3$ .

Ces deux torseurs sont-ils équivalents ?

2. Le plan  $(O, \vec{j}, \vec{k})$  est un plan de symétrie de la structure et du chargement. En déduire les conditions vérifiées en  $B$  en terme de déplacement  $\vec{u}_B$  et de rotation  $\vec{\omega}_B$ .
3. Montrer que ces conditions correspondent à ceux d’une liaison appui plan de normale  $B\vec{i}$ .
4. Le problème peut donc se résumer à un demi-problème représenté figure 1.18. C’est sur ce demi-problème que nous travaillerons, le chargement étant considéré comme ponctuel en  $B$  de module  $-\frac{F}{2}\vec{k}$ . On négligera le poids de la structure, et la force verticale due au poids de neige. Que pensez-vous de ces deux négligences par rapport à la force  $-\frac{F}{2}\vec{k}$  ?
5. Soit un point  $H$  repéré par l’angle  $\phi$  entre  $\vec{OC}$  et  $\vec{OH}$ . Montrer que pour le calcul du torseur des efforts intérieurs en  $H$ , il est indispensable de faire l’équilibre de la structure.
6. Faire le bilan des actions sur cette structure. Pour homogénéiser les notations, on notera  $\tau_1$  le torseur en  $C$ ,  $\tau_2$  le torseur en  $B$ ,  $\tau_3$  le torseur de chargement horizontal en  $B$ ,  $R_{ni}$

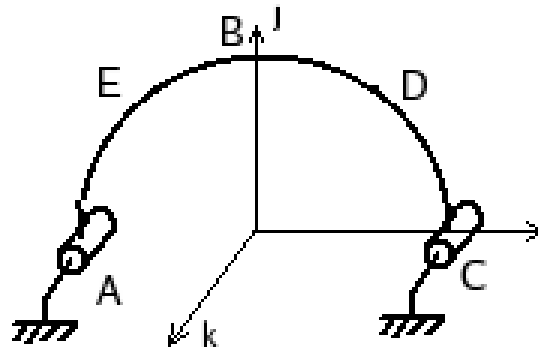


FIGURE 1.17 – Vue de l'arc de extrémité.

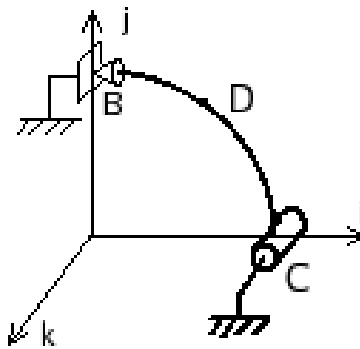


FIGURE 1.18 – Vue d'un demi arc de extrémité.

la composante suivant la direction  $\vec{i}$  de la résultante du torseur  $\tau_n$  et  $C_{ni}$  la composante suivant la direction  $\vec{i}$  du moment du torseur  $\tau_n$ .

7. Ecrire l'équilibre de la structure.
8. Le système est-il hyperstatique ? Si oui, choisissez la (ou les) inconnue(s) hyperstatique(s) au point  $B$ .
9. Ecrire les réactions et moments aux liaisons déterminables en fonction du chargement  $F$  et des éventuelles inconnues hyperstatiques.
10. Quelle(s) équation(s) supplémentaire(s) doit-on écrire pour pouvoir déterminer la (ou les) inconnue(s) hyperstatique(s) ?
11. Pour le dimensionnement, nous simplifions encore le problème, et nous ferons l'hypothèse que cette (ou ces) inconnue(s) hyperstatique(s) est (sont) nulle(s) (ce qui n'est pas le cas en réalité). Avec cette simplification, calculer le torseur des efforts intérieurs en un point  $H$  (angle  $\phi$ ) compris entre  $C$  et  $E$ .
12. Quelles sont les sollicitations en  $H$  ?
13. Quelle est l'angle  $\phi$  de la section droite la plus sollicitée de la poutre ?
14. Dans la réalité, la limite d'élasticité s'est produite au point  $E$ . Le modèle développé explique-t-il ceci ?
15. On notera  $\sigma_{eq} = \sqrt{(\sigma_N + \sigma_{M_f})^2 + 4\sigma_{M_x}^2}$  la contrainte équivalente dans le cas d'une sollicitation due à un effort normal  $N$ , à un moment fléchissant  $M_f$  à un moment de torsion  $M_x$ , avec  $\sigma_N = N/S$ ,  $\sigma_{M_f} = M_f r / I_{Hz}$  et  $\sigma_{M_x} = M_x r / I_0$ . On rappelle que  $I_{Hz} = \pi r^4 / 4$  et  $I_0 = \pi r^4 / 2$  pour un tube plein de rayon  $r$ . Quelles sont les expressions de  $I_0$  et  $I_{Hz}$  pour un tube creux de rayon extérieur  $r$  et intérieur  $r' = r\tilde{r}$  ?
16. Cette contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  doit rester inférieur à la limite d'élasticité du matériau :  $\sigma^{ce}$ . Quelle est la force maximale  $F$  applicable à la structure
17. application numérique :  $r = 50\text{mm}$ ,  $\tilde{r} = 0.9$ ,  $a = 3,5\text{m}$ ,  $\sigma^{ce} = 240\text{MPa}$ .

## 1.14 Juin 2004 : Calcul de la mâchoire d'une pince de manipulateur hydraulique

Nous rappelons que 2 items de correction sont consacrés à l'homogénéité de vos équations, et à l'écriture complète des torseurs.

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}_B \\ \vec{u}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_A + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \vec{x} + Mf_y/EI_{Hy} \vec{y} + Mf_z/EI_{Hz} \vec{z}) ds \\ \vec{u}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \int_{s_A}^{s_B} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \vec{x} + Mf_y/EI_{Hy} \vec{y} + Mf_z/EI_{Hz} \vec{z}) \wedge \vec{HB} ds \end{array} \right\}_B \quad (1.24)$$

L'énergie de déformation dans une poutre est donnée par,

$$W_{int} = \frac{1}{2} \int_{poutre} (N^2/ES + T_y^2/GS_y + T_z^2/GS_z + M_x^2/GI_0^c + Mf_y^2/EI_{Hy} + Mf_z^2/EI_{Hz}) ds. \quad (1.25)$$

Nous souhaitons dimensionner la mâchoire 4 de la pince de manipulateur hydraulique, et soupçonnons que le moment fléchissant maximum sera présent au point  $E$  où la fibre neutre fait un angle.

