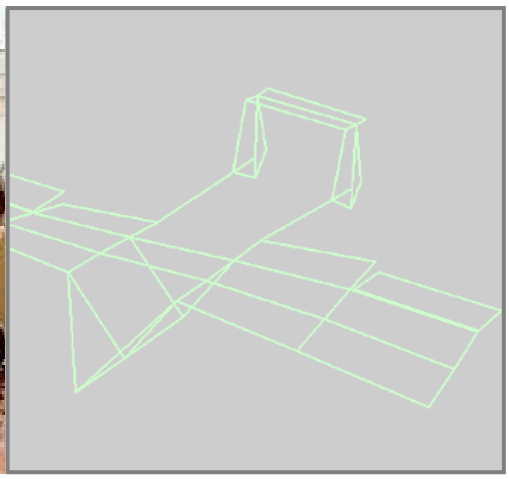
ENSIM 2A

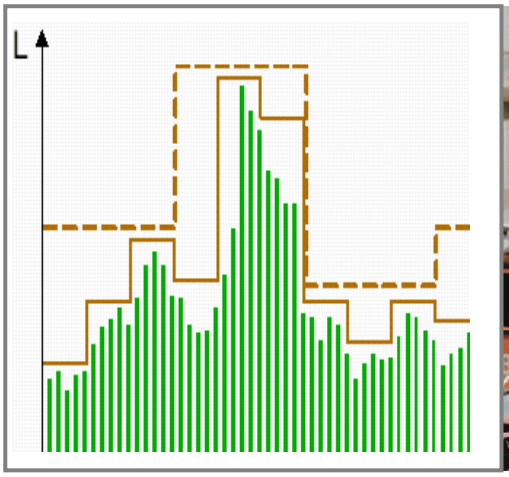
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'INGENIEURS DU MANS - UNIVERSITE DU MAINE

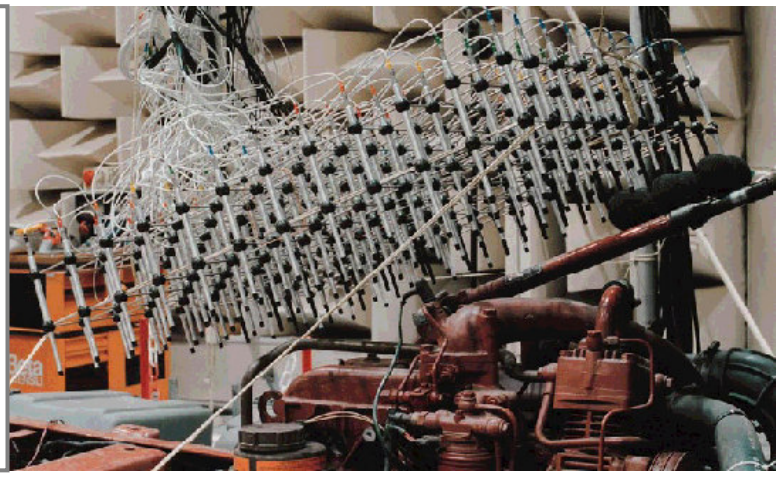




VIBRATIONS et ACOUSTIQUE 1

Jean-Claude Pascal





2007-2008

Cours Vibrations et Acoustique 1

Partie A : Vibrations

I - Vibrations libres des systèmes mécaniques à un degré de liberté
1 - Système mécanique élémentaire
2 - Amortissement visqueux
3 - Méthode énergétique de Rayleigh
4 - Notion de stabilité

II - Réponse forcée des systèmes mécaniques à un degré de liberté
1 - Réponse à une excitation harmonique
2 - Différents types d'amortissement
3 - Réponse à une excitation quelconque

III - Systèmes à plusieurs degrés de liberté
1 - Système à deux degrés de liberté
2 - Généralisation aux systèmes à plusieurs degrés de liberté
3 - Absorbeur dynamique
4 - Introduction à l'analyse modale expérimentale

Partie B : Acoustique

IV - L'équation d'onde acoustique et ses solutions
1 - Equation d'onde à une dimension
2 - Equation d'onde en 3D
3 - Ondes propagatives et ondes stationnaires
4 - Intensité et puissance acoustique

V - Notions d'acoustique physiologique et d'acoustique des salles
1 - Introduction à la physioacoustique
2 - Applications de l'acoustique statistique des salles

VI - Mesures acoustiques
1 - Chaine de mesure acoustique
2 - Mesure des caractéristiques des matériaux
3 - Mesure de la transparence acoustique
4 - Mesure de la puissance acoustique

Eléments de bibliographie

[1] *Acoustique générale* (P.J.T. Filippi, éd.), Les Editions de Physique, 1994.

[2] L.L. Beranek, I.L.Vér, *Noise and vibration control engineering,* J. Wiley, 1992.

[3] D.A. Bies, C.H. Hansen, *Engineering noise control* (2nd edition), E. and F. N. Spon, 1995.

[4] M. Bruneau, *Manuel d'acoustique fondamentale,* Hermès, 1998.

[5] A.P. Dowling, J.E. Ffowcs-Williams, *Sound and sources of sound*, Horwood, 1989.

[6] *Encyclopedia of acoustics,* (Tomes 1 à 4), (M.J. Crocker, éd.), Wiley-Interscience, 1997.

[7] *Encyclopedia of vibration,* (Tomes 1 à 3), (S.G. Braun, D.J. Ewins, S.S. Rao, éd.), Academic Press, 2002.

[8] D.J. Ewins, *Modal Testing : Theory, Practice, and Application* (2nd edition), Research Studies Press, 2000.

[9] F. Fahy, *Foundations of engineering acoustics*, Academic Press, 2001.

[10] *Fundamentals of noise and vibration,*(F. Fahy, J. Walker, éditeurs), E. and F. N. Spon, 1998.

[11] D.J. Inman, *Engineering Vibration*, Prentice Hall, 1996.

[12] M. Lalanne, J. Der Hagopian, P. Berthier, *Mécanique des vibrations linéaires*, Masson, 1986

[13] C. Lesueur et al., *Rayonnement acoustique des structures*, Eyrolles, 1988.

[14] S. Lévy, *Acoustique industrielle et aéroacoustique,* Hermès, 2001.

[15] J. Piranda, Analyse modale expérimentale, Vol RAB (Mesures et contrôle), ref. 6180, Techniques de l'Ingénieur, 2001.

[16] C. Potel, M. Bruneau, *Acoustique générale*, Ellipses, 2006.

[17] M.P. Norton, *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers,* Cambridge University Press, 1989.

[18] S.S. Rao, *Mechanical Vibrations* (3rd ed.), Addison-Wesley, 1995.

[19] A.A. Shabana, *Theory of vibration* (2nd ed.), Springer, 1995.

Répartition selon les parties du cours (*en italique, lectures complémentaires d'un niveau supérieur*)

Partie A : Vibrations	[11] [18] [19] [10] *[12] [13] [15] [8] [1]*
Partie B : Acoustique	[5] [9] [10] [14] [16] *[4] [1] [13]*
Général : Vibrations et acoustique industrielles	*[2] [3] [17] [10] [6] [7]*

Documentation sur l'acoustique et les vibrations

L'adresse des sites de l'Internet est indiquée, mais les changements d'hébergement sont encore fréquents.

Publications d'organismes sur l'acoustique industrielle

Brüel & Kjaer [http://www.bk.dk]

Documentation sur les méthodes de mesure et d'analyse en acoustique et vibrations
Acoustic noise measurements (5th ed.)
Noise control
Frequency analysis (3rd ed.)
Brüel & Kjaer Technical Review (publiée régulièrement de 1949 à 1998 puis épisodiquement)

Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM) [http://www.cetim.fr]

Recueils de conférences et guides pratiques :

Applications of Active Control to the Reduction of Noise and Vibrations (1996)
Les nouveaux outils de la qualité acoustique. Comment façonner l'image sonore de vos produits (1996)
Le bon usage du silencieux pour la réduction du bruit : machines, installations, véhicules (1997)
Guide acoustique des installations de pompage (1997)
Matériaux acoustiques pour l'industrie (2003)
Réduction du bruit au voisinage des usines (2003)

Centre d'Information et de Documentation sur le Bruit (CIDB) [http://www.infobruit.org]

- Annuaire Bruit des acteurs de l'environnement sonore édité chaque année (organismes publics, associations professionnelles, formations, laboratoires, organismes de contrôle, bureaux d'études, fabricants de matériaux acoustiques et d'instruments)
- Echo-Bruit (magazine trimestriel de l'environnement sonore pour le grand public et les collectivités locales)
- Acoustique & Techniques (revue trimestrielle destinée aux techniciens, acousticiens et tous professionnels concernés par les techniques de lutte contre le bruit)

Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB) [http://www.cstb.fr]

- Cahiers du CSTB (revue technique dans le domaine du bâtiment avec des articles sur le bruit)

Institut National de Recherche et de Sécurité (INRS) [http://www.inrs.fr]

- Cahiers de notes documentaires - Hygiène et sécurité du travail (revue trimestrielle scientifique et technique avec des articles sur la prévention du bruit)

Techniques de l'Ingénieur [http:/www.techniques-ingenieur.fr], voir en particulier la rubrique "mesures et contrôle"

Revues internationales

Les sites web permettent la plupart du temps d'avoir accès aux résumés des articles des dernières parutions.

Applied Acoustics [http://www.elsevier.com/inca/publications/store/4/0/5/8/9/0/]

Acustica united with acta acustica [http://www.icp.inpg.fr/ACTA/]

International Journal of Acoustics and Vibration [http://www.rcom.ru/IJAV/]

Journal of Acoustical Society of America [http://ojps.aip.org/jasa/]

Journal of Sound and Vibration [http://www.academicpress.com/jsv/]

Journal of Vibration and Acoustics (Transactions of ASME)
[http://www.asme.org/pubs/journals/vibrate/vibrate.html]

Noise Control Engineering Journal [http://users.aol.com/inceusa/indxncej.html]

Principales sociétés d'acoustique

Société Française d'Acoustique (SFA) [http://www.loa.espci.fr/sfa/]

Association Française de Mécanique (SFM) [http://www.afm.asso.fr/]

European Acoustics Association (EAA) [http://eaa.essex.ac.uk/eaa/]

International Institute of Noise Control Engineering (IINCE) [http://users.aol.com/iince1/] (et INCE USA [http://users.aol.com/inceusa/])

International Institute of Acoustics and Vibration (IIAV) [http://www.iiav.org]

Acoustical Society of America (ASA) [http://asa.aip.org]

Diverses sources de documentation et d'information

Association Française de Normalisation (AFNOR) : normalisation, certification, catalogues de normes, directives, formations, forums [http://www.afnor.fr]

Centre d'Information et de Documentation sur le Bruit (CIDB) : publications, bibliothèque documentaire, stages, colloques. Edite chaque année l'Annuaire des acteurs de l'environnement sonore (organismes publics, associations professionnelles, formations, laboratoires, organismes de contrôle, bureaux d'études, fabricants) [http://www.cidb.org]

Laboratoire National d'Essais (LNE) : métrologie acoustique, étalonnages, certification [http://www.lne.fr]

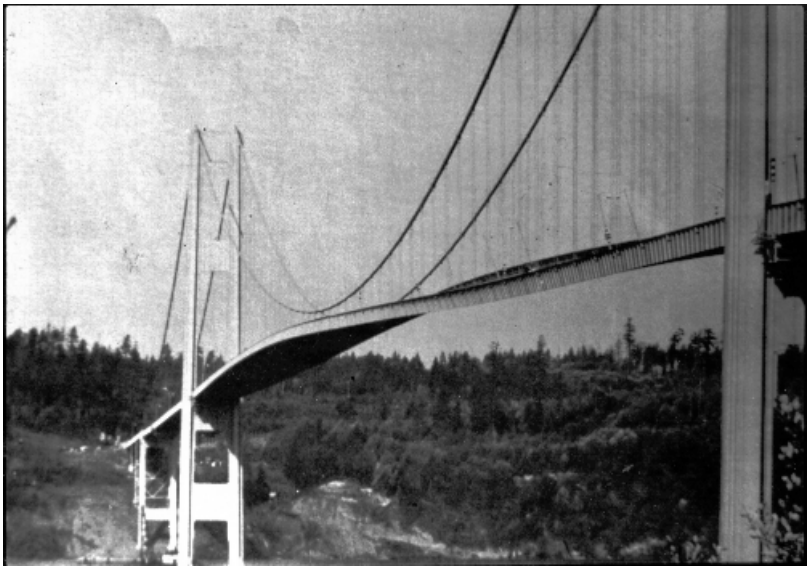
Institut de l'Information Scientifique et Technique (INIST-CNRS) : fourniture de documents scientifiques et techniques [http://www.inist.fr]

Réglementation

Les Journaux Officiels [http://djo.journal-officiel.gouv.fr/] chercher avec le mot clé "Bruit". En particulier :

- Législation communautaire en matière d'environnement /Volume 5 – Bruit
  Situation au 01.09.91 (Edition de 1993 - réf. : 3699100541)
  Situation au 30.06.94 (Edition de 1996, complément à l' Edition de 1993 - réf. : 3699600541)

- Bruit - Prévention, maîtrise et contrôle des nuisances sonores (réf. : 313830000, édition du 2 juin 1995)
  Cet ouvrage regroupe l'ensemble des textes législatifs et réglementaires d'origine nationale et communautaire qui régissent la prévention, la maîtrise et le contrôle des nuisances sonores.





Pont de Tacoma (USA) **- 7 Novembre 1940**

Quelques théories
http://www.me.utexas.edu/~uer/papers/paper_jk.html
Modélisation de l'instabilité aérodynamique
http://www-sop.inria.fr/caiman/AIIFS/perspectives.html

I - VIBRATIONS LIBRES DES SYSTEMES MECANIQUES A UN DEGRE DE LIBERTE

1. SYSTEME MECANIQUE ELEMENTAIRE

1.1 - Equation du mouvement
1.2 - Raideurs équivalentes
1.3 - Masses équivalentes
1.4 - Linéarisation
Application 1 : *Détermination de la fréquence propre*

2. AMORTISSEMENT VISQUEUX

2.1 - Mouvement sous-amorti
2.2 - Mouvement sur-amorti
2.3 - Mouvement avec amortissement critique
2.4 - Equation normalisée d'un système à 1 degré de liberté
Application 2 : *Mesure du taux d'amortissement 1*

3. METHODE ENERGETIQUE DE RAYLEIGH

3.1 - Equation du mouvement
3.2 - Pulsations propres
3.3 - Exemples

4. NOTION DE STABILITE

ANNEXE : *Equations différentielles et mouvement harmonique*

1 – SYSTEME MECANIQUE ELEMENTAIRE

Le **modèle** du système mécanique élémentaire considère le mouvement d'une masse (corps rigide) par rapport à une partie fixe. On parle de système à 1 **degré de liberté** (DDL) quand la masse unique a un mouvement dans une seule direction (translation ou rotation autour d'un axe). Si une ou plusieurs masses ont des mouvements de translation et de rotation dans plusieurs directions, il s'agit d'un système à plusieurs degrés de liberté. Malgré sa simplicité le système à 1 DDL peut représenter le **comportement dynamique** de systèmes très variés dans le domaine des basses fréquences. La **modélisation** considère une **masse équivalente** en mouvement qui possède des liaisons avec les parties fixes caractérisées par une **raideur équivalente** (souvent schématisé par un ressort).

1.1 - Equation du mouvement

Il existe principalement deux types de systèmes : les systèmes de translation et les systèmes de torsion.

1.1.1 – Systèmes avec mouvement de translation

Ils sont schématisés par le système masse – ressort : la masse m [en kg] est animée d'un mouvement de translation dans la direction x auquel s'oppose la force due à la raideur du ressort. Dans le domaine linéaire du ressort, le coefficient de raideur k [en N/m] est une constante et la force de réaction $F_k = -kx$.

Le principe d'Alembert permet d'écrire l'équilibre dynamique du système masse-ressort (*Figure 1.1*)

$$F_k(t) = F_i(t)$$

entre la **force dynamique** $F_i(t) = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$

et la **force de réaction** exercée par le ressort $F_k(t) = -kx$

(*le signe – est du à la force qui s'oppose au déplacement*)

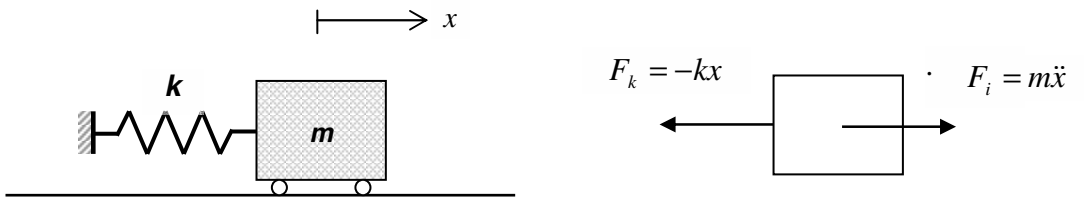


Figure 1.1 – Equilibre du système masse-ressort

L'équation différentielle du mouvement (homogène du second ordre) se déduit de l'équation d'équilibre précédente

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \qquad (1)$$

Sa solution (voir Annexe) est une fonction périodique pour le déplacement

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{2a}$$

A et ϕ sont l'amplitude et la phase qui dépendent des conditions initiales et ω est la pulsation (ou fréquence angulaire)

vitesse : $$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = \omega A\cos(\omega t + \phi) \tag{2b}$$

accélération : $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) \tag{2c}$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$-m\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) = -kA\sin(\omega t + \phi)$$

La **pulsation naturelle** est la valeur de ω qui satisfait la relation

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{[en rad/s]} \tag{3}$$

ω_0 ne dépend que des constantes mécaniques du système. Les constantes A et ϕ dépendent des conditions initiales ($\ddot{x}$ est intégré deux fois pour obtenir x, d'où deux constantes d'intégration). Les conditions initiales sont le déplacement x_0 et la vitesse v_0 à l'instant $t = 0$:

$$x_0 = x(0) = A\sin(\omega_0 0 + \phi) = A\sin\phi \qquad \text{[m]}$$
$$v_0 = \dot{x}(0) = \omega_0 A\cos(\omega_0 0 + \phi) = \omega_0 A\cos\phi \qquad \text{[m/s]}$$

donc $\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2 = \omega_0^2 A^2\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right)$ et $\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi} = \dfrac{\omega_0 x_0}{v_0}$, soit

$$A = \frac{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \phi = \arctan\frac{\omega_0 x_0}{v_0} \tag{4}$$

Le déplacement

$$\boxed{x(t) = \frac{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t + \arctan\frac{\omega_0 x_0}{v_0}\right)} \tag{5}$$

est la **réponse libre** du système à 1 degré de liberté non-amorti.

