Examen du 7/12/07 : corrigé

Examen du 7/12/07

exercice 1

1) La force est la même dans les 2 ressorts $F_1 = F_2 = F$

le déplacement total est la somme des deux déplacements

$u = u_1 + u_2$

la loi de comportement des ressorts est $F_i = k_i u_i$

donc $$u = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}$$
$$= F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$
$$= F\left(\frac{k_2 + k_1}{k_1 k_2}\right)$$

donc la rigidité équivalente est $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

2) le déplacement est le même $u_1 = u_2$

la force totale est la somme des deux forces $F = F_1 + F_2$

d'où $$F = k_1 u_1 + k_2 u_2$$
$$= (k_1 + k_2) u$$

donc la rigidité équivalente est $k = k_1 + k_2$

Exercice 2

a) l'énergie cinétique est $T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$

l'énergie potentielle est $V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} 2k (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$

On en déduit

la matrice de masse M / $T = \frac{1}{2} [\dot{x}_1, \dot{x}_2]\, m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$

la matrice de raideur K /

$$V = \frac{1}{2} k \left[x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 \right]$$
$$= \frac{1}{2} k \left[3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 \right]$$
$$= \frac{1}{2} [x_1 \quad x_2]\, k \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

d'où les équations

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

On cherche une solution sous la forme $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sin \omega t$

Donc $\left[-\omega^2 m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sin \omega t = 0 \quad \forall t$

Pour qu'une solution existe $\neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, alors le déterminant suivant doit être nul.

$$\left| -\omega^2 m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(-\omega^2 m + 3k)(-\omega^2 m + 3k) - 4k^2 = 0$$

$$m^2 \omega^4 - 6mk\omega^2 + 5k^2 = 0$$

Posons $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\tilde{\omega}^4 - 6\tilde{\omega}^2 + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 36 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$
$$= 16$$
$$\sqrt{\Delta} = 4.$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{6-4}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad \tilde{\omega}_2^2 = \frac{6+4}{2} = 5$$

les deux pulsations propres sont.

$$\begin{cases} \omega_1 = 1 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{5} \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

Calcul des formes propres : le det $= 0$: on n'utilise qu'une seule eq.

- pour ω_1

$$-\omega_1^2 m \, X_1 + 3k X_1 - 2k X_2 = 0$$

$$-\tilde{\omega}_1^2 X_1 + 3X_1 - 2X_2 = 0$$

$$X_1 = X_2 \frac{2}{2}$$

$$X_1 = X_2$$

vecteur propre à ω_1 $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- pour ω_2

$$-\tilde{\omega}_2^2 X_1 + 3X_1 - 2X_2 = 0$$

$$X_1 = X_2 \frac{2}{-2}$$

$$X_1 = -X_2$$

vecteur propre à ω_2 $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) On cherche une solution de la forme $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sin \omega t$

$$\left[-\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3\omega_0^2 - \omega^2 & -2\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & 3\omega_0^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{eq\,1} \rightarrow \quad 2\omega_0^2 X_2 = (3\omega_0^2 - \omega^2) X_1 - F$

$$X_2 = \left(\frac{3}{2} - \tilde{\omega}^2 \right) X_1 - \frac{F}{2\omega_0^2}$$

$\underline{eq\,2} \rightarrow \quad \left[-2\omega_0^2 + (3\omega_0^2 - \omega^2)\left(\frac{3}{2} - \tilde{\omega}^2\right) \right] X_1 = \frac{(3\omega_0^2 - \omega^2)}{2\omega_0^2} F$

$$\omega_0^2 \left[-2 + (3 - \tilde{\omega}^2)\left(\frac{3}{2} - \tilde{\omega}^2\right) \right] X_1 = \frac{3 - \tilde{\omega}^2}{2} F$$

X_1 est nul si $\tilde{\omega} = 3$

la masse 1 est immobile si $\omega = 3\sqrt{\frac{k}{m}}$

Exercice 3

a) la force dans le ressort qui agit sur la masse est

$\vec{F}_r = -k(x - u)\,\vec{\imath}$ $\qquad \vec{\imath}$ vers le haut.

la force dans l'ammortisseur qui agit sur la masse est

$\vec{F}_v = -a(\dot{x} - \dot{u})\,\vec{\imath}$

l'équation de mouvement est obtenue à partir du PFD.

$$m\ddot{x} = -k(x - u) - a(\dot{x} - \dot{u})$$

Soit

$$\boxed{m\ddot{x} + a\dot{x} + kx = ku + a\dot{u}}$$

b) l'équation, en divisant par m, donne.

$$\ddot{x} + 2\omega_0\eta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 u + 2\omega_0\eta\,\dot{u}$$

Posons $x = X e^{j\omega t} e^{j\varphi}$ $\quad u = U e^{j\omega t}$

$$X e^{j\varphi} \left[-\omega^2 + 2\omega_0 \eta j\omega + \omega_0^2 \right] = U \left[\omega_0^2 + 2\omega_0 \eta j\omega \right]$$

$$X e^{j\varphi} = U \frac{\omega_0^2 + 2\omega_0\eta j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\omega_0\eta j\omega} = U \frac{1 + 2\eta h j}{1 - h^2 + 2\eta h j}$$

de la forme $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + j b_1}{a_2 + j b_2}$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^*} = \sqrt{\frac{z_1 \, z_1^*}{z_2 \, z_2^*}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

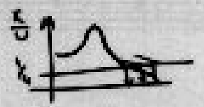
$$\left(\frac{a_1 + j b_1}{a_2 + j b_2}\right)^* = \left(\frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(b_1 a_2 + a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\right)^*$$

$$= \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2 - j(b_1 a_2 + a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{a_1 - j b_1}{a_2 - j b_2}$$

d'où $$\boxed{X = U \frac{\sqrt{1 + 4\eta^2 h^2}}{\sqrt{(1-h^2)^2 + 4\eta^2 h^2}}}$$

Il faut que $\frac{X}{U} = \frac{1}{4}$ donc



$$\frac{1 + 4\eta^2 h^2}{(1-h^2)^2 + 4\eta^2 h^2} = \frac{1}{16}$$

η	ω/ω_0
0,1	2,3
0,2	2,6
0,3	2,9
0,4	3,2

$$\frac{\omega}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2,3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{k} = \frac{\omega\sqrt{m}}{2,3} \quad \text{pour } \eta = 0,1$$

$$\sqrt{k} = \frac{\omega\sqrt{m}}{3,2} \quad \text{pour } \eta = 0,4$$