Un calcul du moment fléchissant en ce point a été fait sous l'hypothèse que le contact entre la pièce serrée  $P$  et la mâchoire était un contact de faible surface. Vous trouverez la résolution pages suivantes.

Votre oeil critique sur le modèle utilisé vous amène à remettre en cause cette hypothèse et il vous semble plus judicieux de considérer en  $I$  une liaison glissière d'axe parallèle à la surface de contact.

1. Le moment fléchissant en  $E$  est-il modifié ?
2. Si oui, donnez son expression en fonction de la force  $F$ , des longueurs  $a$  et  $b$ , et de l'angle  $\alpha$  visibles dans la résolution fournie.
3. En relevant des valeurs sur la vue de face de la pièce, dites si le moment fléchissant obtenu est plus grand ou plus petit en module que celui obtenu par la résolution fournie.

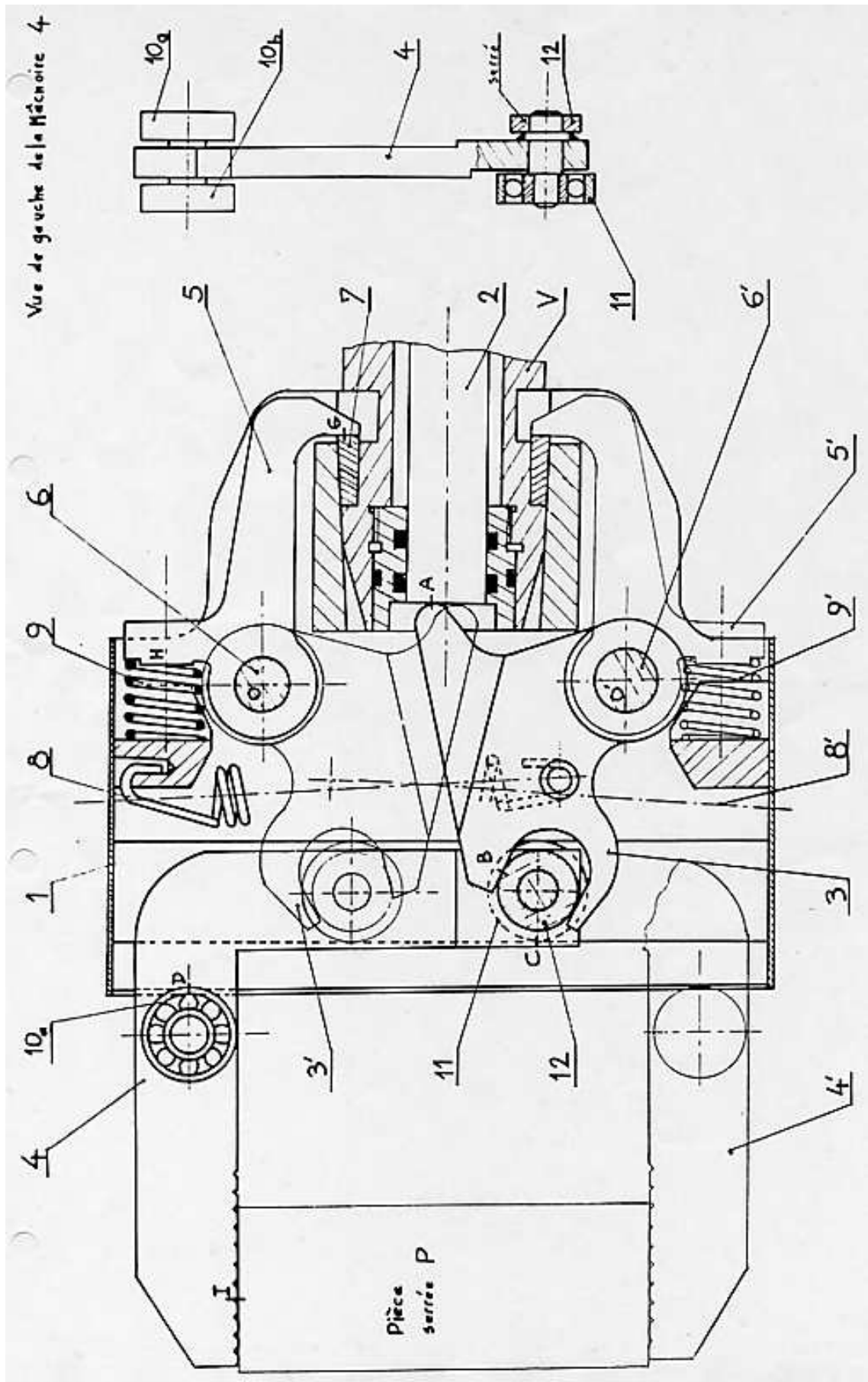


FIGURE 1.19 – Pièce hydraulique.