C'est une fonction harmonique à la pulsation naturelle ω_0 dont l'amplitude est imposée par les conditions initiales. Cette amplitude reste constante car la modélisation n'a pas pris en compte le phénomène de dissipation d'énergie présent dans tout système mécanique. Dans la réalité, une décroissance de l'amplitude avec le temps sera observée.

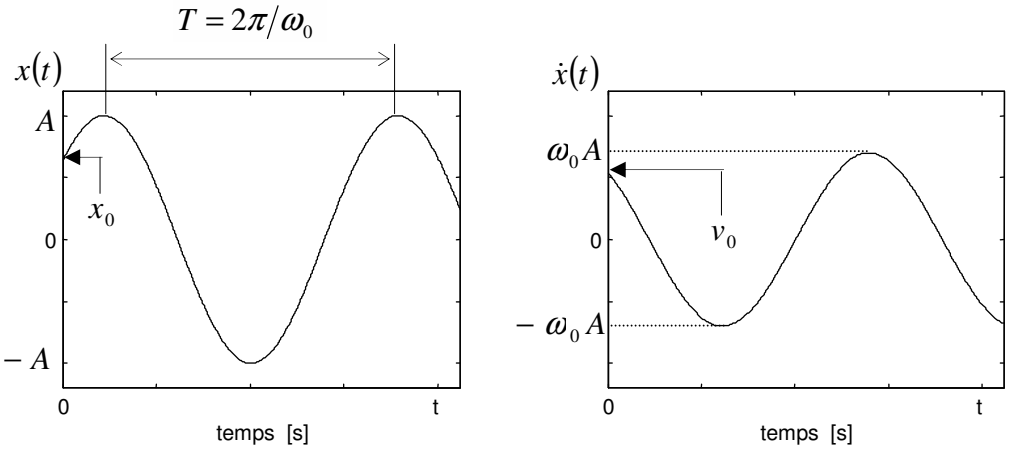


Figure 1.2 – Réponse libre du système à un degré de liberté (déplacement et vitesse) de pulsation propre $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Remarque 1

La solution de l'équation différentielle peut aussi s'exprimer par la somme d'une fonction sinus et d'une fonction cosinus :

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi) = A\sin\phi\cos\omega_0 t + A\cos\phi\sin\omega_0 t = B_1\cos\omega_0 t + B_2\sin\omega_0 t$$

En utilisant cette forme de solution, les conditions initiales conduisent à

$$x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t\,.$$

Il est aussi possible d'exprimer la solution à l'aide d'une seule fonction cosinus

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) = A\cos\theta\cos\omega_0 t + A\sin\theta\sin\omega_0 t$$

A partir de l'expression précédente

$$A\cos\theta = x_0$$
$$A\sin\theta = -v_0/\omega_0$$

ce qui permet de retrouver la même amplitude que précédemment

$$A = \sqrt{A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta} = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}$$

et conduit à la phase

$$\theta = \arctan\frac{-v_0}{\omega_0 x_0}$$

On note qu'il existe une relation entre θ et ϕ l'angle de phase associée à la solution sinus car

$$\tan\theta = \frac{-v_0}{\omega_0 x_0} = -\cot\phi \quad \text{d'où} \quad \theta = \phi - \pi\,.$$

Remarque 2

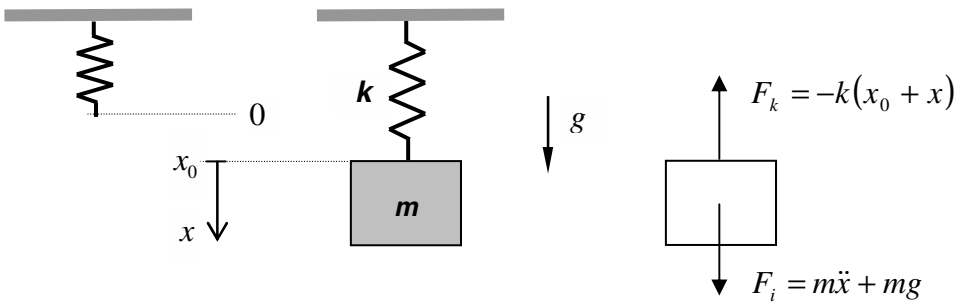


Figure 1.3 – Système masse-ressort suspendu

Système suspendu : au repos, la masse exerce une force de traction mg sur le ressort qui se traduit par un étirement initial x_0. L'équation du mouvement s'obtient à partir de l'équilibre dynamique des forces appliquées à la masse : $F_k(t) - F_i(t) = 0$

$$m\ddot{x} + mg + kx + kx_0 = 0$$

Avec $mg = -kx_0$, on obtient la même équation du mouvement $x(t)$ que précédemment (centrée sur la position d'équilibre x_0).

1.1.2 – Systèmes de torsion

Un corps rigide oscille autour d'un axe (vibration de torsion).

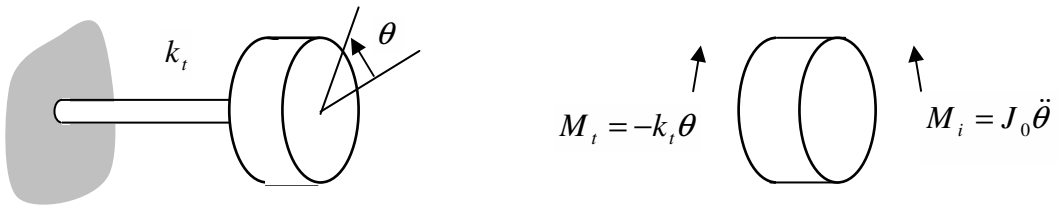


Figure 1.4 – Equilibre d'un système de torsion.

L'équilibre dynamique entre le moment dynamique $M_i(t) = J_0 \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = J_0\ddot{\theta}$ et le moment de torsion $M_t(t) = -k_t\theta$ permet d'écrire l'équation du déplacement angulaire $\theta(t)$

$$J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = 0 \qquad (6)$$

J_0 moment d'inertie de la masse et k_t raideur de torsion [en Nm/rad].
La pulsation naturelle est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \qquad \text{[rad/s]} \qquad (7)$$

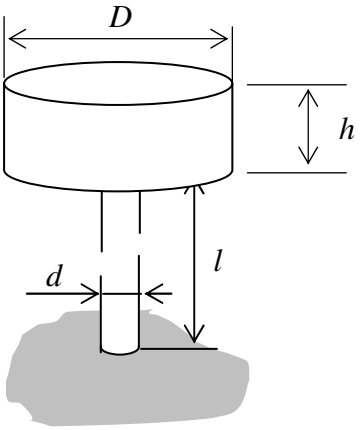
et la **réponse libre** du système non-amorti

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{\omega_0^2\theta_0^2 + \dot{\theta}_0^2}}{\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \arctan\frac{\omega_0\theta_0}{\dot{\theta}_0}\right) \tag{8}$$

Exemple : pour un disque de diamètre D et d'épaisseur h, à l'extrémité d'un arbre de longueur l et de diamètre d

$$J_0 = \frac{mD^2}{8} \quad \text{et} \quad k_t = \frac{G\pi d^2}{32\,l}$$

avec la masse $m = \rho h \dfrac{\pi D^2}{4}$ et le module de cisaillement G.



1.2 – Raideurs équivalentes

Le modèle le plus simple pour représenter la raideur correspond au ressort suspendant une masse. En négligeant la masse du ressort, les forces agissant sur la masse sont

- la force de gravité $F = mg$
- la force de réaction du ressort $F_k = -kx$

Le travail effectué en déformant le ressort est stocké dans le système sous la forme d'une **énergie potentielle** (travail de la force: $F = kx$)

$$U = \int_0^x k\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}kx^2$$

Le coefficient de raideur k est une constante qui montre que la force de réaction est proportionnelle à la déformation (qui augmente avec la masse). Ce modèle est valide jusqu'à un certain point au-delà duquel k n'est plus constant.

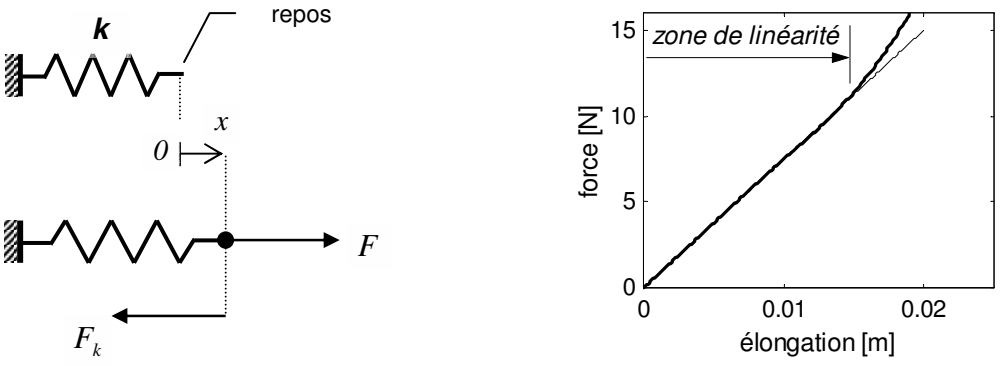


Figure 1.5 – Zone de comportement linéaire d'un ressort de constante k = 750 N/m.

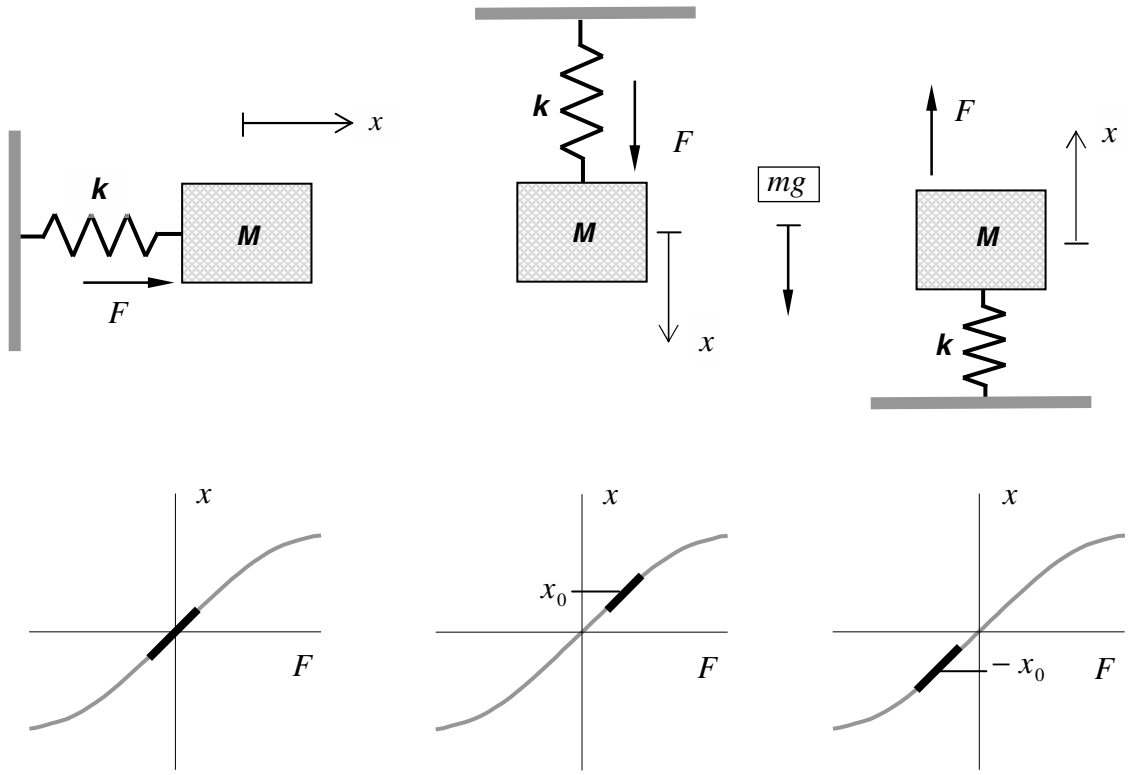


Figure 1.6 – Trois configurations pour un système masse ressort

1.2.1 – Raideurs en parallèle

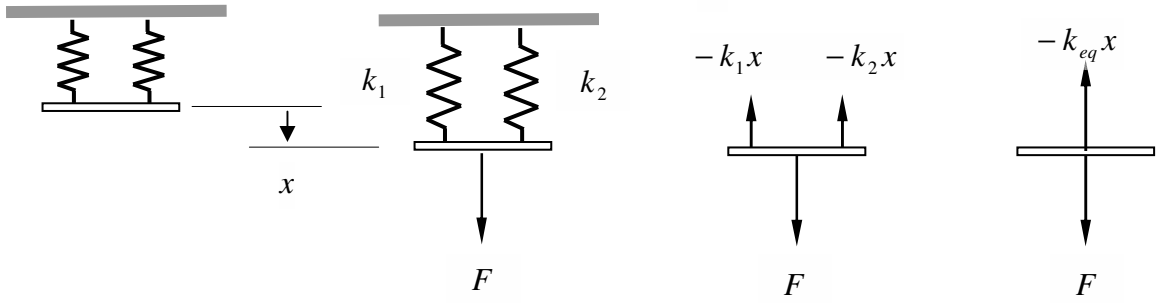


Figure 1.7 – Raideurs en parallèle

$$F = k_1 x + k_2 x = k_{eq} x$$

La raideur équivalente est la somme des raideurs k_1 et k_2

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

Ce résultat se généralise pour n raideurs en parallèle

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \ldots + k_n \qquad (10)$$

1.2.2 – Raideurs en série

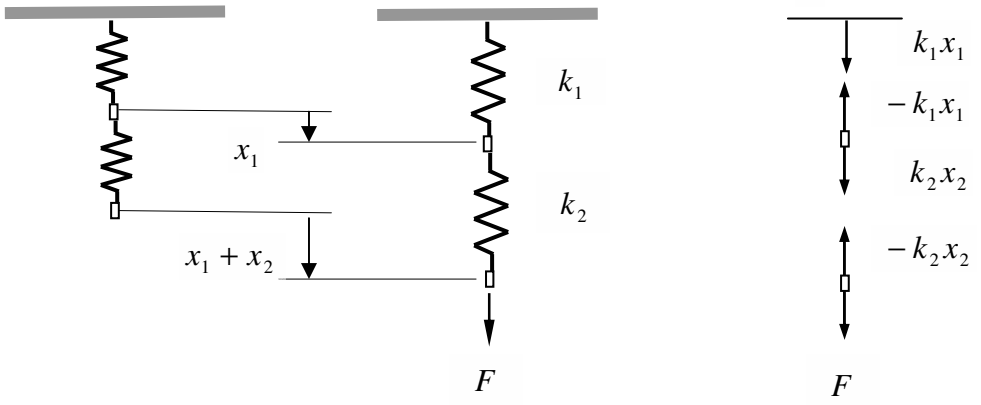


Figure 1.8 – Raideurs en série

L'équilibre des forces conduit aux relations suivantes :

$$k_1 x_1 = k_{eq} x \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{k_{eq}}{k_1} x$$

$$k_2 x_2 = k_{eq} x \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{k_{eq}}{k_2} x$$

L'élongation totale s'écrit alors $x = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{k_{eq}}{k_1} + \frac{k_{eq}}{k_2} \right) x$

d'où

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Ce résultat se généralise pour n raideurs en série

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}$$

1.2.3 – Raideurs de flexion

Dans l'ouvrage de Rao (*voir Références*), des raideurs de flexion (translation) et de torsion sont données pour quelques systèmes mécaniques simples. Elles peuvent être obtenues en utilisant les résultats du cours de RDM. Par exemple, la déformation statique d'une poutre sur appuis simples chargée par une masse M se calcule par

$$y(x) = \frac{Pbx}{6EIL}\left(L^2 - b^2 - a^2\right)$$

avec $L = a + b$

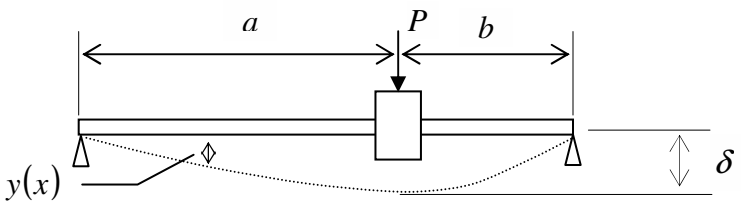


Figure 1.9 – Raideur équivalente d'un système masse-poutre

La **raideur équivalente** de la poutre s'obtient par ($k_{eq}\delta = Mg = P$)

$$k_{eq} = \frac{P}{\delta} = \frac{Mg}{\delta}$$

où $\delta = y(a) = \frac{Pa^2b^2}{3EIL}$ est la déflexion de la poutre à l'emplacement de la masse ($x = a$), d'où

$$k_{eq} = \frac{P}{\delta} = \frac{3EIL}{a^2b^2}$$

1.3 – Masses équivalentes

Principe : Si T correspond à l'**énergie cinétique totale** de toutes les masses en mouvement (en translation et en rotation),

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \sum_j \frac{1}{2} J_j \dot{\theta}_j^2$$

la masse équivalente est définie par

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2}$$

$\dot{x}$ est la vitesse au point où on veut calculer la masse équivalente (généralement, où se trouve définit la raideur équivalente).