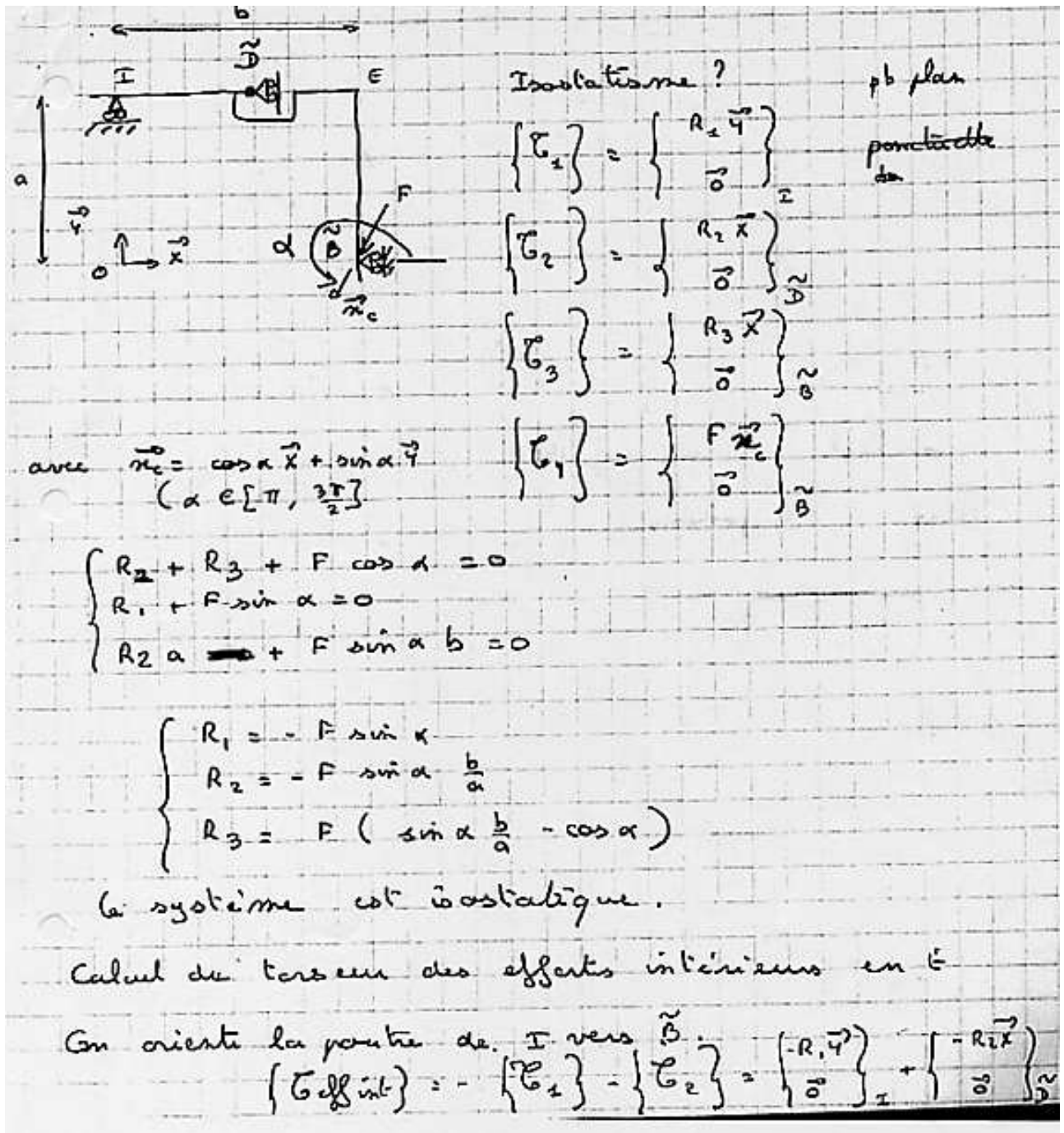


FIGURE 1.20 – Pince hydraulique (résolution 1).

$$\begin{aligned}
 \left\{ \vec{G}_{\text{eff}} \right\}_E &= \left\{ \begin{array}{l} F \sin \alpha \vec{Y} \\ F \sin \alpha \vec{Y} \cdot \vec{n}_{\vec{I}\vec{E}} \end{array} \right\}_E + \left\{ \begin{array}{l} F \sin \alpha \frac{b}{a} \vec{X} \\ F \sin \alpha \frac{b}{a} \vec{X} \cdot \vec{n}_{\vec{D}\vec{E}} \end{array} \right\}_E \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} F \sin \alpha \left[ \frac{b}{a} \vec{X} + \vec{Y} \right] \\ - F \sin \alpha \cdot b \vec{Z} \end{array} \right\}_E
 \end{aligned}$$

~~$F \sin \alpha \frac{b}{a} \vec{X}$~~  /  ~~$F \sin \alpha \frac{b}{a} \vec{X} \cdot \vec{n}_{\vec{D}\vec{E}}$~~

les repères locaux en E sont tels que  $\vec{z}^0 = \vec{z}$ .  
 Donc le moment fléchissant en E est :

$$\mathcal{M}_3 = - F \sin \alpha b$$

FIGURE 1.21 – Pince hydraulique (résolution 2).

## 1.15 Mai 2004 : Portique sous une charge répartie

Nous rappelons que 2 items de correction sont consacrés à l'homogénéité de vos équations, et à l'écriture complète des torseurs.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_B \\ \vec{u}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_A + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \vec{x} + Mf_y/EI_{Hy} \vec{y} + Mf_z/EI_{Hz} \vec{z}) ds \\ \vec{u}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \int_{s_A}^{s_B} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \vec{x} + Mf_y/EI_{Hy} \vec{y} + Mf_z/EI_{Hz} \vec{z}) \wedge \vec{HB} ds \end{array} \right\}_B \quad (1.26)$$

Considérons un problème dans un plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit des tronçons de poutres homogènes soudés entre eux qui constituent un portique, et utilisent un matériau élastique isotrope (module d'Young  $E$ , de coefficient de poisson  $\nu$ ). On pourra noter l'aire de la section  $S$ , et le moment quadratique de la section droite  $I_{Hz}$  autour d'un axe  $(H\vec{k})$  avec  $H$  le centre géométrique d'une section droite.

Soient les points de coordonnées respectives  $O(0, 0)$ ,  $A(0, a)$ ,  $B(b, a)$ ,  $C(b, 0)$ .

La fibre moyenne est formée des segments  $OA$ ,  $AB$  et  $BC$ . La structure est encastree en  $O$ . Elle est chargée sur le segment  $AB$  par une charge répartie  $d\vec{F} = -p\vec{j}ds$ . Elle est libre en  $C$ .

1. Modélisez le système en représentant la fibre moyenne, les liaisons, les chargements, les axes, etc...
2. Le système est-il isostatique ?
3. Donnez les expressions des actions aux liaisons en fonction de la charge  $p$ , et des éventuelles inconnues hyperstatique que vous auriez dû choisir.
4. Quels segments de poutres différents distinguez-vous pour le calcul des efforts intérieurs ?
5. Déterminez l'expression du torseur des efforts intérieurs en un point  $H_1$  appartenant au segment  $OA$ , avec  $\vec{OH}_1 = s_1 \vec{j}$ .
6. Quels sont les types de sollicitations subies par la poutre en  $H_1$  ?
7. Quel est le déplacement du point  $A$  dans la direction  $\vec{i}$  ?
8. Déterminez l'expression du torseur des efforts intérieurs en un point  $H_2$  appartenant au segment  $AB$ , avec  $\vec{AH}_2 = s_2 \vec{i}$ .
9. Quels sont les types de sollicitations subies par la poutre en  $H_2$  ?

## 1.16 Mai 2003 : Potence

Considérons un problème dans un plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit une poutre de section circulaire de diamètre  $d$ , homogène, constituée par un matériau élastique isotrope (module d'Young  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ , coefficient de poisson  $\nu$ ). On pourra noter l'aire de la section  $S$ , et le moment quadratique  $I_{Hz}$  autour d'un axe  $(H\vec{Z})$  avec  $H$  le centre d'inertie d'une section droite.

La fibre moyenne est formée de deux segments droits  $OA$  et  $AB$  avec,

$$\vec{OA} = l \vec{i} \quad \vec{AB} = a \vec{j}, \quad (1.27)$$

avec  $l = 1m$ , et  $a = 0.1m$ .