Note :

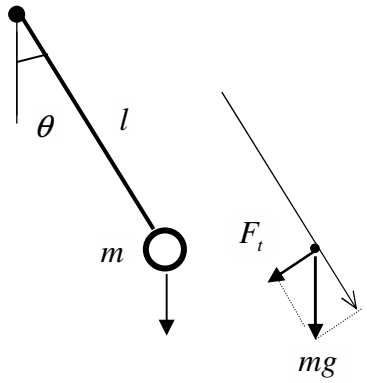
a) les masses en mouvement doivent être connectées rigidement entre elles sinon il s'agit d'un système à plusieurs degrés de liberté.

b) pour les systèmes en mouvements de rotation, on considère le moment d'inertie équivalent

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2$$

1.4 – Linéarisation

1.4.1 – Pendule simple



$$J_0 \ddot{\theta} = M_t$$
$$M_t = F_t l = -mg\, l \sin\theta$$

Figure 1.10 – Pendule simple

Equation différentielle : $J_0\ddot{\theta} + mgl \sin\theta = 0$

Linéarisation pour les petits mouvements: $\sin\theta \approx \theta \quad \Rightarrow \quad J_0\ddot{\theta} + mgl\,\theta = 0$

avec $J_0 = ml^2$

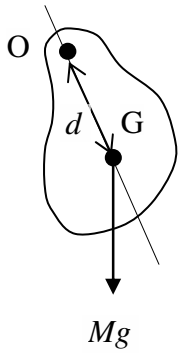
$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$

La pulsation propre du système est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

1.4.2 – Pendule composé

G : centre de gravité



$$J_0\ddot{\theta} + Mgd \sin\theta = 0$$

$$J_0\ddot{\theta} + Mgd\,\theta = 0 \qquad \text{(Eq. linéarisée)}$$

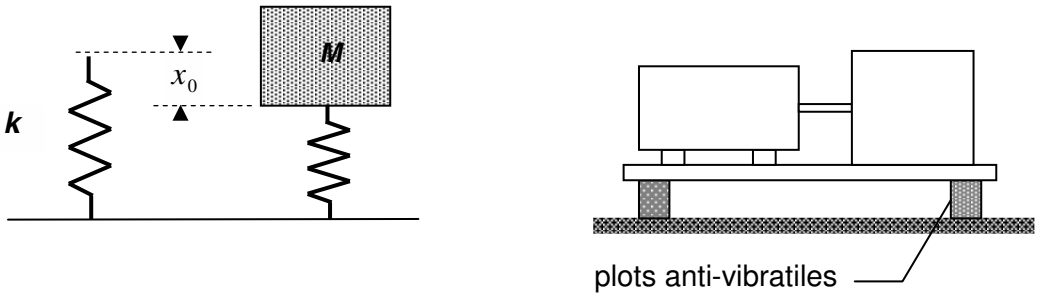
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgd}{J_0}}$$

Figure 1.11 – Pendule composé

Longueur équivalente du pendule simple : $l = \dfrac{J_0}{Md}$

[APPLICATION 1] *Détermination de la fréquence propre*

Détermination de la fréquence propre à partir de l'écrasement x_0 du système de suspension



$$kx_0 = Mg$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{Mg/x_0}{M}}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x_0}}}$$

Figure 1.12 – Fréquence propre des plots anti-vibratiles

Ce principe s'applique également aux systèmes continus : ici une masse fixée sur une poutre. Si la masse de la poutre est négligeable devant la masse de l'ensemble, la poutre n'apportera que de la raideur au système (mouvement de flexion). La déflexion statique δ observée à l'emplacement de la masse permet d'obtenir la première fréquence propre du système

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta}}$$

Par exemple, pour le système de la Figure 1.9 : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{3EIL}{M\,a^2 b^2}}$.

2 – AMORTISSEMENT VISQUEUX

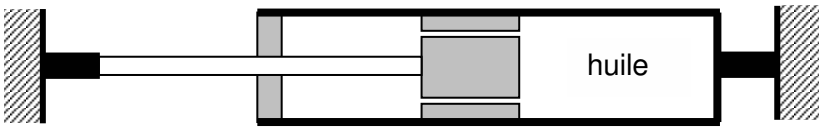
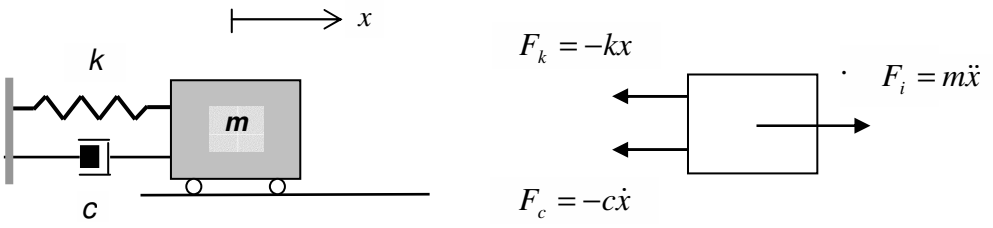


Figure 1.13 – Exemple d'amortisseur

L'amortisseur dissipe l'énergie. L'écoulement laminaire de l'huile crée une force de réaction proportionnelle à la vitesse du piston

$$F_c = -c\frac{dx(t)}{dt}$$

Le **coefficient d'amortissement** c dépend de la viscosité [en Ns/m]
Autre type d'amortisseur sensiblement proportionnel à la vitesse : un bloc de caoutchouc.



Equilibre des forces :

$$F_k + F_c - F_i = 0$$

d'où

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt^2} + kx(t) = 0$$

l'équation décrivant le mouvement d'un système amorti à 1 degré de liberté. En posant $x(t) = \alpha\, e^{rt}$, cette équation devient $\left(mr^2 + cr + k\right)\alpha\, e^{rt} = 0$. Puisque $\alpha\, e^{rt}$ ne peut pas être nul quel que soit t, c'est l'**équation caractéristique** suivante qui doit être vérifiée

$$mr^2 + cr + k = 0 .$$

Ses solutions sont

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m} .$$

Plusieurs types de solutions sont envisageables en fonction de la valeur du discriminant $c^2 - 4km$: deux racines réelles, une racine double ou deux racines complexes.
Pour faciliter l'analyse, on définit le **coefficient d'amortissement critique** c_{cr}

$$c_{cr}^2 - 4km = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0$$

ω_0 pulsation naturelle non-amortie (fréquence ou pulsation propre)
Définition du **taux d'amortissement**

$$\boxed{\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_0}}$$

Les racines de l'équation caractéristiques peuvent donc s'écrire en fonction du taux d'amortissement

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad\qquad x(t) = \alpha_1\, e^{r_1 t} + \alpha_2\, e^{r_2 t}$$

En fonction de la valeur de ζ, trois types de mouvement peuvent être observés :

- le mouvement sous-amorti (oscillations vibratoires amorties),
- le mouvement sur-amorti (retour à la position d'équilibre sans oscillations),
- le mouvement avec amortissement critique, qui correspond à la limite entre les deux cas précédents.

2.1 – Mouvement sous-amorti $(0 < \zeta < 1)$

$$r_1 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2} \qquad\qquad r_2 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

avec $j = -\sqrt{-1}$ et $\sqrt{\zeta^2 - 1} = \sqrt{(-1)\left(1 - \zeta^2\right)} = -j\sqrt{1 - \zeta^2}$.

La solution de l'équation différentielle est de la forme

$$x(t) = \left(a_1\, e^{j\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t} + a_2\, e^{-j\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t} \right) e^{-\zeta\omega_0 t}$$

a_1, a_2 sont des constantes complexes arbitraires

$$\boxed{x(t) = A\, e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi)}$$

où A et ϕ sont les constantes d'intégration et ω_d est la **pseudo-pulsation** (fréquence naturelle amortie)

$$\boxed{\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes

$$A = \sqrt{\frac{(v_0 + \zeta\,\omega_0 x_0)^2 + (x_0\omega_d)^2}{\omega_d^2}}$$

$$\phi = \arctan\frac{x_0\omega_d}{v_0 + \zeta\,\omega_0 x_0}.$$

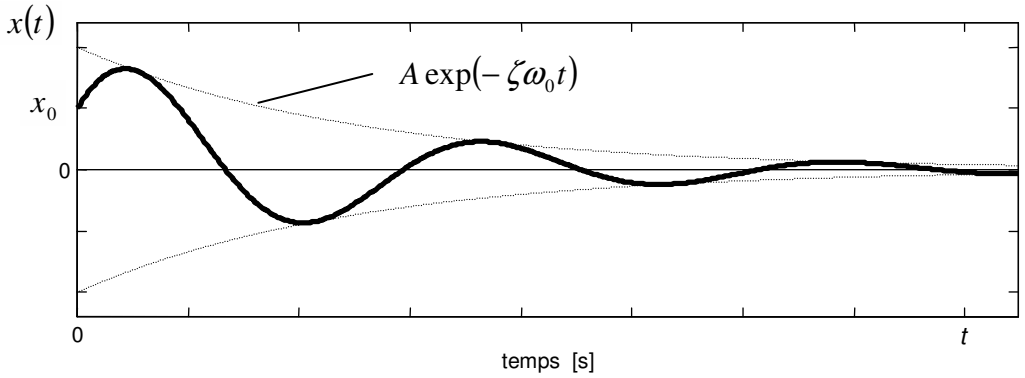


Figure 1.14 - Réponse libre d'un système sous-amorti ($\zeta < 1$)

2.2 – Mouvement sur-amorti ($\zeta > 1$)

$$r_1 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad r_2 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

La solution pour le déplacement est

$$\boxed{x(t) = \left(a_1\, e^{\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_0 t} + a_2\, e^{-\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_0 t}\right) e^{-\zeta\omega_0 t}}$$

a_1 et a_2 sont réels.

Les conditions initiales

$$x_0 = x(0) = a_1 + a_2$$

$$v_0 = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left(-\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)a_1 + \left(-\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)a_2$$

conduisent à

$$a_1 = \frac{v_0 + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_0 x_0}{2\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}} \qquad \text{et} \qquad a_2 = \frac{-v_0 + \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_0 x_0}{2\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Un système sur-amorti n'est pas un oscillateur.

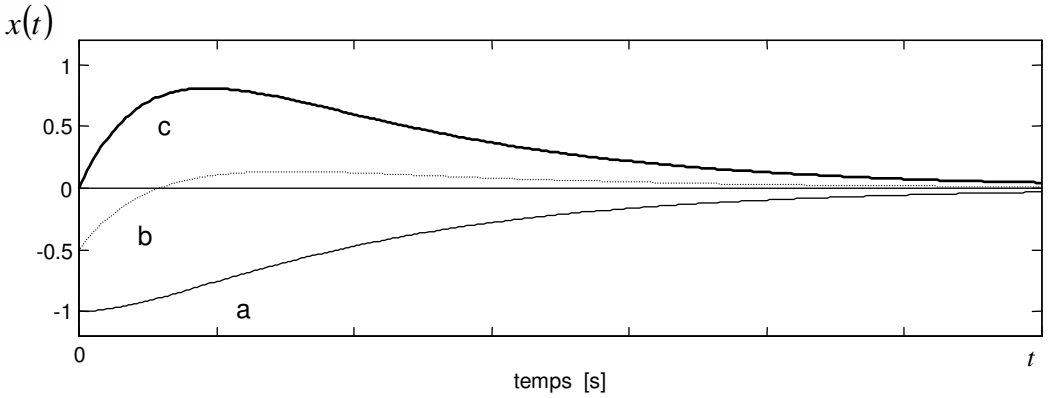


Figure 1.15 - Réponse libre d'un système sur-amorti ($\zeta > 1$)
a) $x_0 = -1$ *et* $v_0 = 0$, b) $x_0 = -0.5$ *et* $v_0 = 3$, c) $x_0 = 0$ *et* $v_0 = 5$.

2.3 – Mouvement avec amortissement critique ($\zeta = 1$)

C'est la valeur de ζ qui sépare le mouvement oscillant d'un mouvement non-oscillant. La racine double fournit une solution particulière

$$r_1 = r_2 = -\zeta\omega_0 = -\omega_0 .$$

La solution générale de toute équation différentielle du second ordre est donnée par la combinaison linéaire de deux solutions particulières indépendantes. La première solution est

$$x_1 = e^{-\omega_0 t}$$

L'intégration complète de l'équation différentielle se fait en définissant une deuxième solution de la forme $x_2 = z(t)\, e^{-\omega_0 t} = (\alpha + \beta t)\ e^{-\omega_0 t}$, ce qui conduit à la solution générale

$$x(t) = x_1 + x_2 = (a_1 + a_2 t)\, e^{-\omega_0 t}$$

Les conditions initiales permettent d'identifier les constantes

$$x_0 = a_1$$

$$v_0 = \left(-\omega_0 a_1 + a_2\, e^{-\omega_0 t} - \omega_0 a_2\, t\, e^{-\omega_0 t}\right)\Big|_{t=0} = -\omega_0 a_1 + a_2$$

est d'obtenir la solution cherchée

$$x(t) = (x_0 + \omega_0 x_0 t + v_0 t)\, e^{-\omega_0 t}$$

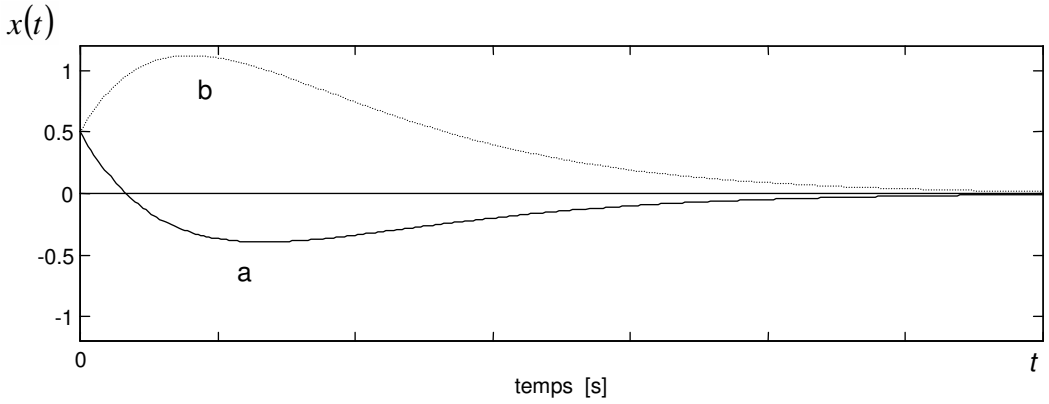


Figure 1.16 - Réponse libre d'un système ayant un amortissement critique ($\zeta = 1$)
a) $x_0 = 0.5$ *et* $v_0 = -4$, b) $x_0 = 0.5$ *et* $v_0 = 4$.

2.4 – Equation normalisée d'un système à 1 degré de liberté

L'équation différentielle du mouvement d'un système à 1 ddl est souvent représentée avec des termes normalisés par rapport à la masse m :

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

En considérant $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ et puisque $\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$, on obtient la relation $\frac{c}{m} = 2\omega_0\zeta$ qui conduit à la forme normalisée de l'équation différentielle

$$\ddot{x} + 2\zeta\,\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$$

[APPLICATION 2] *Mesure du taux d'amortissement*

Le coefficient d'amortissement ou le taux d'amortissement sont les plus délicats à déterminer. Si la masse et la raideur peuvent être déterminées par des tests statistiques, l'amortissement nécessite une mesure dynamique.

Une approche consiste à mesurer la décroissance de l'enveloppe pour un système **sous-amorti :** les points de mesure $x(t_1)$ et $x(t_2)$ correspondent à $A\, e^{-\zeta\omega_0 t_1}$ et à $A\, e^{-\zeta\omega_0 t_2}$.

Cette approche conduit au concept de **décrément logarithmique** :

$$\boxed{\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}}$$

avec $T = \dfrac{2\pi}{\omega_d}$ la pseudo-période d'oscillation.

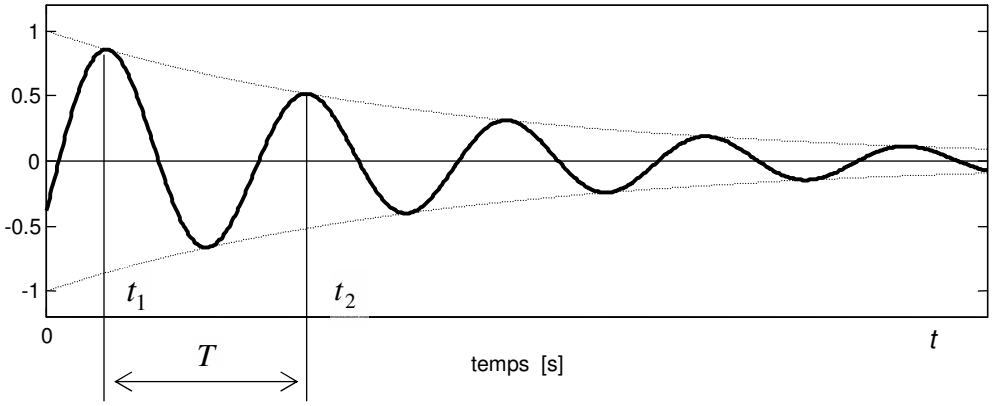


Figure 1.17 – Réponse libre amortie

avec $x(t) = A\, e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi)$. Puisque $\omega_d T = 2\pi$,

$$x(t+T) = A\, e^{-\zeta\omega_0 (t+T)} \sin(\omega_d t + \omega_d T + \phi) = A\, e^{-\zeta\omega_0 t}\, e^{-\zeta\omega_0 T} \sin(\omega_d t + \phi)$$

on obtient

$$\delta = \ln e^{\zeta\omega_0 T} = \zeta\omega_0 T .$$

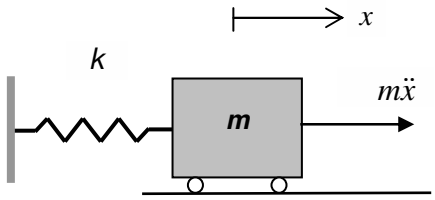
En posant $T = \dfrac{2\pi}{\omega_d} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$, le décrément logarithmique s'écrit $\delta = \dfrac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ et permet d'exprimer le taux d'amortissement

$$\boxed{\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}}$$

Le décrément est obtenu par des mesures en t_1 et t_2 par $\delta = \ln \dfrac{x(t_1)}{x(t_2)}$. Connaissant m, k et ζ il est aussi possible de calculer le coefficient d'amortissement

$$c = 2\zeta\sqrt{km} .$$

3 – METHODE ENERGETIQUE DE RAYLEIGH



$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\dot{x}(t) = \omega_0\, A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Figure 1.18 – Déplacement et vitesse d'un système à 1 ddl en vibration libre

En faisant l'hypothèse qu'il n'y a pas d'énergie dissipée :

Energie potentielle en fonction du temps

$$U(t) = \int_0^x k\,\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} k\, A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

Energie cinétique en fonction du temps

$$T(t) = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m\, \omega_0^2\, A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

En considérant $k = m\omega_0^2$,

$$U(t) + T(t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \left[\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi)\right]$$

$$= \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} k\, A^2$$

L'énergie totale instantanée du système **conservatif** en mouvement est proportionnelle à A^2 et indépendante du temps t :

$$\boxed{U(t) + T(t) = \text{Cte}, \qquad \forall t}$$

Deux conséquences importantes :

1) La dérivée de l'énergie totale (potentielle + cinétique) est nulle, d'où la **relation R1**

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(U(t) + T(t))}{\mathrm{d}t} = 0}$$

2) A deux instants t_1 et t_2 quelconques

$$U(t_1) + T(t_1) = U(t_2) + T(t_2)$$

En choisissant t_1 et t_2, tels que

si $U(t_1) = U_{\max}$ alors $T(t_1) = 0$

si $U(t_2) = 0$ alors $T(t_2) = T_{\max}$

on obtient la **relation R2**

$$\boxed{U_{\max} = T_{\max}}$$

valable pour les **systèmes conservatifs soumis à des mouvements harmoniques**. Ce principe de conservation est utilisé :

- pour obtenir des équations du mouvement,
- pour calculer directement la pulsation naturelle des systèmes.

3.1 – Equation du mouvement

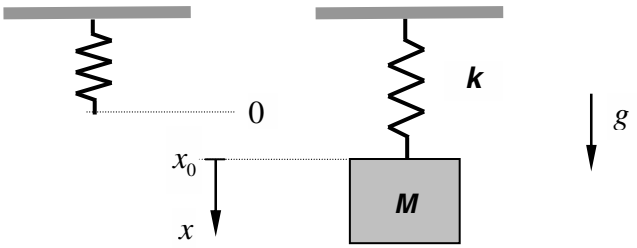


Figure 1.19 – Masse suspendue en vibration libre

L'énergie potentielle totale du système est la somme de l'énergie potentielle élastique du ressort et de l'énergie potentielle gravitationnelle. Toutes les deux doivent être exprimées comme un changement à partir d'une position arbitraire. On choisit ici (*voir Figure 1.19*) la position d'équilibre x_0 qui correspond à une énergie élastique stockée dans le ressort

$$U_1 = \frac{1}{2} k\, x_0^2 .$$

L'énergie potentielle U_2 à une distance x de la position d'équilibre correspond à une augmentation de l'énergie élastique qui devient $\frac{1}{2}k(x_0 + x)^2$ et une diminution de l'énergie potentielle mgx due au changement de position

$$U_2 = \frac{1}{2} k(x_0 + x)^2 - mgx .$$

La différence d'énergie potentielle est

$$U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2} k\, x_0^2 + \frac{1}{2} k\, x^2 + k\, x_0\, x - mg\, x - \frac{1}{2} k\, x_0^2$$

et en considérant que $kx_0 = mg$, il reste

$$U = \frac{1}{2} k\, x^2 .$$

L'énergie totale (cinétique + potentielle) est

$$T + U = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k\, x^2 = \text{Constante}$$

et sa dérivée par rapport au temps (**R1**)

$$\frac{d(T+U)}{dt} = m\, \ddot{x}\, \dot{x} + k\, \dot{x}\, x = 0$$

Puisque la vitesse $\dot{x}$ n'est pas identiquement nulle (quel que soit t) dans l'expression précédente, on peut en déduire l'équation différentielle du mouvement

$$m\, \ddot{x} + k\, x = 0$$

3.2 – Pulsation propre

La méthode énergétique peut aussi être utilisée pour obtenir la fréquence propre (naturelle) des systèmes oscillants conservatifs. Il suffit d'appliquer la relation :

$$U_{\max} = T_{\max} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} m\, v_{\max}^2 = \frac{1}{2} k\, x_{\max}^2$$

Pour un mouvement périodique d'amplitude A et de pulsation propre ω_0, $x_{\max} = A$ et $v_{\max} = \omega_0 A$, d'où

$$\frac{1}{2} m\, \omega_0^2\, A^2 = \frac{1}{2} k\, A^2$$

ce qui conduit à

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

3.3 – Exemples

3.3.1 – Pendule simple

La masse est supposée quasiment ponctuelle par rapport à la longueur l du bras et la masse du bras est considérée comme négligeable. Dans ces conditions, le moment d'inertie autour de l'axe est

$$J_0 = ml^2$$

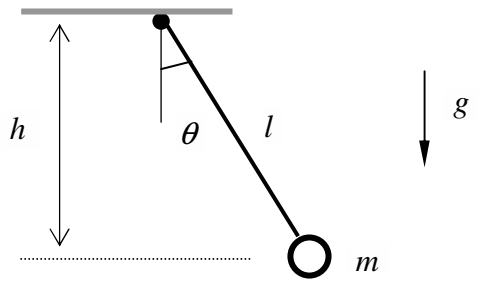


Figure 1.20 – Pendule simple

Le déplacement angulaire est mesuré à partir de la position d'équilibre. L'énergie cinétique du système est

$$T = \frac{1}{2} J_0 \, \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \, \dot{\theta}^2 ,$$

et l'énergie potentielle

$$U = m g \left(l - h \right) = m g l \left(1 - \cos\theta \right).$$

La dérivée de l'énergie totale s'écrit alors

$$\frac{d\left(T+U\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m l^2 \, \dot{\theta}^2 + m g l \left(1 - \cos\theta \right) \right] = 0$$

$$m l^2 \, \dot{\theta} \, \ddot{\theta} + m g l \left(\sin\theta \right) \dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\theta} \left(l \ddot{\theta} + g \sin\theta \right) = 0 .$$

La vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ ne peut être nulle à tout instant donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$ et après linéarisation pour les petits mouvements ($\sin\theta \approx \theta$)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Cette équation permet de calculer le déplacement angulaire et la pulsation naturelle $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ du pendule.

> Note : La méthode énergétique peut aussi s'appliquer directement sur l'approximation des petits déplacements : $1 - \cos\theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cong 2 \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{\theta^2}{2}$.

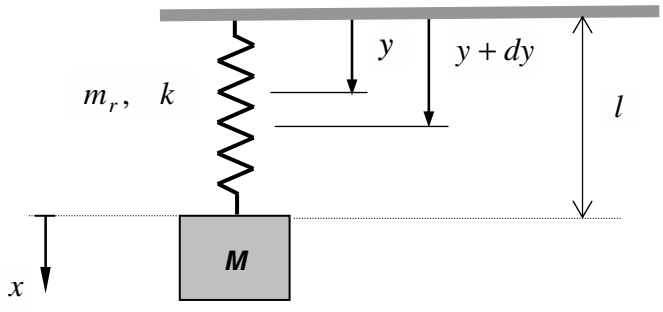
Pour obtenir directement la pulsation propre par la méthode énergétique, il faut écrire

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m l^2 \left(\omega_0 \, \theta_{\max} \right)^2 \qquad U_{\max} = m g l \frac{\theta_{\max}^2}{2}$$

$$U_{\max} = T_{\max} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

3.3.2 – Ressort pesant

Détermination de la pulsation naturelle d'un système masse-ressort dont la masse du ressort n'est pas négligeable devant celle de la masse.



L'énergie potentielle ne change pas , mais la masse du ressort m_r doit entrer dans le calcul de l'énergie cinétique.

Figure 1.21 – Masse avec ressort pesant

On considère que $\frac{m_r}{l} dy$ est la masse d'un élément dy du ressort. La vitesse des éléments dy varie linéairement sur la longueur du ressort entre 0 et $\dot{x}$: $v_{dy}(y) = \frac{y}{l}\dot{x}$.

L'énergie cinétique du ressort est l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\frac{m_r}{l} dy\, v_{dy}^2$ de l'élément dy intégré sur la longueur du ressort

$$T_r = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{m_r}{l}\left(\frac{y}{l}\dot{x}\right)^2 dy = \frac{1}{2}\frac{m_r}{l^3}\dot{x}^2 \int_0^l y^2\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_r}{l^3}\dot{x}^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^l = \frac{1}{2}\frac{m_r}{3}\dot{x}^2$$

La **masse effective** du ressort correspond à $\frac{1}{3}$ de sa masse totale et l'énergie cinétique totale du système sont

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_r}{3}\right)\dot{x}^2$$

Les énergies maximales sont

$$T_{\max} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_r}{3}\right)\omega_0^2\, x_{\max}^2 \qquad U_{\max} = \frac{1}{2}k\, x_{\max}^2$$

et la pulsation naturelle du système

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_r}{3}}}$$

4 – NOTION DE STABILITE DES SYSTEMES

Dans ce qui précède, les coefficients m, c et k sont considérés comme positifs. Les solutions du mouvement peuvent se classer en 4 catégories : libre ($c = 0$), sous amorti, sur-amorti et avec amortissement critique. L'amplitude des mouvements est finie. Le système est **stable.**

L'Annexe montre que dans le cas où $m > 0$, $c = 0$ mais $k < 0$, le déplacement solution du système est de la forme

$$x(t) = A \sinh \omega t + \mathrm{B} \cosh \omega t .$$

L'amplitude du mouvement s'accroît avec t. De telles solutions sont appelées **divergentes** ou **instables**.

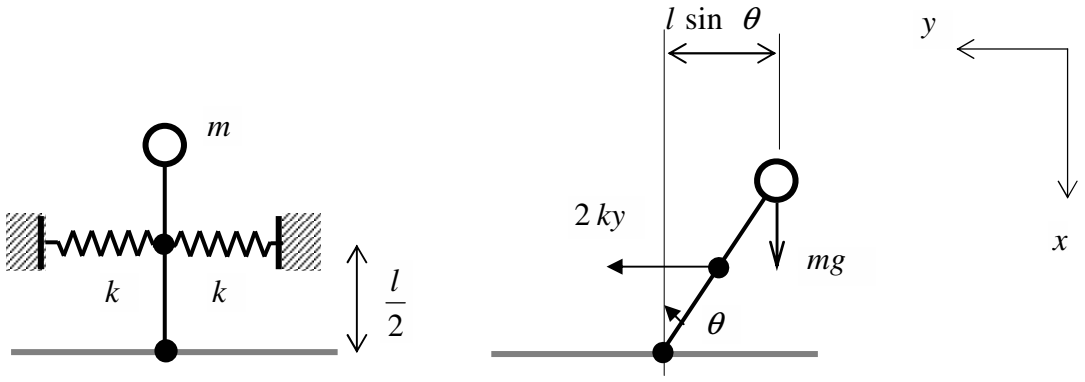


Figure 1.22 – Exemple de système instable : le pendule inversé

On a $2ky = 2\dfrac{kl}{2}\sin\theta$

Energie cinétique : $T = \dfrac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 = \dfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

Energie potentielle du ressort : $U_r = \dfrac{1}{2}(2k)\, y^2$ avec $y = \dfrac{l}{2}\sin\theta$

$$U_r = \frac{1}{2}\left(\frac{kl^2}{2}\sin^2\theta\right).$$

Energie potentielle de gravitation:

$$\begin{aligned} U_g &= -m\, g\, x \\ &= m\, g\, l\,(\cos\theta - 1) \end{aligned}$$

avec $x = l - l\cos\theta$

L'énergie totale est

$$T + U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{kl^2}{2}\sin^2\theta\right) + m\, g\, l\,(\cos\theta - 1) = \text{Constante}$$

et sa dérivée

$$\frac{d}{dt}(T + U) = m l^2\, \ddot{\theta}\,\dot{\theta} + \frac{kl^2}{2}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} - m\, g\, l \sin\theta\,\dot{\theta} = 0$$

Ce qui conduit à

$$m l^2\, \ddot{\theta} + \frac{kl^2}{2}\sin\theta\cos\theta - m\, g\, l \sin\theta = 0$$

et avec l'hypothèse des petits mouvements $\theta << 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1$, à l'équation linéarisée du mouvement

$$m\,l\,\ddot{\theta} + \left(\frac{k\,l}{2} - m\,g\right)\theta = 0$$

critère de stabilité : $\frac{kl}{2} - mg > 0$. Dans le cas contraire, le système est instable et le mouvement diverge

ANNEXE

Equations différentielles et mouvement harmonique

La variable y est une fonction de z et solution de l'équation différentielle homogène du second ordre

$$\frac{d^2y}{dz^2} + ay = 0$$

En supposant que la solution est de la forme $y = \alpha e^{rz}$:

$$\frac{dy}{dz} = \alpha r e^{rz}, \quad \frac{d^2y}{dz} = \alpha r^2 e^{rz} \quad \text{et} \quad \left(r^2 + a\right)\alpha e^{rz} = 0$$

La solution non-triviale $(y \neq 0)$ est donnée par les solutions de l'équation caractéristique

$$r^2 + a = 0$$

qui possède deux racines réelles ou imaginaires selon le signe de a

1) a négatif : $a = -\omega^2$

$$y'' - \omega^2 y = 0 \quad \text{et} \quad r^2 - \omega^2 = 0$$

Les racines sont

$$r_1 = \omega \quad \text{et} \quad r_2 = -\omega$$

et la solution

$$y = A e^{\omega z} + B e^{-\omega z} \quad \text{ou} \quad y = C \cosh \omega z + D \sinh \omega z$$

(car $e^{\omega z} = \cosh \omega z + \sinh \omega z$ et $e^{-\omega z} = \cosh \omega z - \sinh \omega z$)

2) a positif : $a = \omega^2$

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{et} \quad r^2 + \omega^2 = 0$$

Les racines sont

$$r_1 = j\omega \quad \text{et} \quad r_2 = -j\omega$$

et la solution

$$y = A e^{j\omega z} + B e^{-j\omega z} .$$

A et B sont des constantes complexes. Dans le cas où une solution réelle est recherchée, la partie imaginaire doit être nulle

$$\begin{aligned} y &= A(\cos \omega z + j \sin \omega z) + B(\cos \omega z - j \sin \omega z) \\ &= (A_R + jA_I)(\cos \omega z + j \sin \omega z) + (B_R + jB_I)(\cos \omega z - j \sin \omega z) \\ &= (A_R + B_R)\cos \omega z - (A_I - B_I)\sin \omega z + j[(A_I + B_I)\cos \omega z + (A_R - B_R)\sin \omega z] \end{aligned}$$

Les relations suivantes entre A et B annulent la partie imaginaire

$$A_I = -B_I \quad \text{et} \quad A_R = B_R, \quad \text{soit} \quad B = A^*$$

et permettent d'écrire la solution réelle sous les formes

$$y = A e^{j\omega z} + A^* e^{-j\omega z} = 2 \operatorname{Re}\{A e^{j\omega z}\} = 2 A_R \cos \omega z - 2 A_I \sin \omega z$$

$$y = C\cos\omega z + D\sin\omega z \quad \text{ou} \quad y = E\sin(\omega z + \phi)$$

car $E\sin(\omega z + \phi) = E\sin\phi\cos\omega z + E\cos\phi\sin\omega z$, donc

$$C = E\sin\phi \quad \text{et} \quad D = E\cos\phi$$

et

$$E = \sqrt{C^2 + D^2} \quad \text{et} \quad \phi = \arctan\frac{D}{C}.$$

Résumé

Equation harmonique : $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega^2\, u(t) = 0$

Différentes formes équivalentes de la solution :

$u(t) = A\,e^{j\omega t} + B\,e^{-j\omega t}$ avec $B = A^*$ et $A = C/2 - j\,D/2$

$u(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$ avec $C = E\sin\phi$ et $D = E\cos\phi$

$u(t) = E\sin(\omega t + \phi)$ avec $E = \sqrt{C^2 + D^2}$ et $\phi = \arctan\dfrac{D}{C}$

II - REPONSE FORCEE DES SYSTEMES MECANIQUES A UN DEGRE DE LIBERTE

1. REPONSE A UNE EXCITATION HARMONIQUE

1.1 - Excitation d'un système non-amorti
1.2 - Notation complexe
1.3 - Excitation harmonique des systèmes amortis
1.4 - Excitation par la base
1.5 - Excitation par déséquilibre dynamique en rotation
Application 1 : *Accéléromètre*
Application 2 : *Isolation vibratoire – techniques de base*

2. DIFFERENTES FORMES D'AMORTISSEMENT

2.1 - Amortissement de Coulomb
2.2 - Energie dissipée par cycle et amortissement équivalent
2.3 - Autres formes d'amortissement

3. REPONSE A UNE EXCITATION QUELCONQUE

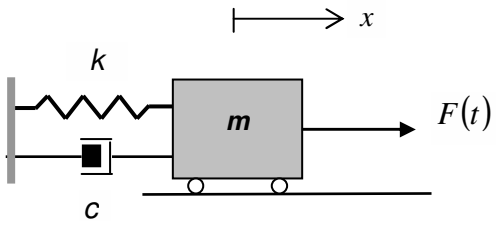
3.1 - Réponse impulsionnelle
3.2 - Réponse à une excitation non-sinusoïdale
3.3 - Réponse à une excitation périodique quelconque
3.4 - Utilisation de la transformation de Laplace
3.5 - Réponses à des excitations aléatoires
Application 3 : *Analyseur de spectre*
Application 4 : *Mesure des fonctions de transfert et de la réponse impulsionnelle*
Application 5 : *Mesure de l'amortissement 2*

Annexe - Informations pratiques sur les mesures vibratoires

1 – REPONSE A UNE EXCITATION HARMONIQUE

On étudie la réponse d'un système amorti à 1 ddl à une excitation harmonique sinusoïdale produite par une force extérieure au système. Ce type d'excitation se rencontre fréquemment dans l'industrie (machines tournantes, ventilateurs, moteurs, pompes …). Les résultats obtenus avec une excitation sinusoïdale pourront s'étendre à des excitations harmoniques plus complexes représentées par des séries de Fourier, en appliquant le principe de superposition. On suppose donc qu'il s'agit de systèmes linéaires.

1.1 – Excitation d'un système non-amorti



Dans un premier temps, l'amortissement est considéré comme négligeable ($c = 0$). La force d'excitation harmonique est

$$F(t) = F \cos \omega t$$

F amplitude crête, ω pulsation de l'excitation ou pulsation forcée.

Equation du mouvement en x

$$m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = F \cos \omega t$$

normalisée par rapport à la masse

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = \frac{F}{m}\cos \omega t = f \cos \omega t}$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire non-homogène et sa solution est la somme de la solution de l'équation homogène ($f = 0$) et d'une solution particulière. La solution particulière peut souvent être obtenue en supposant qu'elle a même force que la fonction d'excitation

$$x_p = A \cos \omega t\ .$$

En l'introduisant dans l'équation du mouvement on obtient

$$-\omega^2 A \cos \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t = f \cos \omega t$$

d'où on tire

$$A = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{tant que} \quad \omega \neq \omega_0\ .$$

En ajoutant cette solution particulière de l'équation non-homogène à la solution générale de l'équation homogène, la solution générale du système est

$$x(t) = A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos \omega t\ .$$

Les coefficients A_1 et A_2 sont déterminés à partir des conditions initiales

$$x(0) = x_0 = A_2 + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = \omega_0 A_1 .$$

La réponse forcée est donc

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \left(x_0 - \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t .$$

Le mouvement est très dépendant des conditions initiales, comme le montre la figure ci-dessous.

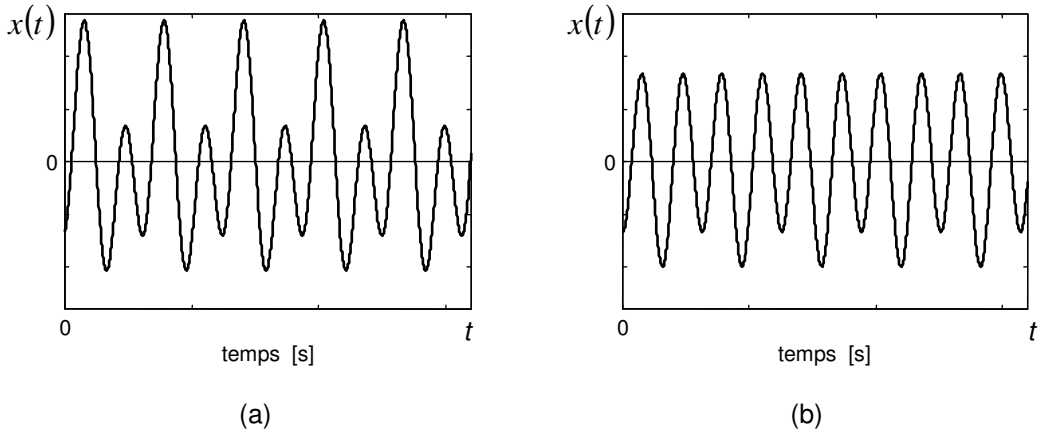


Figure 2.1 – Réponse du système non-amorti à une excitation harmonique dont la pulsation est le double de sa pulsation naturelle : (a) conditions initiales x_0 et v_0 non nulles, (b) condition initiale v_0 nulle.