Cette structure est encastree au point  $O$  et chargée à son extrémité  $B$  par un effort concentré  $\vec{F} = -F \vec{i}$ .

1. Modélisez le système en représentant la fibre moyenne, les liaisons, les chargements, les axes, etc...
2. Calculez le torseur des efforts intérieurs en un point  $H_2$  appartenant au segment  $AB$ , avec  $\vec{OH}_2 = x_2 \vec{i}$ .
3. Quelles sont les sollicitations subies au point  $H_2$  ?
4. Calculez le torseur des efforts intérieurs en un point  $H_1$  appartenant au segment  $OA$ , avec  $\vec{OH}_1 = x_1 \vec{i}$ .
5. Quelles sont les sollicitations subies au point  $H_1$  ?
6. Tracez les évolutions des sollicitations en fonction du point  $H_i$  appartenant compris entre  $O$  et  $B$ .
7. Calculez le déplacement du point  $B$ . Vous exprimerez le résultat dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
8. Déterminez le point  $P$  (ou les points  $P$ ) où la contrainte est maximale : donnez la section droite à laquelle il appartient et sa position dans la section droite.
9. Choisissez le diamètre  $d$  telle que la limite d'élasticité ne soit pas dépassée lorsque le module de la force est  $9.81 N$ . ( $\sigma \leq \sigma_0 = 240 MPa$ ).
10. Calculez la valeur numérique du déplacement du point  $B$  dans la direction  $\vec{j}$ .
11. Malgré votre calcul, sous sollicitation, vous dépassez la limite d'élasticité et la poutre entre en plasticité dans la section d'encastrement. Quelle hypothèse faite précédemment est caduque ?
12. Comment faut-il calculer une nouvelle évaluation des torseurs d'efforts intérieurs en  $H_1$  ?
13. Si la force concentrée est remplacée par une charge répartie sur le segment  $AB$  telle que  $\vec{p} = -F/a \vec{i}$ , calculez le torseur des efforts intérieurs au point  $H_2$ .

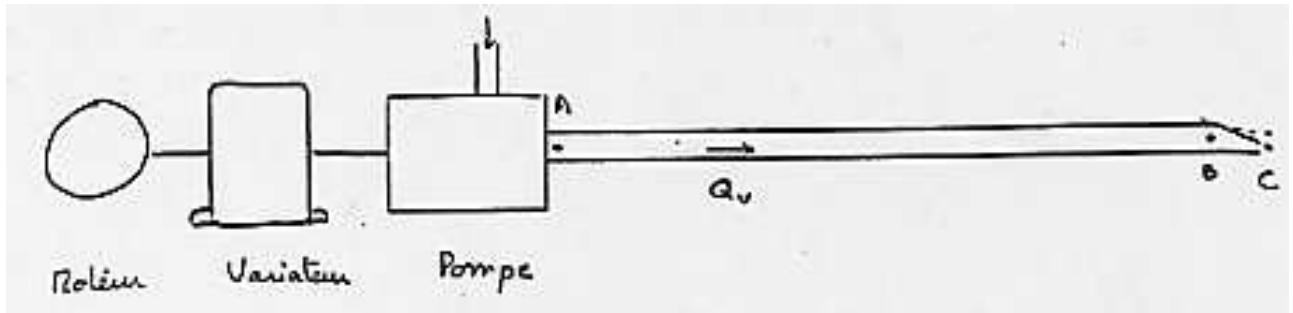


FIGURE 1.22 – Schéma général de l'installation.

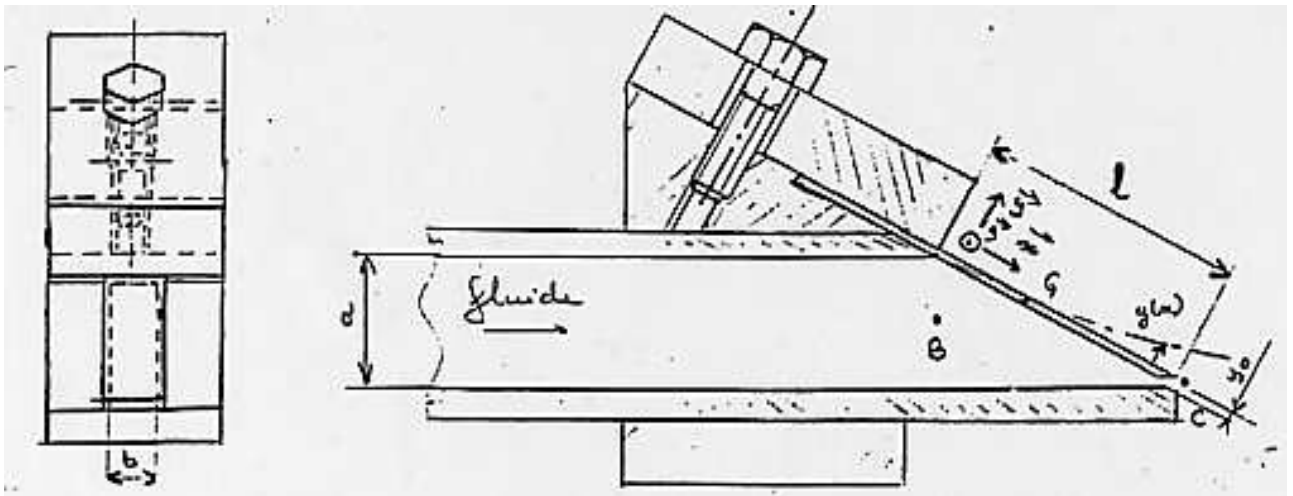


FIGURE 1.23 – Clapet en bout de conduite : une lame d'acier obstrue l'orifice en absence de débit.

## 1.17 Juin 2003 : Etude de la buse flexible

Un variateur est connecté à une pompe volumétrique qui impose au point A (figure 1.22) un débit  $Q_v$  d'eau dans une conduite horizontale de longueur  $L$ . L'extrémité de cette conduite est obstruée partiellement par une lame en acier (figure 1.23) faisant office de clapet anti-retour. En faisant varier la vitesse de la pompe et donc le débit, la lame en acier (longueur libre  $l$ , largeur  $b$ , moment quadratique  $I$  autour de l'axe  $\vec{z}$ , module d'Young  $E$ ) se déforme afin de laisser passer le fluide qui débouche alors sous la forme d'un jet libre (c-a-d à la pression atmosphérique! (histoire d'éviter à certains de faire deux fois la même erreur)). L'ouverture du bout du clapet, notée  $h$ , est la somme de deux composantes :  $y_0$  l'ouverture lorsque le débit est nul, et de  $y(L)$  la flèche à l'extrémité de la lame.