Quand la **pulsation d'excitation** ω tend vers ω_0 un phénomène de **battement** apparaît (à partir de l'expression précédente du déplacement, il est possible de montrer qu'il peut s'écrire comme le produit de deux fonctions harmoniques des pulsations $\omega + \omega_0$ et $\omega - \omega_0$).

Remarque

Quand la pulsation d'excitation ω est exactement **égale** à la **pulsation propre** du système, la solution utilisée précédemment n'est plus valide. Le choix de la fonction $A_0 \cos \omega t$ comme solution particulière n'est pas possible car elle est aussi une solution de l'équation homogène. La théorie des équations différentielles propose une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = t\, A_0 \sin \omega t$$

(*cette solution peut aussi être obtenue en faisant tendre ω vers ω_0 : vers TD*)

En reportant cette expression dans l'équation $\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = f \cos \omega t$ avec

$$\dot{x}_p = A_0 \sin \omega t + t\, \omega\, A_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_p = \omega A_0 \cos \omega t + \omega A_0 \cos \omega t - t \omega^2 A_0 \sin \omega t$$

on obtient

$$2\,\omega\,A_0\cos\omega t = f\cos\omega t$$

et l'expression suivante pour la solution particulière

$$x_p(t) = \frac{f}{2\omega}t\,\sin\omega t$$

La solution totale et sa dérivée sont de la forme

$$x(t) = A_1\sin\omega t + A_2\cos\omega t + \frac{f}{2\omega}t\sin\omega t$$

$$\dot{x}(t) = A_1\,\omega\cos\omega t - A_2\,\omega\sin\omega t + \frac{f}{2\omega}\sin\omega t + \frac{f\,t\,\omega}{2\omega}\cos\omega t$$

Les conditions initiales

$$x_0 = x(0) = A_2$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = A_1\,\omega$$

permettent de déterminer complètement la solution

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t + \frac{f}{2\omega}t\sin\omega t$$

La figure 2.2 illustre le phénomène de résonance pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ quand $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$. Si le déplacement initial et/ou la vitesse initiale ne sont pas nuls, une oscillation libre viendra ce superposer à cette réponse forcée. *L'accroissement constant de l'amplitude avec le temps montre le caractère artificiel de cette modélisation qui ne prend pas en compte l'amortissement.*

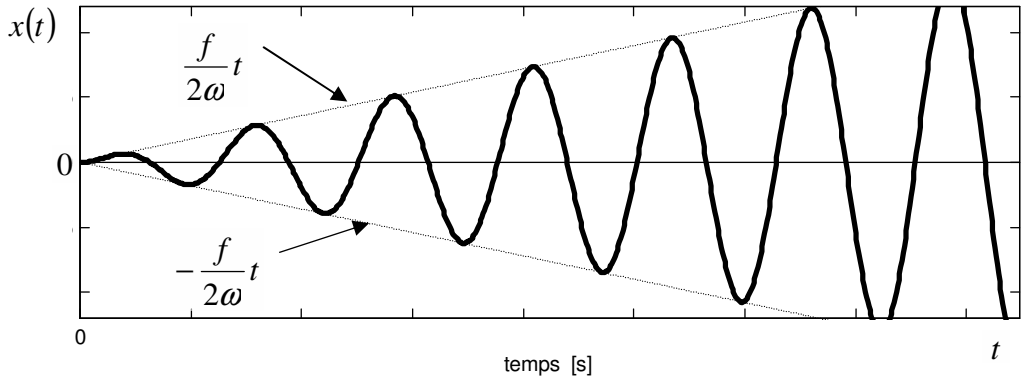


Figure 2.2 – Réponse du système non-amorti à une excitation harmonique dont la pulsation correspond sa pulsation naturelle (phénomène de résonance).

1.2 – Notation complexe

Résultant d'une double dérivation, l'accélération se trouve pour un mouvement harmonique en opposition de phase avec le déplacement et s'écrira $\ddot{x}(t) = -\omega^2\,x(t)$. Pour un système non amorti, la solution particulière du déplacement sera donc toujours en phase avec la force d'excitation en dessous de la pulsation naturelle du système et en opposition de phase au dessus. Dans le cas des systèmes amortis, l'équation du mouvement devient

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k\,x(t) = F\cos\omega t$$

Le terme lié à l'amortissement introduit une composante en quadrature (proportionnelle à la vitesse) qui se traduit par un retard de phase du déplacement par rapport à la force d'excitation. La réponse d'un système amorti (solution particulière) est ainsi une fonction harmonique à la même pulsation que l'excitation mais avec une phase différente :

$$x_p(t) = A_0 \cos(\omega t - \phi)$$

La même méthode de recherche des solutions que pour le cas non amorti peut être employée[1]. Cependant, la méthode complexe permet d'alléger considérablement les calculs. Si on écrit pour le second membre de l'équation du mouvement

$$F(t) = F\cos\omega t = \mathrm{Re}\{F e^{j\omega t}\}$$

la solution particulière peut se mettre sous la forme

$$x_p(t) = \mathrm{Re}\{X\ e^{j\omega t}\}$$

avec l'**amplitude complexe** $X = A_0\ e^{-j\phi}$ qui contient l'information de phase (le signe moins introduit devant la phase met en évidence le retard de phase). Vitesse et accélération peuvent donc s'écrire

$$\dot{x}_p(t) = \mathrm{Re}\{j\omega X\ e^{j\omega t}\} \qquad \text{et} \qquad \ddot{x}_p(t) = \mathrm{Re}\{-\omega^2\ X\ e^{j\omega t}\}$$

En omettant $\mathrm{Re}\{\ \}$, l'équation du mouvement devient

$$(-\omega^2 m + j\omega + k)X\ e^{j\omega t} = F\ e^{j\omega t}$$

ce qui permet d'obtenir facilement la solution particulière complexe

$$X = A_0\ e^{-j\phi} = \frac{F}{-\omega^2 m + j\omega + k}$$

Pour écrire $x_p(t)$ on calcule le module et la phase de X

$$A_0 = |X| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{X\} + \mathrm{Im}^2\{X\}} \quad \text{et} \quad \phi = -\arctan\frac{\mathrm{Im}\{X\}}{\mathrm{Re}\{X\}}$$

Par exemple, en considérant la forme (u complexe)

$$\frac{1}{u} = \frac{e^{-j\phi}}{|u|} \qquad \text{où} \qquad u = a + jb \quad \text{et} \quad |u| = \sqrt{u\,u^*} = \sqrt{(a+jb)(a-jb)} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\text{et} \qquad \phi = \arctan\frac{b}{a}$$

Cette démarche est illustrée par la section suivante.

[1] par exemple dans D.J. Inman, *Engineering vibrations*, Prentice-Hall, 1996.

Remarque

Une variante consiste à utiliser des **variables complexes** $\underline{F} = F\, e^{j\omega t}$ et $\underline{x}_p = X\ e^{j\omega t}$ (donc tel que $F(t) = \mathrm{Re}\{\underline{F}\}$ et $x_p(t) = \mathrm{Re}\{\underline{x}_p\}$). Vitesse et accélération s'écrivent $\dot{\underline{x}}_p = j\,\omega\,\underline{x}_p$ et $\ddot{\underline{x}}_p = -\omega^2\,\underline{x}_p$ et l'équation différentielle

$$\ddot{\underline{x}} + 2\zeta\omega_0\,\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\,\underline{x} = \frac{\underline{F}}{m}$$

1.3 – Excitation harmonique des systèmes amortis

Sous la forme normalisée par rapport à la masse, l'équation du mouvement en excitation forcée s'écrit

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2\ x(t) = \frac{F(t)}{m}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\zeta = c/\left(2\,m\,\omega_0\right)$. En notant comme précédemment la force et la solution particulière sous la forme

$$F(t) = \mathrm{Re}\left\{F\,e^{j\omega t}\right\} \quad \text{et} \quad x_p(t) = \mathrm{Re}\left\{X\ e^{j\omega t}\right\}$$

on obtient l'équation différentielle

$$\boxed{\left(-\omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2\right)X = \frac{F}{m}}$$

et à partir de cette dernière relation, l'amplitude complexe de la solution particulière

$$\boxed{X = \frac{F/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega}}$$

avec

$$|X| = \frac{F/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}} = A_0 \quad \text{et} \quad \phi = \arctan\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

La **solution particulière** $x_p(t) = A_0\cos\left(\omega t - \phi\right)$ est donc de la forme

$$\boxed{x_p(t) = \frac{F/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}$$

La **solution générale** est la somme de cette solution particulière et de la solution générale du système homogène.

Pour le cas **sous-amorti** $(0 < \zeta < 1)$

$$x(t) = A\,e^{-\zeta\omega_0 t}\,\sin\left(\omega_a t + \theta\right) + A_0\cos\left(\omega t - \phi\right)$$

où A_0 et ϕ sont les coefficients qui viennent d'être déterminés et A et θ sont obtenus à l'aide des conditions initiales (on distingue bien la pulsation naturelle ω_0 et la pseudo-pulsation ω_a).

Pour les valeurs importantes de t, le premier terme disparaît et la solution totale correspond à la solution particulière : c'est la **réponse stationnaire** (le premier terme correspond à la réponse transitoire).

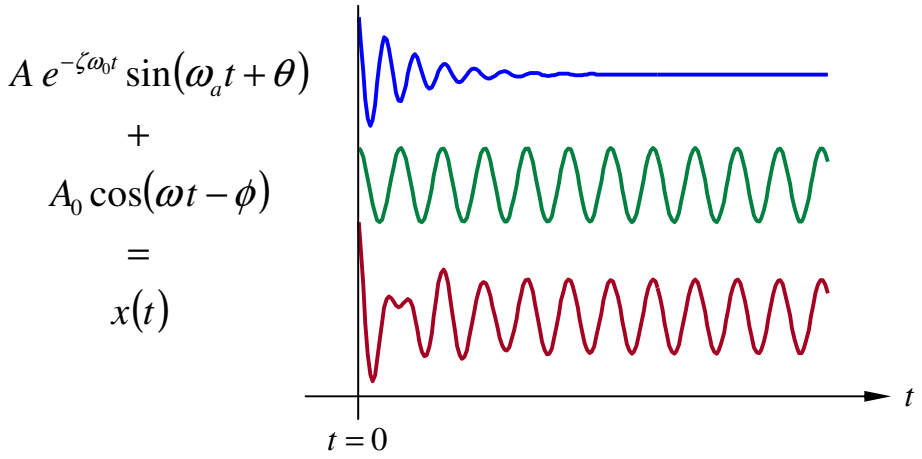


Figure 2.3 – Solution générale du système sous-amorti à une excitation harmonique : réponse transitoire (ou libre : solution générale du système homogène) et réponse stationnaire (solution particulière)

A et θ dépendent de x_0 et v_0 comme pour le système libre mais aussi de F : les coefficients sont donc différents du système libre.

Dans un grand nombre de cas on s'intéresse à la réponse stationnaire du système, sauf dans le cas où le système est soumis à une excitation par choc.

En factorisant par $\omega_0^2 = k/m$, le module $|X|$ s'exprime sous la forme

$$|X| = \frac{\omega_0^2\ F/k}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_0\omega)^2}} = x_{\text{stat}}\ D\,,$$

avec

- le **déplacement statique** $x_{\text{stat}} = F/k$
- l'**amplification dynamique** $D = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2\zeta r)^2}}$ avec la fréquence réduite $r = \omega/\omega_0$.

  La phase s'exprime alors par $\phi = \arctan\dfrac{2\zeta r}{1-r^2}$.

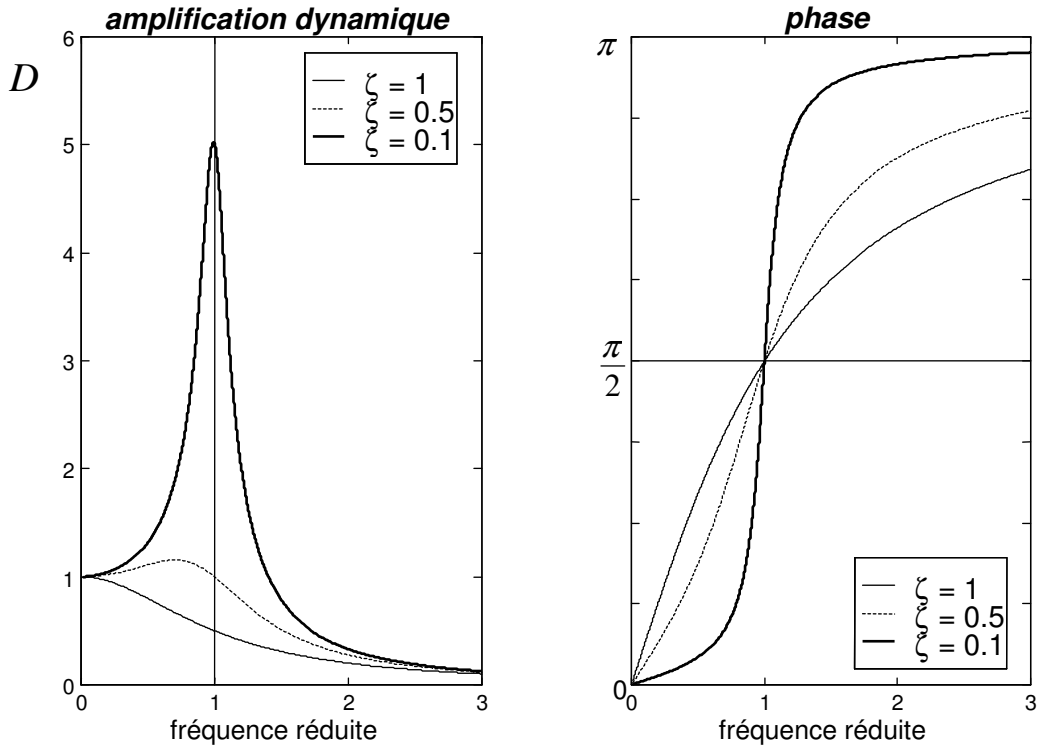


Figure 2.4 – Réponse du système sous-amorti à une excitation harmonique.

Pour $r = 1 \ (\omega = \omega_0)$, c'est la **résonance** et la réponse dépend de l'amortissement

$$D = \frac{1}{2\zeta} \qquad \text{et} \qquad \phi = \frac{\pi}{2}$$

mais quand $r << 1$ alors $D \approx 1$ et quand $r >> 1$ alors $D \approx \frac{1}{r^2}$. En utilisant des échelles logarithmiques pour l'amplitude et la fréquence, on obtient la représentation de la figure 2.5.

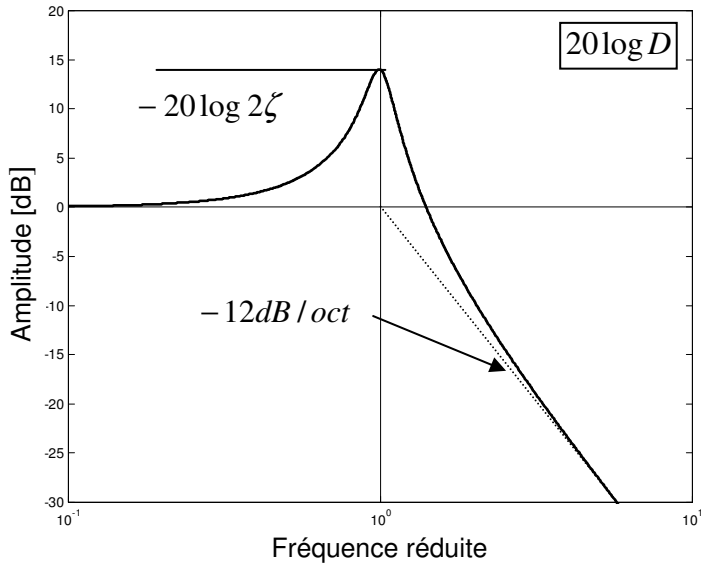


Figure 2.5 – Réponse forcée d'un système à un degré de liberté en représentation logarithmique.

Il est important de noter que par principe la **résonance** apparaît par définition quand $\omega = \omega_0$ (fréquence naturelle du système non-amorti), ce qui correspond à une rotation de phase de 90°. Toutefois, pour un système amorti ω_0 ne correspond pas exactement à la fréquence où la réponse en régime stationnaire est **maximale**. Ainsi

$$|X| = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \text{avec} \qquad r = \frac{\omega}{\omega_0}, \;\; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La valeur maximale de $|X|$ apparaît à la valeur $r = r_{\max}$ qui correspond à l'annulation de sa première dérivée

$$\frac{d|X|}{dr} = \frac{F}{k}\frac{d}{dr}\left(\left[\left(1-r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(1-r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[2\left(1-r^2\right)(-2r) + 8\zeta^2 r\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad -4r\left(1-r^2-2\zeta^2\right) = 0$$

donc

$$r_{\max} = \sqrt{1-2\zeta^2} \quad < 1$$

Cette relation n'est valable que pour $\zeta < 1/\sqrt{2}$. Pour des valeurs supérieures de ζ, la courbe ne présente pas de maximums car $\sqrt{1-2\zeta^2}$ devient un nombre imaginaire. La valeur du maximum est

$$|X|_{r=r_{\max}} = \frac{F/k}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

La **fonction de transfert** complexe $H(j\omega)$ ou $H(\omega)$ se définit comme

$$H(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega\right)}$$
$$H(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{\left(k - m\omega^2\right) + jc\omega}$$
$$H(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{k\left(1 - r^2 + j2\zeta r\right)}$$

avec $c = 2\zeta\sqrt{km}$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $r = \omega/\omega_0$.

La fonction de transfert $H(\omega)$ peut se décomposer en une **amplitude** et une **phase** ou en une **partie réelle** et **imaginaire** comme le montre la Figure 2.6.

Si la fonction $H(\omega)$ est représentée dans un espace à trois dimensions (Figure 2.7a), les Figures 2.6c et 2.6d correspondent sa projection sur deux plans perpendiculaires. La projection de cette courbe sur le troisième plan (**plan de Nyquist**) est reportée sur la Figure 2.7b. Au voisinage de ω_0, le lieu de Nyquist est assimilable à un cercle

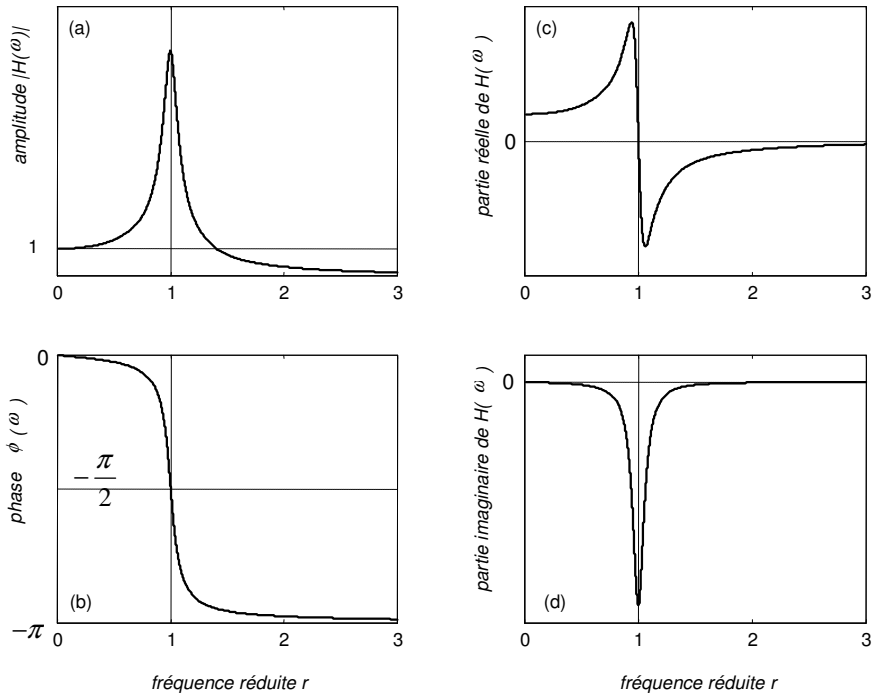


Figure 2.6 - Différentes représentations de la fonction de transfert $H(\omega)$: amplitude (a) et phase (b) ou partie réelle (c) et partie imaginaire (d).

Paramètres du cercle dans le plan de Nyquist :

Centre : $\left\{\frac{1}{k}\left(\frac{1+\zeta^2}{4}\right), \frac{1}{k}\left(\frac{-1+\zeta^2/2}{4\zeta}\right)\right\}$ Diamètre : $\frac{1}{k}\left(\frac{1+\zeta^2}{2\zeta}\right)$

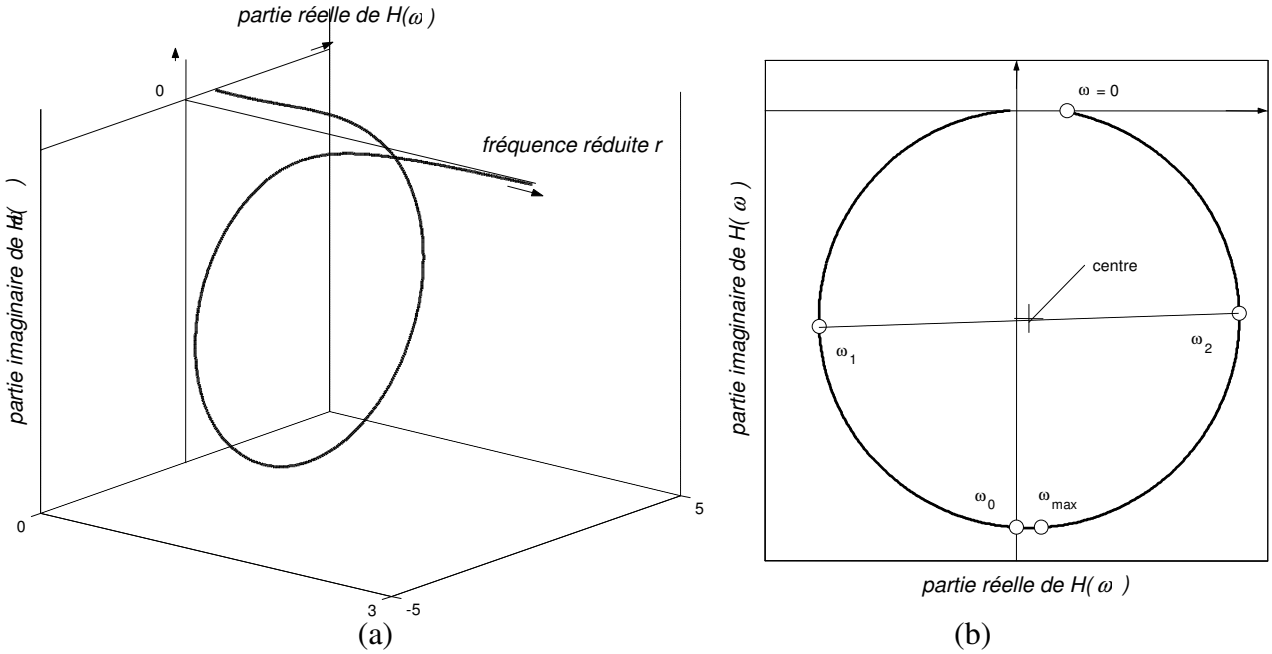


Figure 2.7 - (a) Fonction de transfert dans un espace de représentation à 3 dimensions. (b) projection de la fonction de transfert sur le plan de Nyquist ($\mathrm{Re}\{H\}, \mathrm{Im}\{H\}$)

Les pulsations aux lieux des tangentes verticales sont ω_1 et ω_2 auxquelles correspondent les amplitudes $|H(\omega_1)|$ et $|H(\omega_2)|$

$$\omega_1 = \omega_{\max}(1-\zeta) \qquad \text{et} \qquad |H(\omega_1)| = |H(\omega_{\max})|/\sqrt{2}$$
$$\omega_2 = \omega_{\max}(1+\zeta) \qquad \text{et} \qquad |H(\omega_2)| = |H(\omega_{\max})|/\sqrt{2}$$

où $\omega_{\max} = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$ est la pulsation correspondant à l'amplitude maximale.

Ces caractéristiques permettent de déterminer le taux d'amortissement à partir du diamètre du cercle ou encore par la méthode de la 'bande passante à – 3dB' présentée en fin de chapitre (Application 5).

1.4 – Excitation par la base

Souvent une structure est excitée par l'intermédiaire des plots de suspension (machine excitée par les supports, automobile excitée par la route par l'intermédiaire des suspensions)

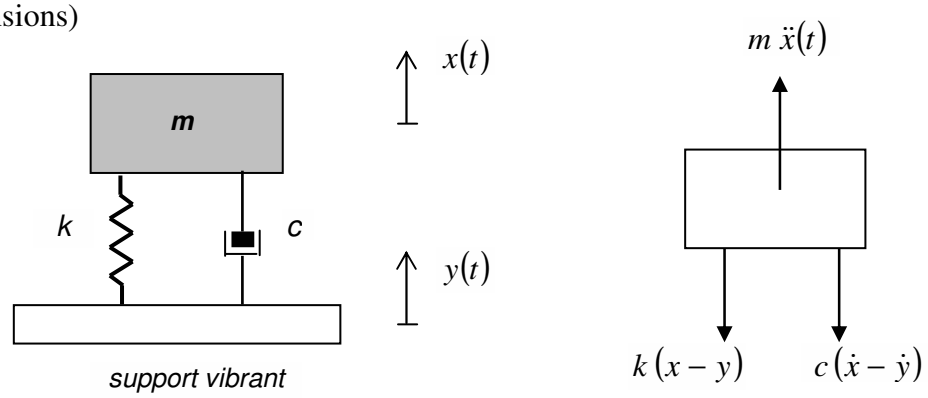


Figure 2.8 – Excitation d'une masse suspendue par la base (support vibrant)

En sommant les forces qui s'exercent sur la masse m, on obtient l'équation

$$\boxed{m\,\ddot{x}(t) + c\,[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)] + k\,[x(t) - y(t)] = 0}$$

qui peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle avec second membre

$$m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = c\,\dot{y}(t) + k\,y(t)$$
$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 2\zeta\omega_0\,\dot{y}(t) + \omega_0^2\,y(t)$$

On suppose que le support possède un déplacement harmonique

$$y(t) = Y\cos\omega t = \mathrm{Re}\{Y\,e^{j\omega t}\}, \qquad Y \text{ amplitude } \textbf{réelle}$$

et on cherche une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = A_0\cos(\omega t - \phi) = \mathrm{Re}\{X\,e^{j\omega t}\} \qquad \text{avec} \qquad X = A_0\,e^{-j\phi} \text{ amplitude } \textbf{complexe}$$

En reportant cette expression dans l'équation différentielle précédente

$$\left(-\omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2\right) X = \left(j2\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2\right) Y$$

il est possible d'obtenir l'expression de l'amplitude complexe du déplacement de la masse

$$X = A_0\, e^{-j\phi} = \frac{\omega_0\left(\omega_0 + j2\zeta\omega\right) Y}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega}$$

Pour calculer A_0 et ϕ, on pose $X = A_0\, e^{-j\phi} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (α, β complexes)

$$A_0 = |X| = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \omega_0 Y \frac{\sqrt{\omega_0^2 + (2\zeta\omega)^2}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}}$$

$$A_0\, e^{-j\phi} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|\, e^{j\phi_\alpha}}{|\beta|\, e^{j\phi_\beta}} = |X|\, e^{-j(\phi_\beta - \phi_\alpha)} \text{ donc } \phi = \phi_\beta - \phi_\alpha = \arctan\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} - \arctan\frac{2\zeta\omega}{\omega_0}$$

soit

$$x_p(t) = \omega_0 Y \left[\frac{\omega_0^2 + (2\zeta\omega)^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \cos(\omega t - \phi)$$

On a vu que la solution particulière pouvait représenter seule la solution stationnaire. En utilisant la fréquence réduite $r = \omega/\omega_0$, on appelle **transmissibilité en déplacement** le rapport des amplitudes des déplacements

$$\boxed{\frac{|X|}{|Y|} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{\left(1 - r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Ce rapport décrit comment le mouvement se transmet de la base vers la masse, en fonction de la fréquence réduite r (voir Figure 2.9). La transmissibilité est inférieure à 1 quand $r > \sqrt{2}$. A la résonance elle dépend de ζ.

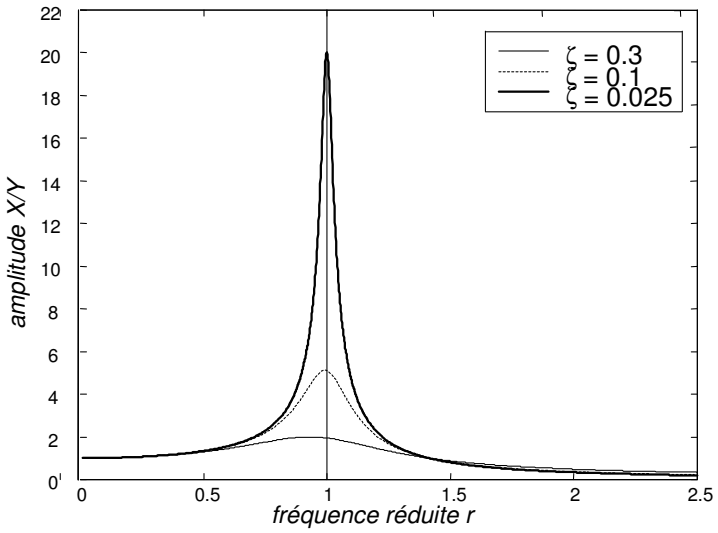


Figure 2.9 – Rapport de transmissibilité en déplacement en fonction de la fréquence réduite et pour différentes valeurs du rapport d'amortissement.

1.5 – Excitation par déséquilibre dynamique en rotation

Les machines tournantes constituent des sources de vibrations très courantes. De petites irrégularités dans la distribution des masses des parties en rotation causent des niveaux vibratoires importants. On schématise une machine de masse m comportant une masse m_0 en rotation à une distance l de son centre. Un guidage sans friction autorise seulement un mouvement dans la direction x (voir Figure 2.10). En supposant la vitesse de rotation ω_R constante

$$x_R(t) = l \sin \omega_R t$$

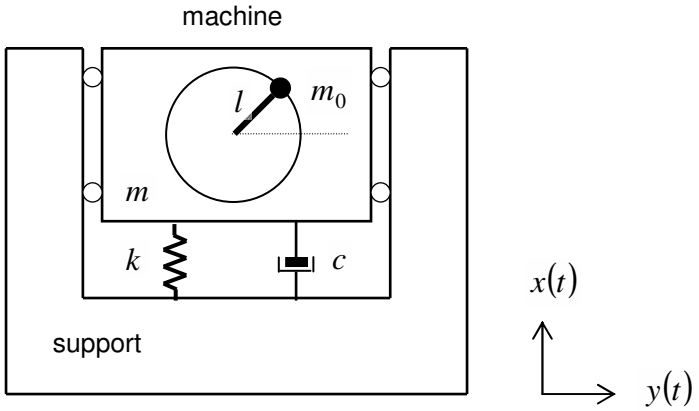


Figure 2.10 – Excitation d'une machine suspendue par une masse en rotation

La force de réaction générée par la rotation de la masse a une composante dans la direction x qui est proportionnelle à m_0 et à l'accélération $\ddot{x}_R$. Cette force agit sur la masse m de la machine (les forces dans la direction y ne sont pas considérées). L'équilibre des forces par rapport au référentiel du support s'écrit (m_0 fait partie de la masse m de la machine)

$$(m - m_0)\,\ddot{x}(t) + m_0\,[\ddot{x}(t) + \ddot{x}_R(t)] = -kx(t) - c\dot{x}(t)$$

ce qui conduit à l'équation

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m_0 \ddot{x}_R(t)\,.$$

Le terme au second membre est la force $F(t) = -m_0 \ddot{x}_R(t)$ qui excite le système. Ce dernier peut s'écrire en normalisant l'équation par rapport à la masse

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\,\dot{x}(t) + \omega_0^2 = \frac{F(t)}{m}$$

avec la force qui s'exprime par

$$F(t) = -m_0\,\ddot{x}_R(t) = -l\,m_0\,\frac{d^2}{dt^2}(\sin\omega_R t) = l\,m_0\,\omega_R^2 \sin\omega_R t$$

La méthode d'obtention de la solution particulière est semblable à celle des problèmes précédents en utilisant la notation complexe, pour la force

$$F(t) = l\,m_0\,\omega_R^2 \sin\omega_R t = \mathrm{Re}\left\{-\,j\,l\,m_0\,\omega_R^2\; e^{\,j\omega_R t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{F\; e^{\,j\omega_R t}\right\}$$

donc l'amplitude complexe est $F = -jlm_0\omega_R^2$ et pour l'expression de la solution particulière recherchée

$$x_p(t) = A_0\cos(\omega_R t - \phi) = \mathrm{Re}\left\{X\ e^{j\omega_R t}\right\} \quad \text{avec} \quad X = A_0\ e^{-j\phi}$$

ce qui conduit à

$$X = \frac{-j\,m_0\,l\,\omega_R^2}{m\left(\omega_0^2 - \omega_R^2 + j2\zeta\omega_0\omega_R\right)}$$

ou, avec $r = \omega_R/\omega_0$

$$A_0 = |X| = \frac{m_0 l}{m}\frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

et

$$\phi = -\arctan\frac{\mathrm{Im}\{X\}}{\mathrm{Re}\{X\}} = -\arctan\frac{1-r^2}{2\zeta r} = \arctan\frac{2\zeta r}{1-r^2} - \frac{\pi}{2}.$$

Finalement la solution particulière s'écrit

$$x_p(t) = A_0\cos(\omega_R t - \phi) = A_0\cos\left(\omega_R t - \arctan\frac{2\zeta r}{1-r^2} + \frac{\pi}{2}\right) = -A_0\sin\left(\omega_R t - \arctan\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

L'amplitude de déplacement en régime stationnaire est une fonction de la vitesse de rotation (Figure 2.11). Quand $r >> 1$, la valeur normalisée du déplacement tend vers 1 indépendamment de ζ. Pour les machines tournantes, la suspension sera calculée pour que ω_0 soit en dehors de la gamme de fonctionnement.

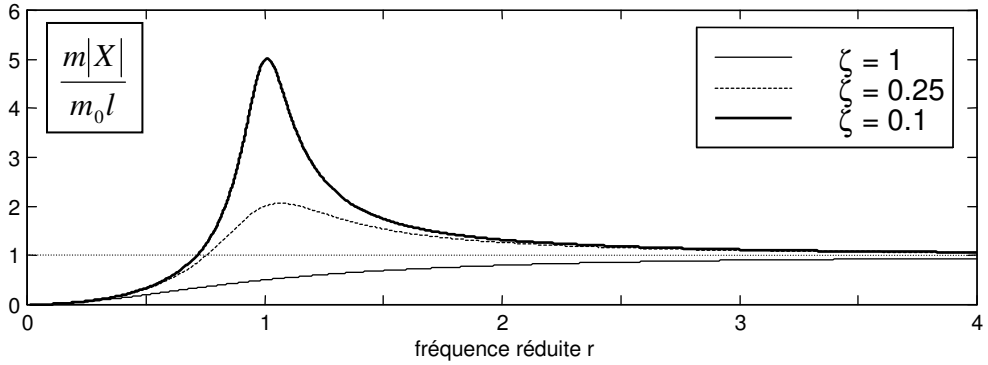


Figure 2.11 – Réponse du système à 1 ddl à une excitation par une masse tournante.

[APPLICATION 1] *Accéléromètre*

Une importante application de l'analyse des vibrations forcées et de l'excitation par la base se rencontre dans la réalisation de **transducteurs** pour la mesure des vibrations. C'est le cas de l'accéléromètre.

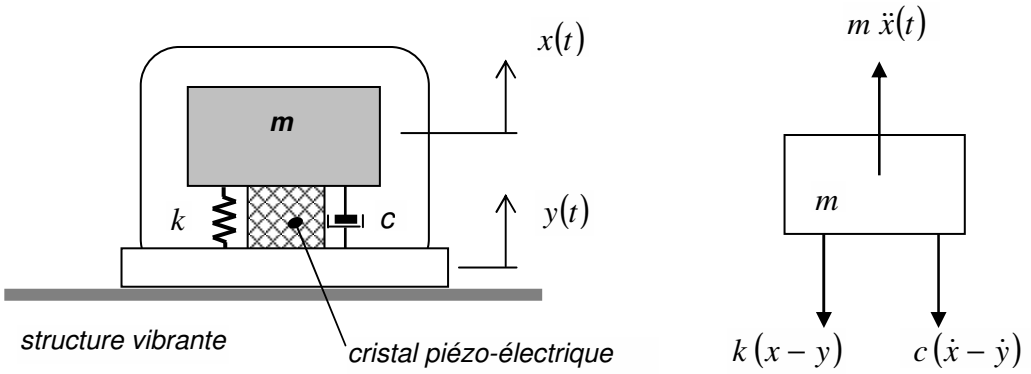


Figure 2.12 – Schéma de principe d'un accéléromètre.