### A - Etude de mécanique du solide déformable : la buse flexible.

1. En un point H d'abscisse  $x$  ( $\vec{OH} = x\vec{x}$ ), la lame subit les efforts de pression dues au fluide présents dans la conduite (pression  $P(x)$ ) et dues à l'action de l'air extérieur (pression  $P_0$ ). Exprimez la différence de pression  $\Delta P(x) = P(x) - P_0$  en supposant que  $P(x)$  varie linéairement entre B et C. La pression au point B, notée  $P_B$ , intervient dans cette expression.
2. Montrez que le moment fléchissant au point H autour de l'axe  $\vec{z}$ , vaut  $M_f = \frac{P_0 - P_B}{6l}(x - l)^3 b$ .
3. Donnez l'expression de la flèche  $y(x)$  prise par la poutre.
4. Donnez l'expression de l'ouverture du clapet  $h$  en fonction de  $y_0$ ,  $\beta = l^4/(30EI)$ ,  $P_B - P_0$ , la couleur de la lame...

## 1.18 A quelle vitesse courrait ce dinosaure ?

Le sujet d'examen est présenté figures 1.24 et 1.25

## 1.19 Poutre sous son poids propre, crochet

Nous rappelons que 2 points sont consacrés à l'homogénéité de vos équations, et 2 points sur l'écriture complète des torseurs. Les deux parties sont indépendantes, commencez par celle qui vous inspire le plus. Pour mémoire,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_B \\ \vec{u}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_A + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \vec{x} + Mf_y/EI_{Hy} \vec{y} + Mf_z/EI_{Hz} \vec{z}) ds \\ \vec{u}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \int_{s_A}^{s_B} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ + \int_{s_A}^{s_B} (M_x/GI_0^c \vec{x} + Mf_y/EI_{Hy} \vec{y} + Mf_z/EI_{Hz} \vec{z}) \wedge \vec{HB} ds \end{array} \right\}_B \quad (1.28)$$

$$W_{int} = \frac{1}{2} \int_{poutre} (N^2/ES + T_y^2/GS_y + T_z^2/GS_z + M_x^2/GI_0^c + Mf_y^2/EI_{Hy} + Mf_z^2/EI_{Hz}) ds \quad (1.29)$$

$$\int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = 2; \quad \int_0^\pi \cos(\theta) d\theta = 0; \quad \int_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^\pi \cos^2(\theta) d\theta = \pi/2; \quad \int_0^\pi \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = 0 \quad (1.30)$$

Tous les documents de cours et de TD sont autorisés. La réponse à la plupart des questions posées est brève, peu calculatoire et fait appel avant tout au sens physique. Il est demandé au candidat de respecter les notations introduites, d'encadrer les résultats littéraux et numériques, de soigner l'orthographe et de vérifier l'homogénéité des expressions littérales utilisées.

**Problème : estimation de la vitesse de course des dinosaures**

(exercice construit à partir de l'article 'la course des dinosaures', Mc Neill Alexander, Pour la Science n°164, Juin 1991, p.64-69)

Quelle était la taille maximale des dinosaures ? La question a été posée pour la première fois par Galilée quand il analysait les relations entre la taille, la résistance et la structure des systèmes mécaniques. Considérons deux animaux de tailles différentes, mais de formes semblables : si le plus grand est deux fois plus long que le petit, il est également deux fois plus large et deux fois plus haut. Le volume du plus gros est égal à huit fois celui du plus petit. Si les deux animaux ont la même masse volumique, le plus grand est huit fois plus lourd. En revanche, la résistance de ses pattes est proportionnelle à la section de ses membres et n'est donc que quatre fois plus importante. Ainsi Galilée avait remarqué que chaque forme animale a sa taille maximale, à partir de laquelle elle ne se soutient plus.

Le but de la modélisation élémentaire présentée dans la suite est de donner un ordre de grandeur de la contrainte mécanique à l'intérieur d'une partie de squelette d'un grand animal. A partir de données mesurées sur des animaux vivants, il est alors possible d'estimer la vitesse maximale de course de l'animal, au delà de laquelle la structure mécanique que constitue son squelette n'est plus capable de supporter les contraintes qu'elle subit !



Figure 1 : Tricératops

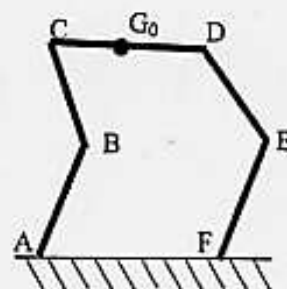


Fig 2 : modélisation de l'ossature

FIGURE 1.24 – examen dinosaure 1

- 11- En un point du segment AB, représenter la contrainte  $\sigma = \sigma_M + \sigma_N$  en fonction de la variable  $y_1$ . Cette contrainte représente l'effort par unité de surface exercé par un solide sur un autre. Préciser ces deux solides en les indiquant sur votre schéma.
- 12- En négligeant la contrainte due à l'effort normal devant la contrainte induite par le moment fléchissant, donner la position du (ou des) points où la contrainte atteint sa valeur maximale  $\sigma_{max}$ .
- 13- Définir le coefficient de sécurité de l'ossature.
- 14- L'étude effectuée est statique. On peut supposer en première approximation que les phénomènes dynamiques peuvent être pris en compte en introduisant un poids apparent  $P = KP$ . Dans cette expression K désigne un coefficient fonction de la vitesse et de l'impact des pattes sur le sol. De façon approchée, on peut estimer l'ordre de grandeur de la contrainte maximale à partir du résultat statique obtenu en 12 en utilisant le poids apparent de l'animal (c'est à dire en remplaçant P par  $\bar{P}$ ). On définit un indicateur de robustesse  $\alpha = I_z / (a \bar{P})$ . Expliquez rapidement pourquoi plus cet indicateur est grand et plus l'ossature peut supporter des efforts importants. Ces efforts sont induits par la masse et la vitesse de l'animal.
- 15- En supposant que l'évolution a façonné les os de tous les animaux avec le même coefficient de sécurité, on peut admettre que deux animaux ayant des indicateurs de robustesse identiques ont des courses semblables. Il est possible d'établir que cette similitude de mouvement est traduite par l'égalité des nombre de Froude des deux animaux. Le nombre de Froude F est défini par

$$F = \frac{V}{\sqrt{gh}}$$

V : vitesse de l'animal,

g : accélération de la pesanteur,

h : hauteur de l'animal.