L'équilibre des forces appliquées à la masse m conduit à la relation

$$m\ddot{x} = -c\left(\dot{x} - \dot{y}\right) - k\left(x - y\right)$$

La base est solidaire de la structure dont le déplacement est $y(t) = Y\cos\omega t = \mathrm{Re}\{Y\, e^{j\omega t}\}$, ($Y$ amplitude réelle). Le mouvement de la masse par rapport à la base dont dépend le signal électrique produit par le cristal piézo-électrique est

$$z(t) = x(t) - y(t)$$

L'équation différentielle peut être écrite en terme de déplacement relatif

$$m\left(\ddot{z} + \ddot{y}\right) + c\dot{z} + kz = 0$$
$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y\cos\omega t$$

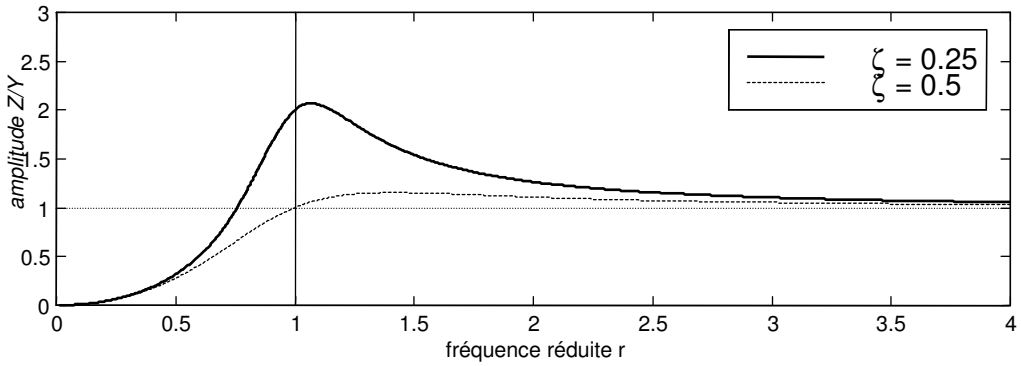
La solution a la même forme que précédemment

$$z(t) = \frac{\omega^2 Y}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega_0\omega\right)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Le rapport $|Z/Y|$ des amplitudes correspond à la réponse en fréquence du transducteur

$$\left|\frac{Z}{Y}\right| = \frac{r^2}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}} \qquad \text{avec} \quad r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

alors que sa réponse en phase est $\phi = \arctan\dfrac{2\zeta r}{1 - r^2}$.



.Figure 2.13 – Réponse du système de la figure 2.12

Fonctionnement en séismographe

Pour des valeurs importantes de r ($r > 3$), l'amplitude du rapport $|Z/Y|$ tend vers 1 : le déplacement relatif et le déplacement de la base ont la même amplitude. Il est donc nécessaire que la fréquence de résonance ω_0 soit petite car la gamme de mesure débute à $\omega_1 \approx 3\omega_0$.

Fonctionnement en accéléromètre

La solution peut aussi s'écrire sous la forme

$$|Z| = \frac{r^2\ Y}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{\omega^2\ Y}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

On remarque que $\omega^2\, Y = \ddot{Y}$ est l'amplitude de l'accélération et quand $\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2} \to 1$, l'amplitude $|Z|$ est donc proportionnelle à l'**accélération** de la base $\ddot{Y}$:

$$|Z| \cong \frac{\ddot{Y}}{\omega_0^2}$$

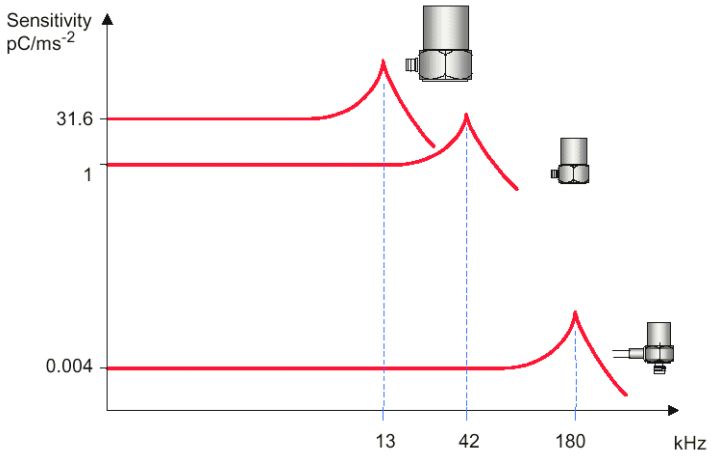


Figure 2.14 – Courbes de réponse et sensibilité des accéléromètres en fonction de leur masse.

La **sensibilité** est donc inversement proportionnelle à $\omega_0^2 = k/m$. La masse m doit être faible (i) pour ne pas charger la structure, (ii) pour que la fréquence de résonance soit suffisamment élevée (typiquement, plusieurs dizaines de kHz), mais la sensibilité diminue.

La **sensibilité** des accéléromètres piézo-électriques est exprimée en pC/ms^{-2} ou en pC/g. Un conditionneur spécifique (**amplificateur de charge**) est nécessaire. Certains accéléromètres possèdent une électronique intégrée qui réalise le conditionnement du signal et leur sensibilité est exprimée en mV/ms^{-2} ou en mV/g. Un conditionneur au standard **ICP** est alors nécessaire pour alimenter l'électronique intégrée par un courant constant (2 mA) par l'intermédiaire du câble signal.

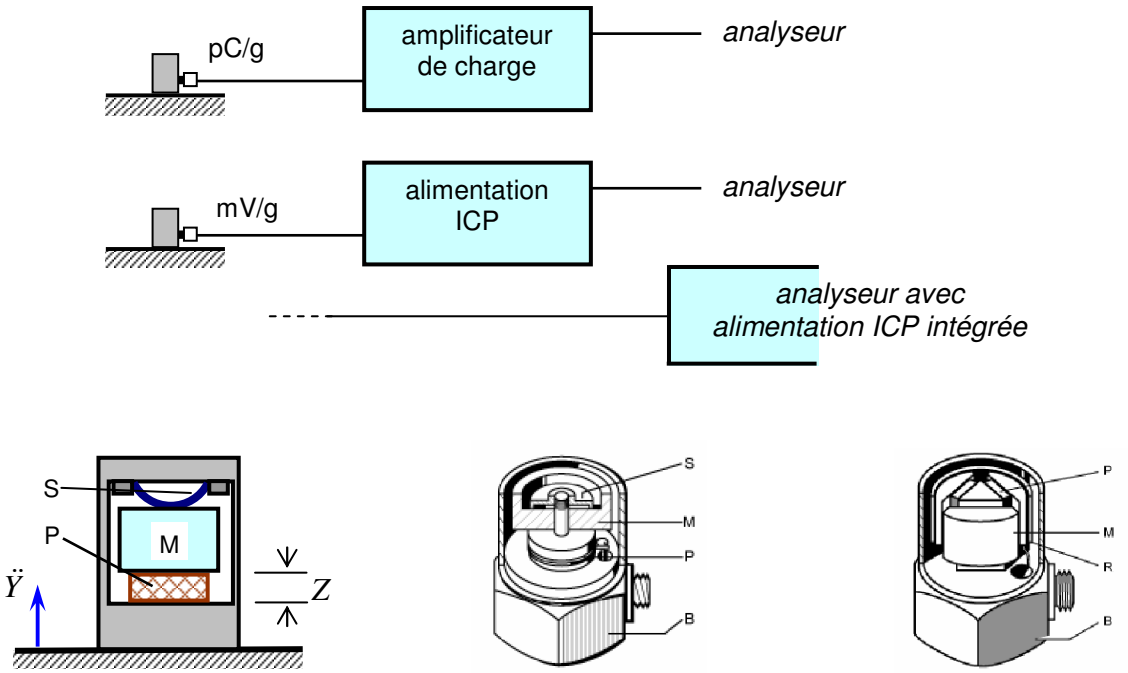


Figure 2.15 – Alimentation et conditionnement des accéléromètres (en haut) et principaux types d'accéléromètres : compression (gauche) et cisaillement (droite)
M : masse, P : éléments piézo-électriques, R et S : systèmes de précontrainte

Sensibilité transversale des accéléromètres

Les accéléromètres peuvent présenter une sensibilité maximale dont la direction ne correspond pas exactement à leur axe. La composante perpendiculaire est une quantité parasite qui est quantifiée par sa *sensibilité transversale*

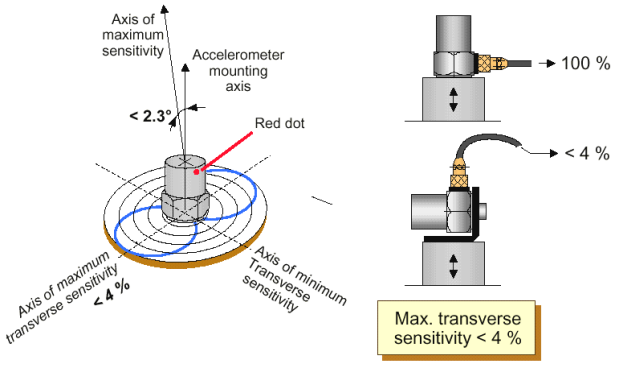


Figure 2.16 – Sensibilité transversale d'un accéléromètre

[APPLICATION 2] *Isolation vibratoire : Techniques de base*

L'isolation vibratoire en **basse fréquence** concerne deux types de problèmes différents :

- Isolation vibratoire d'une machine : limiter la transmission à l'assise des efforts dus au fonctionnement d'une machine,
- Isolation vibratoire d'un équipement : limiter la transmission du mouvement de l'assise à l'équipement.

A2.1 - Transmissibilité

Isolation vibratoire d'un équipement : Transmissibilité en déplacement

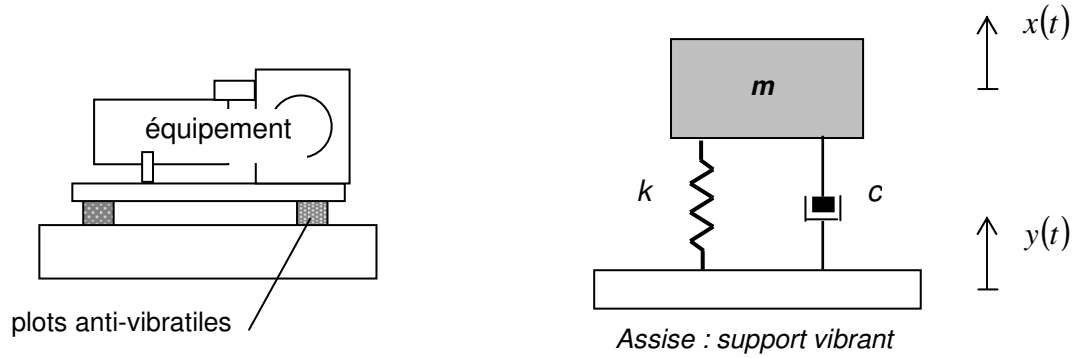


Figure 2.17 – Equipement isolé d'une assise vibrante illustrant la transmissibilité en déplacement

La masse est excitée par les vibrations de la base et la **transmissibilité en déplacement** a été précédemment définie dans la section 1.4 par

$$T = \frac{|X|}{|Y|} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+(2\zeta r)^2}}$$

Isolation vibratoire d'une machine : Transmissibilité de la force

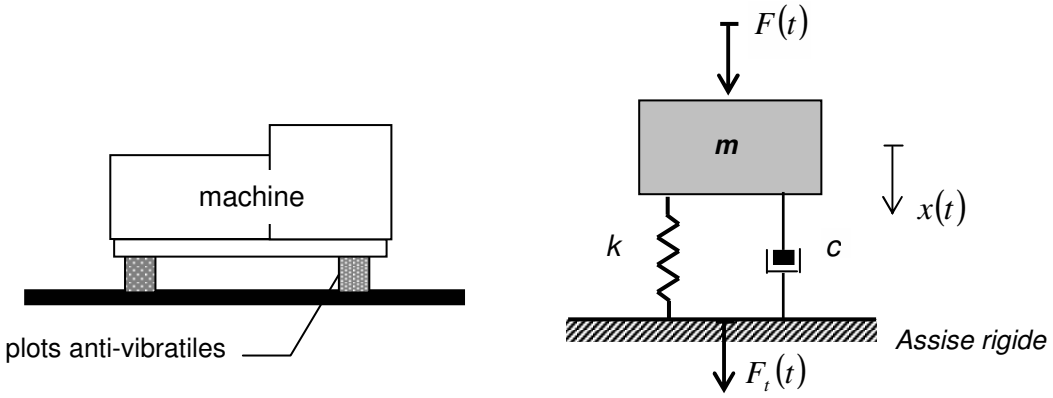


Figure 2.18 – Machine vibrante isolée pour ne pas transmettre de vibrations illustrant la transmissibilité de la force.

Sous une excitation stationnaire $F(t) = \mathrm{Re}\{F\, e^{j\omega t}\}$ le déplacement du système sous-amorti est $x(t) = \mathrm{Re}\{X\, e^{j\omega t}\}$ (ici $X = A_0\, e^{-j\phi}$ est une amplitude complexe), avec

$$|X| = A_0 = \frac{|F|}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}}.$$

La force transmise à l'assise est $F_t(t) = F_k(t) + F_c(t) = \mathrm{Re}\{F_t\, e^{j\omega t}\}$, soit en notation complexe $F_t = F_k + F_c$

- la force transmise par la raideur est $F_k(t) = k\, x(t)$ soit $F_k = kX$

- la force transmise par l'amortissement est $F_c(t) = c\, \dot{x}(t)$ soit $F_c = j\omega cX = j\omega(2m\omega_0\zeta)X$

d'où

$$F_t = X\left(k + j2m\omega\omega_0\zeta\right) = kX\left(1 + j2\zeta r\right) \text{ et } |F_t| = k|X|\sqrt{1+(2\zeta r)^2}$$

La **transmissibilité de la force** est définie par

$$\boxed{T = \frac{|F_t|}{|F|} = \sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{\left(1-r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}}}$$

Les **transmissibilités de la force et du déplacement** correspondant à deux problèmes différents ont cependant la **même expression**. La transmissibilité peut également être exprimée en dB :

$$\boxed{L_T = 20\log_{10} T \quad [\mathrm{dB}]}$$

La transmissibilité est représentée en linéaire sur la Figure 2.19a et en dB avec une échelle logarithmique des fréquences sur la Figure 2.19b.

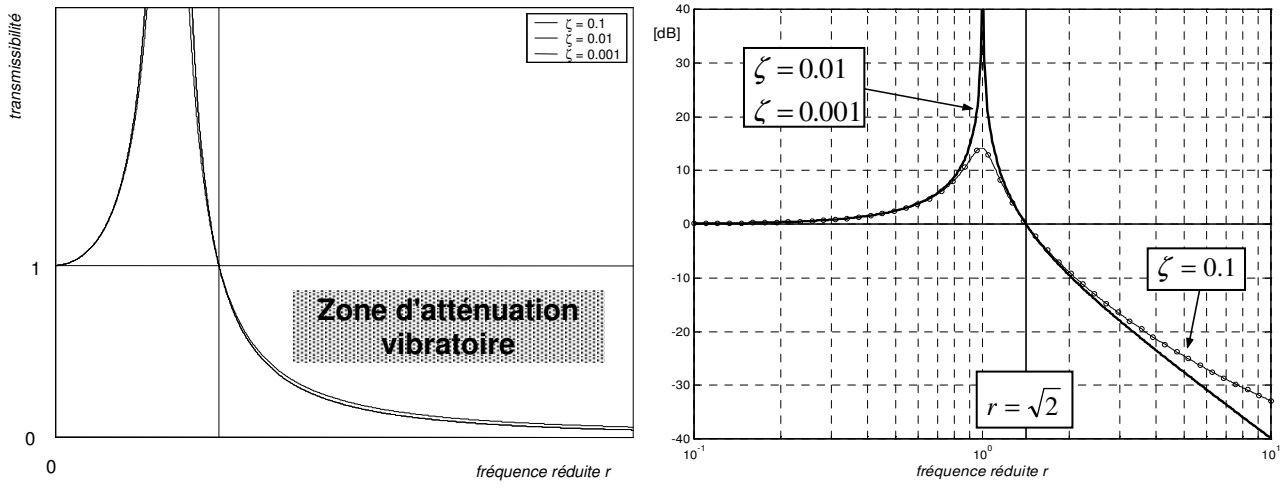


Figure 2.19 – Transmissibilité en fonction de la fréquence réduite et pour différentes valeurs du rapport d'amortissement. a) représentation linéaire (gauche), b) représentation en dB (droite).

Remarques

1) Pour différentes valeurs du taux d'amortissement ζ les courbes passent toutes par le point $T = 1$ et $r = \sqrt{2}$.

2) Pour que la force transmise à l'assise soit inférieure à la force d'excitation ou que le déplacement de la masse soit inférieur à celui de la base il faut que la fréquence réduite soit

$$r = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} > \sqrt{2}$$

3) Dans la **zone d'atténuation** ($r > \sqrt{2}$), la transmissibilité est pratiquement indépendante du taux d'amortissement ζ si celui-ci est inférieur à 10%. Elle peut alors s'approcher par la formule

$$\boxed{T \approx \frac{1}{r^2 - 1}}$$

Quand $r >> 1$, la transmissibilité exprimée en dB vaut approximativement $L_T \approx -10 \log r$, c'est à dire qu'elle décroît de 40 dB/décade ($r_2 / r_1 = 10$) ou de 12 dB/octave ($r_2 / r_1 = 2$).

A2.2 - Atténuation

Pour les opérations de réduction du niveau vibratoire, le **taux d'atténuation** (souvent exprimé en %) est également utilisé

$$\boxed{A = 1 - T = \frac{r^2 - 2}{r^2 - 1}}$$

<u>Attention</u> : *Quand l'atténuation (ou gain) est exprimée en dB, c'est la quantité* $20 \log_{10} \frac{1}{T} = -L_T$ *(positive pour* $r > \sqrt{2}$ *) qui est employée.*

La **fréquence d'excitation** f pour laquelle on obtient une atténuation A se déduit des équations précédentes :

$$r = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{A-2}{A-1}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f = f_0 \sqrt{\frac{A-2}{A-1}}}$$

Pour une fréquence d'excitation f, l'atténuation A dépend seulement de la fréquence propre f_0 de la suspension. Ces résultats sont présentés sous forme d'abaques (Figure 2.20).