L'indicateur de robustesse du fémur du Tricératops est estimé entre 13 et 19. Il est voisin de celui du rhinocéros (mais supérieur à celui de l'éléphant et inférieur à celui du buffle). Ces deux animaux ont donc des courses semblables et ont de ce fait des nombre de Froude identiques. La vitesse de course d'un Rhinocéros de 2 tonnes est de l'ordre de 7ms-1. Sa hauteur au garrot est de 1.7m. La hauteur au garrot du Tricératops est de l'ordre de 2.7m ; sa masse est estimée entre 6 et 9 tonnes. Donner l'ordre de grandeur de la vitesse de course du Tricératops.

FIGURE 1.25 – examen dinosaure 2



### 1.19.1 Poutre sous son poids propre

Considérons un problème dans un plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit une poutre homogène, constituée par un matériau élastique isotrope (module d'Young  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ , coefficient de poisson  $\nu$ ). On pourra noter l'aire de la section  $S$ , et le moment quadratique de la section droite  $I_{Hz}$  autour d'un axe  $(H\vec{Z})$  avec H le centre d'inertie d'une section droite.

La fibre moyenne est formée d'un segment droit  $AB$  avec,  $\vec{AB} = l\vec{i}$  et  $l = 1m$ .

Cette structure est en appuis simple de normale  $\vec{j}$  au point A, ainsi qu'au point B, et chargée sur toute sa longueur par une charge répartie  $d\vec{F} = -p\vec{j}ds$ .

1. Modélisez le système en représentant la fibre moyenne, les liaisons, les chargements, les axes, etc...
2. Le système est-il isostatique ?
3. Dans le cas où il est isostatique (sinon, passez à la question suivante), déterminez l'expression du torseur des efforts intérieurs en un point  $H$  appartenant au segment AB, avec  $\vec{OH} = x_H\vec{i}$ . Quels sont les types de sollicitations subies par la poutre.
4. Dans le cas où il est hyperstatique (sinon, revenez à la question précédente),
  - déterminez le degré d'hyperstatisme du système.
  - choisissez la (ou les) inconnue(s) hyperstatique(s).
  - dessinez le système isostatique associé avec son chargement.
  - écrivez l'équation cinématique qui permet d'obtenir l'inconnue hyperstatique.
  - calculez la (les) inconnue(s) hyperstatique(s).
  - Le résultat vous paraît-il logique ? Pourquoi ?

### 1.19.2 Crochet

Considérons un problème dans un plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit une poutre homogène, constituée par un matériau élastique isotrope (module d'Young  $E = 2.1 \cdot 10^{11} Pa$ , coefficient de poisson  $\nu = 0.3$ ). On pourra noter l'aire de la section  $S$ , et le moment quadratique de la section droite  $I_{Hz}$  autour d'un axe  $(H\vec{Z})$  avec H le centre d'inertie d'une section droite.

Soit les points  $A, B, C, D$  et  $E$  tels que :  $\vec{AB} = a\vec{i}$ ,  $\vec{BC} = R\vec{i} - R\vec{j}$ ,  $\vec{CD} = R\vec{i} + R\vec{j}$ ,  $\vec{DE} = -R\vec{i} + R\vec{j}$ . La poutre est représentée par sa fibre moyenne constituée d'un segment de droite  $AB$ , et d'un arc de cercle  $BCDE$  de rayon  $R$ . La poutre est encastrée en  $A$  et chargée au point  $D$  par un effort concentré  $\vec{F} = F\vec{i}$ .

1. Modélisez le système en représentant la fibre moyenne, les liaisons, les chargements, les axes, etc...
2. Quel est le déplacement  $\vec{U}_D$  ?
3. Ce déplacement dans la direction  $\vec{j}$  est-il nul ? Pourquoi ?

## 1.20 modélisation : test de l'année 00-01

- Lorsque le cisaillement transverse est pris en compte, la relation entre l'effort normal et la déformation longitudinale de la fibre moyenne est-elle modifiée ?
- Quelle condition aux limites n'est pas valide lorsque l'on considère un modèle de cinématique de section droite d'une poutre, pour lequel la section plane reste plane et indéformable dans le plan ?
- Comment passe-t-on du comportement en 3D (élasticité) au comportement du feuillet moyen (2D) d'une plaque ?
- Le coefficient de correction de section, vis-à-vis du comportement en cisaillement, est calculé
  - En égalant les énergies de déformation
  - En annulant la déformation de glissement sur la fibre extérieure
  - En minimisant les fréquences propres de flexion de la structure
- Dans le cas d'une poutre faite de deux matériaux dans l'épaisseur (bilame), les modèles de cinématique vus en cours, sont-ils toujours valides ? Comment calculeriez-vous la matrice de loi de comportement de la fibre moyenne ?

## 1.21 modélisation : test de l'année 01-02

Ce test de 1/4 d'heure, sera fait sans document ni calculatrice.

On souhaite calculer la loi de comportement d'un modèle poutre d'un bilame de largeur  $b$ , de fibre rectiligne de longueur  $l$  entre les points  $A$  et  $B$  (direction  $\vec{x}$ , encastrée à l'une de ses extrémités  $A$ , constitué de deux matériaux (épaisseurs  $h_1$   $h_2$ , module d'Young  $E_1$   $E_2$ , coefficient de poisson  $\nu_1$   $\nu_2$ , etc...).

- Quels sont les degrés de liberté au point  $B$  ?
- Quelle forme de champ cinématique d'une section droite choisiriez-vous ? Justifiez votre réponse.
- Comment calculeriez-vous la rigidité équivalente due à une déformation de traction pure ( $\epsilon_x$  sans unités) ? (écrire les formules nécessaires, mais ne pas faire les calculs)
- Comment calculeriez-vous la rigidité équivalente due à une déformation de flexion pure ( $\alpha_z$  en radian/mètre) ? (écrire les formules nécessaires, mais ne pas faire les calculs)
- Une déformation de traction pure, nécessite-t-elle un moment fléchissant ?
- Si l'on impose un effort de l'extrémité  $B$ ,  $\vec{F} = F\vec{x}$ , observe-t-on un déplacement du point  $B$  dans la direction  $\vec{y}$  ?
- Si l'on impose un déplacement de l'extrémité  $B$  dans une seule direction  $\vec{x}$  et en bloquant la rotation du point  $B$  ( $\vec{\omega}_B = \vec{0}$ ), observe-t-on un déplacement dans la direction  $\vec{y}$  des points  $G$  de la fibre moyenne situés entre  $A$  et  $B$  ?

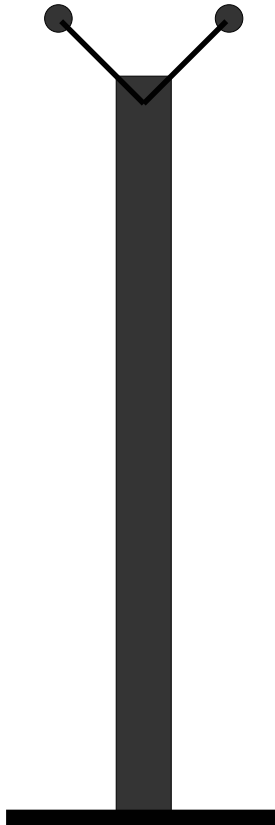


FIGURE 1.26 – La cheminée de 26 mètres de haut de l’usine Belipa d’Ecommoy.

## 1.22 modélisation : examen de l’année 03-04

L’usine Belipa, située à la sortie de la commune d’Ecommoy en direction de Tours, fabrique des panneaux de particule. En passant à côté de cette usine vous remarquerez sans doute deux cheminées dont la plus petite, est de couleur noire (figure 1.26).

Cette cheminée en acier est légère et peut donc être soumise à des oscillations importantes dues au décrochement tourbillonnaire les jours de grand vent. Si la cheminée est relativement souple, les oscillations de celles-ci peuvent entretenir le mécanisme aérodynamique, et la fréquence des décrochements tourbillonnaires ”se cale” sur la fréquence de la cheminée. Ceci est visible sur la figure 1.27.

Une vidéo est disponible pour vous montrer les mécanismes mis en jeu.

Pour éviter ceci, une lame d’acier, descendant en hélice le long de la cheminée est installée. Elle permet que le décrochement tourbillonnaire ne se fasse pas en phase tout le long d’une génératrice, ce qui permet de diminuer le niveau d’excitation.

Une autre solution est d’ajouter un amortisseur dynamique, tel que celui que vous avez mis en oeuvre en tp de vibration acoustique 2 sur le touret à meuler.

On constate de plus que cette cheminée est surmontée de deux sphères reliées par une poutre droite en acier de section circulaire de diamètre  $d = 10mm$  à deux points diamétralement opposés de la section supérieure de la cheminée.

Mr Griffon, ingénieur de cette entreprise, nous a fourni les cotes de cette structure, et nous l’en remercions. Il précise de plus que ce sont des paratonnerres.

Mais pourquoi sont-ils deux ? Pourquoi ne sont-ils pas pointus, pour mieux ”attirer” la foudre ? Ce second système ajouté, effectuerait-il un équilibrage dynamique de la cheminée ? L’objectif de cet examen est de tester la validité de cette hypothèse ?

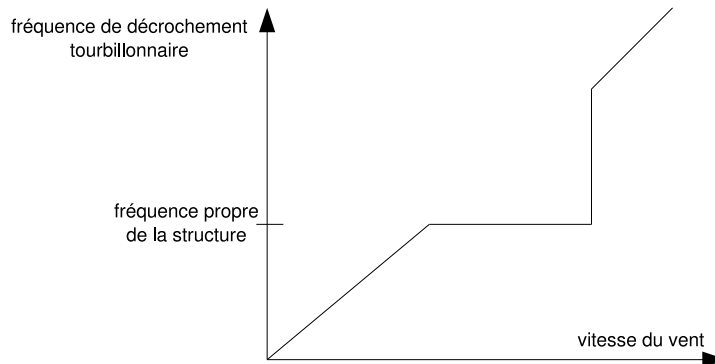


FIGURE 1.27 – Evolution de la fréquence de décrochement tourbillonnaire avec la vitesse du vent.

A) Modèle de la cheminée seule.

1. Elaborez un modèle de la cheminée sans le système de "paratonnerre". La hauteur de la cheminée est de  $26m$ , son diamètre de  $0,8m$ . L'épaisseur de la tôle est de
  - $8mm$  sur les 4 premiers mètres de hauteur,
  - $6mm$  sur les 6 mètres suivants ,
  - $4mm$  sur la suite.

Vous décrirez les hypothèses que vous faites.

2. Améliorer votre modèle élément fini de cette cheminée en optimisant le nombre d'éléments. Quelles sont les 6 premières fréquences propres? Décrire le type de mouvement associé à chaque fréquence propre.

B) Modèle de paratonnerre seul.

1. Elaborer un modèle élément fini d'un "paratonnerre" seul. Supposons qu'il est constitué d'une sphère d'acier, maintenue par une poutre d'acier de section circulaire de diamètre  $10mm$  et de longueur  $0.866m$  incliné de  $45^\circ$  par rapport à la verticale. Calculez les 3 premières fréquences propres de cette structure, pour une sphère dont la masse évolue de  $80\text{ kg}$  à  $0\text{ kg}$ .
2. Si le système ajouté doit jouer le rôle d'amortisseur dynamique, quel est la relation en fréquence à vérifier? Quelle est la masse qui serait nécessaire? Quel est le diamètre de la sphère qui correspond à cette masse?

C) Modèle couplé.

1. Si le système ajouté doit jouer le rôle d'amortisseur dynamique, quel est la relation en fréquence à vérifier? Quelle est la masse qui serait nécessaire? Quel est le diamètre de la sphère qui correspond à cette masse?
2. Pour vérifier, élaborer un modèle de la cheminée couplée avec deux "paratonnerres". Vous explicitez en détail la construction de ce modèle.
3. Faire varier les masses de  $80\text{ kg}$  à  $0\text{ kg}$ , et observez l'évolution des 6 premières fréquences propres (merci de le faire de façon graphique), dont vous décrirez les formes propres.
4. Commentez les résultats obtenus. L'hypothèse d'amortisseurs dynamique est-elle réaliste?



FIGURE 1.28 – Une masse liée au référentiel extérieur par deux poutres et deux ressorts.

## 1.23 vibration acoustique 2 : test de l'année 04-05

Aucun documents n'est autorisé. Les parties A), B), C) et E) sont indépendantes. La partie D) dépend des résultats des parties A), B) et c).

Une pièce massive 2 (de masse  $m = 1\text{kg}$ ) est maintenue en position par deux pièces en caoutchouc 3 et 3' de masse négligeable, elles même situées aux extrémités respectives de deux poutres en aluminium (masse volumique  $\rho = 2800\text{kgm}^{-3}$ , module de Young  $E = 70\text{GPa}$ , section droite circulaire de diamètre  $d = 0,01\text{m}$  et de longueur  $l = 0,15\text{m}$ ).

On souhaite calculer les fréquences et modes propres de vibration longitudinale dans la direction  $\vec{i}$  du système complet représenté figure 1.28. Pour ce faire, travaillons étape par étape.

A) Si l'on considère la poutre 1 seule,

1. à partir de l'équation de vibration longitudinale de la poutre,

$$\rho S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (1.31)$$

que pouvez vous dire des formes des fonctions d'espace et de temps  $U(x)$  et  $T(t)$  telles que  $u(x, t) = U(x)T(t)$  ?

2. Quelle est la relation entre le nombre d'onde temporel  $\omega$  et le nombre d'onde spatial  $\sigma$  ?
3. Pour la poutre 1, encastree à son extrémité gauche ( $x = 0$ ) et libre à son extrémité droite ( $x = l$ ), quelles sont les conditions aux limites ?

B) Pour la masse 2, supposons quelle subisse de part et d'autre des forces  $F_{32}\vec{i}$  et  $F_{3'2}\vec{i}$ .

1. A partir du principe fondamental de la dynamique, écrire l'équation de mouvement de cette masse. On notera la position de cette masse dans la direction  $\vec{i}$  :  $v(t)$ .

C) Un caoutchouc sera modélisé comme un ressort sans masse de rigidité  $k$ .

1. donnez l'expression de la tension de ce ressort en fonction des déplacements de ces deux extrémités.

D) On assemble le système formé des deux poutres 1 et 1', de la masse 2, et des deux ressorts représentatifs de 3 et 3'.

1. Donnez les conditions aux limites de raccordement de ce système. Vous noterez  $u_i(x, t)$  le déplacement d'un point de la poutre  $i$ .

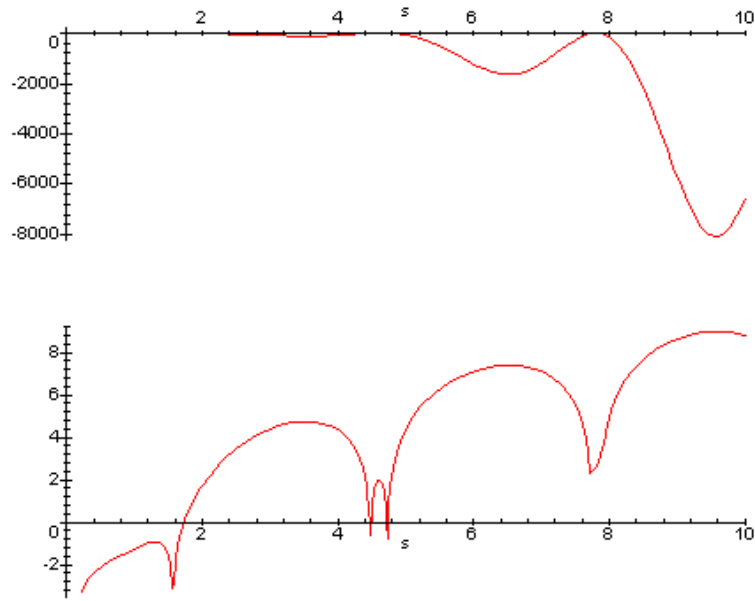


FIGURE 1.29 – Evolution du déterminant et du logarithme de la valeur absolue du déterminant en fonction de  $\tilde{\sigma}$ .

2. Montrez que l'on obtient (sauf erreur de ma part) un système de quatre équations,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma} \cos \tilde{\sigma} & \tilde{k} \sin \tilde{\sigma} & 0 & -\tilde{k} \\ 0 & \cos \tilde{\sigma} & \sin \tilde{\sigma} & 0 \\ 0 & \tilde{k} & \tilde{\sigma} & -\tilde{k} \\ -\tilde{k} \sin \tilde{\sigma} & -\tilde{k} & 0 & -\tilde{m} \tilde{\sigma}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D1 \\ C2 \\ D2 \\ V \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (1.32)$$

avec comme grandeurs adimensionnelles  $\tilde{\sigma} = \sigma l$ ,  $\tilde{k} = \frac{kl}{ES}$ ,  $\tilde{m} = \frac{m}{S\rho l}$ .

3. Dans le cas où  $\tilde{m} = 1$  et  $\tilde{k} = 1$ . La nullité du déterminant donne l'équation,

$$-\tilde{\sigma}^4 (\cos(\tilde{\sigma}))^2 + \tilde{\sigma}^3 \cos(\tilde{\sigma}) \sin(\tilde{\sigma}) - \sin(\tilde{\sigma}) + \sin(\tilde{\sigma}) (\cos(\tilde{\sigma}))^2 + 1 - (\cos(\tilde{\sigma}))^2 = 0, \quad (1.33)$$

dont les variations de  $det$  et de  $\ln(abs(det))$  en fonction de  $\tilde{\sigma}$  sont représentées figure 1.29. Commentez ces graphes. Que dire de la première pulsation propre  $\tilde{\sigma} = 1.57$ ?

E) Si l'on considère les poutres 1 et 1' sans masse, elles peuvent être remplacées par des ressorts de rigidité  $k'$ .

1. Quelle est la rigidité équivalente à l'assemblage en série de la poutre et de la pièce en caoutchouc?
2. Quelle est la pulsation propre de vibration dans la direction  $\vec{i}$  de la masse 2?
3. Comparez ce résultat au résultat précédent.

## Chapitre 2

### Exemple de grilles d'évaluation : (examen du portique)

item	% de réussite	brevet de préparation
dessin de la structure	96	
réactions à l'encastrement	82	3
charge répartie	25	5
méthode de détermination de l'isostatisme	64	14
degré d'isostatisme	63	
$R_{ax} = 0, R_{ay} = pb, M_a = pb^2/2$	25	
remplacement des inconnues aux liaisons par les chargements		
3 segments $AB, BC, CD$	61	
orientation de la poutre	60	1
définition torseur des efforts intérieurs	74	18
formule de changement de point	79	25
torseur des efforts int en $H_1$	25	5, 24
repère local	35	1, 24
type de sollicitations	46	24
utilisation de la formule de Bresse	27	3
$u_{ax} =$	4	3
torseur des efforts int en $H_2$	14	2, 5, 18
écriture complète des torseurs	47	
homogénéité des équations	83	
non confusion entre torseurs des efforts int, de chargement, et d'inter-effort		25