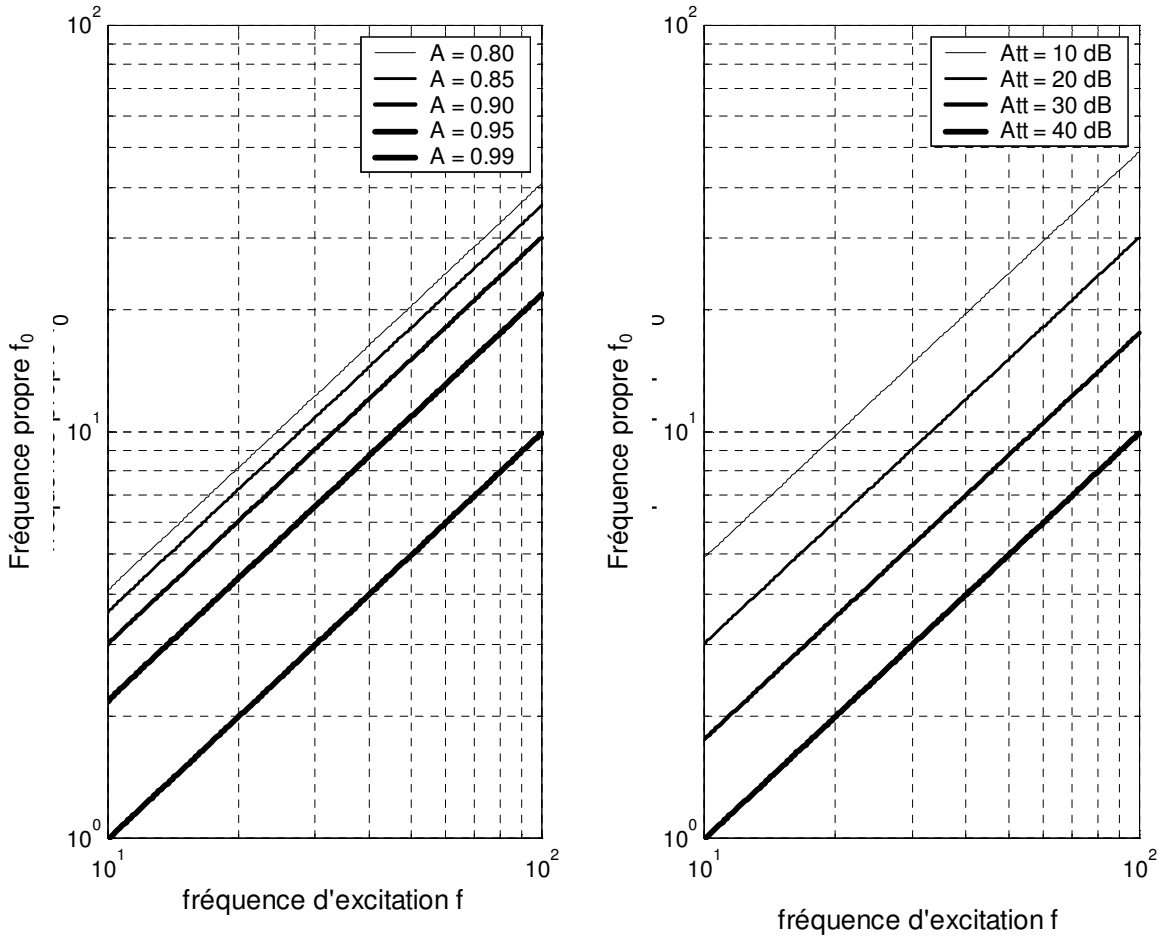


Figure 2.20 - Abaques d'atténuation vibratoire donnant les relations entre la fréquence d'excitation f *et la fréquence propre* f_0. *a) pour des atténuations* $A = 1 - T$, *b) pour des affaiblissements* $\mathrm{Att} = 20 \log_{10}(1/T)$ *(en dB).*

A2.3 - Détermination d'une suspension élastique

Un cas fréquent est celui d'une excitation due à un mécanisme en rotation. Une atténuation A est recherchée dans une plage de fonctionnement définie par l'intervalle de fréquence $[f_1, f_2]$. C'est la fréquence d'excitation minimale f_1 qui représente la contrainte la plus importante et qui sert à déterminer la fréquence propre f_0 de la suspension élastique.

> Exemple : une atténuation $A = 90\,\%$, correspond à $T = 1 - A = 0.1$, soit un gain de 20 dB. Si la plus petite fréquence à atténuer est $f_1 = 30\,\mathrm{Hz}$, l'abaque donne une fréquence propre de la suspension de 9 Hz (qui se calcule aussi par $f_0 = f\sqrt{(A-1)/(A-2)} = 30\sqrt{(0.9-1)/(0.9-2)} \cong 9\,\mathrm{Hz}$. La relation $\omega_0 = \sqrt{g/x_0}$ permet de connaître la déflexion statique : $x_0 = g/4\pi^2 f_0{}^2 = 9.81/4\pi^2 9^2 = 0.003$ m.

Le centre de gravité de l'ensemble mécanique à suspendre permet de déterminer le nombre et la position des points de fixation pour que la charge soit également répartie (dans le cas où la position des points de fixation est imposée, on peut être conduit à choisir des supports de rigidités différentes).

Exemple : Pour une charge de 300 daN répartie sur 6 points, il faut chercher dans le catalogue du fournisseur des supports ayant une fréquence propre de 9 Hz (ou une déflexion statique de 3 mm) sous 50 daN.

Dans le cas d'une machine tournante, le régime de fonctionnement est atteint après le démarrage en passant par la fréquence propre ($r=1$). La transmissibilité passe par un maximum qui est contrôlé par le taux d'amortissement

$$T_{\max} \cong \frac{1}{2\zeta}$$

Les élastomères utilisés dans les suspensions ont des taux d'amortissement compris entre 0.02 et 0.1 et jusqu'à 0.2 pour des synthétiques.

Exemple : Au passage à 9 Hz, le support qui possède un taux d'amortissement de 5% ($\zeta = 0.05$) assure une transmissibilité $T_{\max} = 10$, soit 20 dB. Pour une machine suspendue, l'amplitude du déplacement est $X_{\max} \approx (F/k) T_{\max}$. Pour un équipement suspendu, l'amplitude des vibrations de l'assise est multipliée par 10.

Remarques

1) la plupart des supports en élastomère de formes géométriques simples ont un comportement "presque" linéaire dans la plage de fonctionnement recommandée. Par exemple la raideur est donnée par (voir Figure 2.21) :

support en compression : $k = \dfrac{ES}{l}$ (Figure 2.21a)

support en cisaillement : $k = \dfrac{GS}{h}$ (Figure 2.21b)

avec E module d'Young $\left[\mathrm{N/m^2}\right]$
S section du support
l, h épaisseur du support
$G = E/2(1+\nu)$ module de cisaillement (ν coefficient de Poisson).

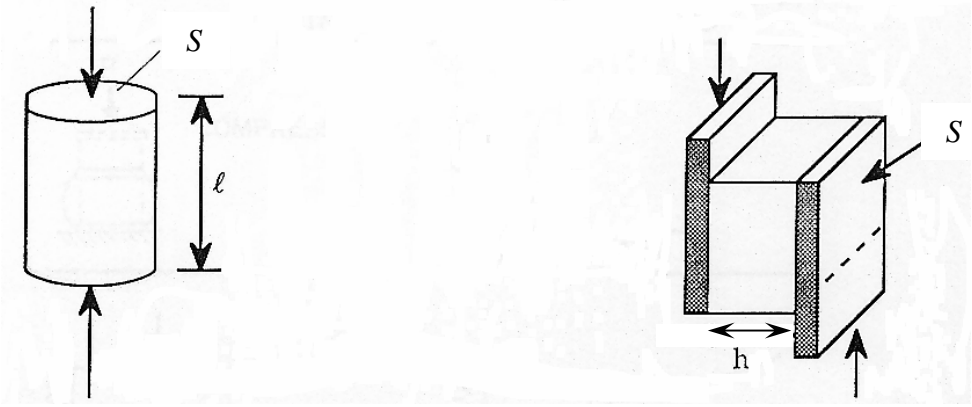


Figure 2.21 - Supports élastiques travaillant : a) en compression, b) en cisaillement.

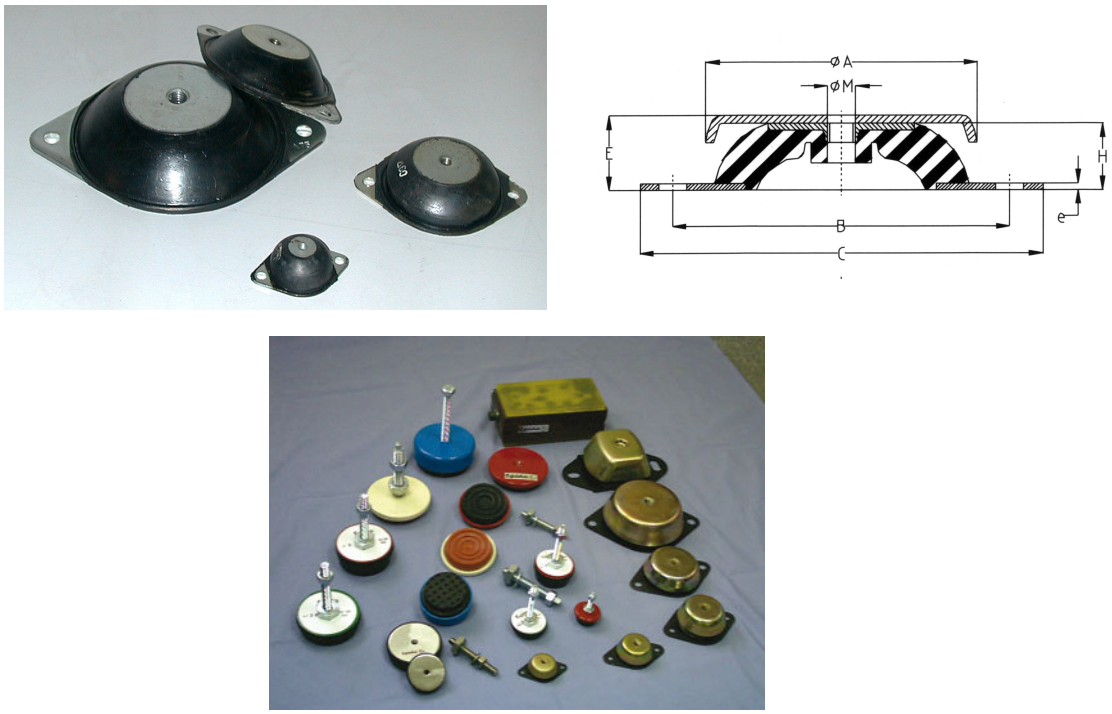


Figure 2.22 – Différentes formes de supports anti-vibratoires.

2) dans le cas de support dont la rigidité **statique** diffère de la rigidité **dynamique**, la relation entre la fréquence propre de la suspension et l'écrasement statique n'est plus valable. Par exemple, les supports "Evidgom" de Paulstra ont une caractéristique de rigidité représentée sur la Figure 2.23. La rigidité dynamique est déterminée par la tangente au point de fonctionnement.

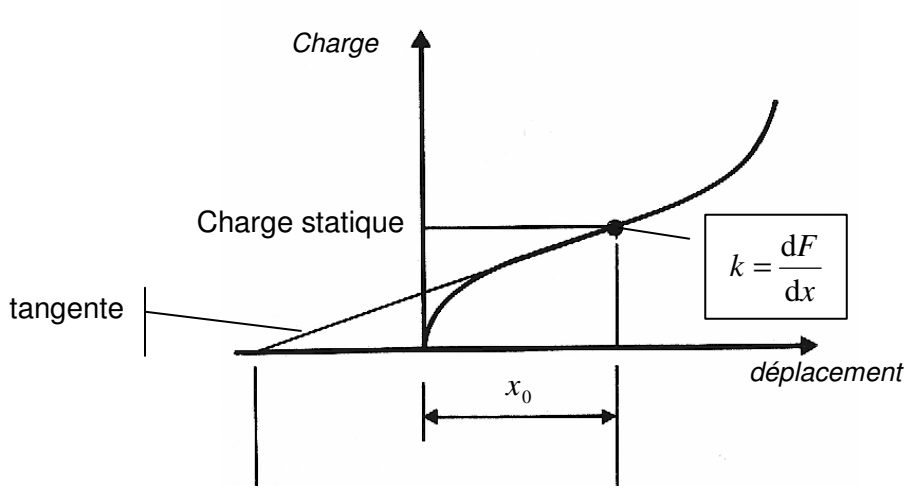
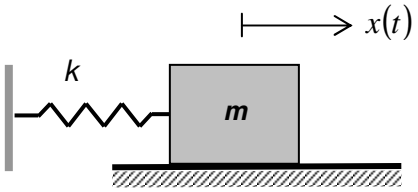


Figure 2.23 - Rigidité dynamique et rigidité statique d'un support élastique ("Supports élastiques", Documentation Paulstra).

2 – DIFFERENTES FORMES D'AMORTISSEMENT

2.1 – Amortissement par frottement solide (ou amortissement de Coulomb)

L'amortissement de Coulomb est l'amortissement par frottement solide. Il est difficile de donner une forme mathématique correcte pour modéliser un amortissement. Contrairement à la masse et à la raideur, l'amortissement ne peut pas être déterminé par des tests statiques. L'amortissement visqueux en $c\dot{x}$ est la forme la plus courante mais l'amortissement par frottement solide se rencontre fréquement dans les mécanismes. Il est défini par la relation

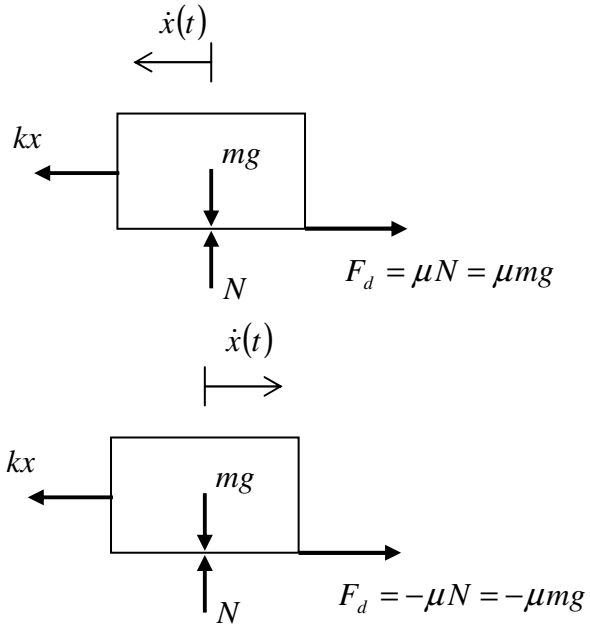


$$F_d = F_d(\dot{x}) = \begin{cases} -\mu N & \dot{x} > 0 \\ 0 & \dot{x} = 0 \\ \mu N & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

F_d force de dissipation,
N force normale,
μ coefficient de frottement.

Figure 2.24 – Frottement solide : notation

La force F_d est toujours **opposée à la direction du mouvement** (son signe est contraire à celui de $\dot{x}$)



$$m\ddot{x} + kx = \mu N \qquad \text{pour} \quad \dot{x} < 0$$

$$m\ddot{x} + kx = -\mu N \qquad \text{pour} \quad \dot{x} > 0$$

Figure 2.25 – Décomposition de l'équation du mouvement pour un frottement solide. Dans ce cas particulier, la masse est posée sur le plan et $N = mg$.

C'est le signe de $\dot{x}$ qui détermine la direction de la force de frottement

$$m\ddot{x} + \mu N \,\mathrm{sign}(\dot{x}) + kx = 0$$

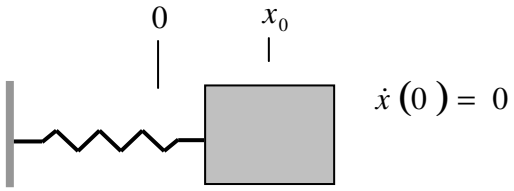
avec la fonction 'signe'

$$\text{sign}(u)=\begin{cases} 1 & \text{quand} \quad u>0 \\ 0 & \text{quand} \quad u=0 \\ -1 & \text{quand} \quad u<0 \end{cases}$$

Cette équation ne peut pas se résoudre directement par les méthodes employées précédemment car c'est une équation différentielle non-linéaire. Pour obtenir la **réponse libre** du système, on va considérer séparément les **tronçons temporels entre les changements de direction** de $\dot{x}$.

Conditions initiales : $x(0)=x_0$ et $\dot{x}(0)=0$

x_0 se trouve à droite du point d'équilibre et la force kx_0 est plus forte que F_d



Déplacement vers la gauche : $\dot{x}<0$

La masse se déplace vers la gauche et l'équation valable pour $\dot{x}<0$ a une solution de la forme

$$x(t)=A_1\cos\omega_0 t+B_1\sin\omega_0 t+\frac{\mu N}{k}$$

avec $\omega_0=\sqrt{k/m}$. A_1 et B_1 sont des constantes qui sont déterminées à l'aide des conditions initiales

$$x(0)=A_1+\frac{\mu N}{k}=x_0 \qquad \Rightarrow \qquad A_1=x_0-\frac{\mu N}{k}$$
$$\dot{x}(0)=\omega_0 B_1=0 \qquad \Rightarrow \qquad B_1=0$$

Le mouvement vers la gauche à partir du point de départ x_0 est donc

$$x(t)=\left(x_0-\frac{\mu N}{k}\right)\cos\omega_0 t+\frac{\mu N}{k}$$

et il se poursuit jusqu'à l'instant t_1 où la vitesse $\dot{x}=0$

$$\dot{x}(t_1)=-\omega_0\left(x_0-\frac{\mu N}{k}\right)\sin\omega_0 t_1=0$$

c'est à dire à $t_1=\frac{\pi}{\omega_0}$. Ensuite, à condition que $|kx|>\mu N$, la masse se déplace vers la droite.

Déplacement vers la droite : $\dot{x}>0$

L'équation différentielle correspond au cas où $\dot{x}>0$ et a pour solution

$$x(t) = A_2 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t - \frac{\mu N}{k}$$

pour $\frac{\pi}{\omega_0} < t < t_2$. Les conditions initiales pour cette équation sont fournies par l'équation précédente à t_1 :

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\cos \pi + \frac{\mu N}{k} = \frac{2\mu N}{k} - x_0$$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -\omega_0\left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right)\sin \pi = 0$$

ce qui conduit à

$$A_2 = x_0 - \frac{3\mu N}{k} \qquad B_2 = 0$$

La solution pour le second intervalle de temps est

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k}\right)\cos \omega_0 t - \frac{\mu N}{k}, \qquad \frac{\pi}{\omega_0} < t < \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Arrêt du mouvement

Cette procédure se répète jusqu'à ce que le mouvement s'arrête. Cet événement se produit quand

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \text{et} \quad |kx| \le \mu N$$

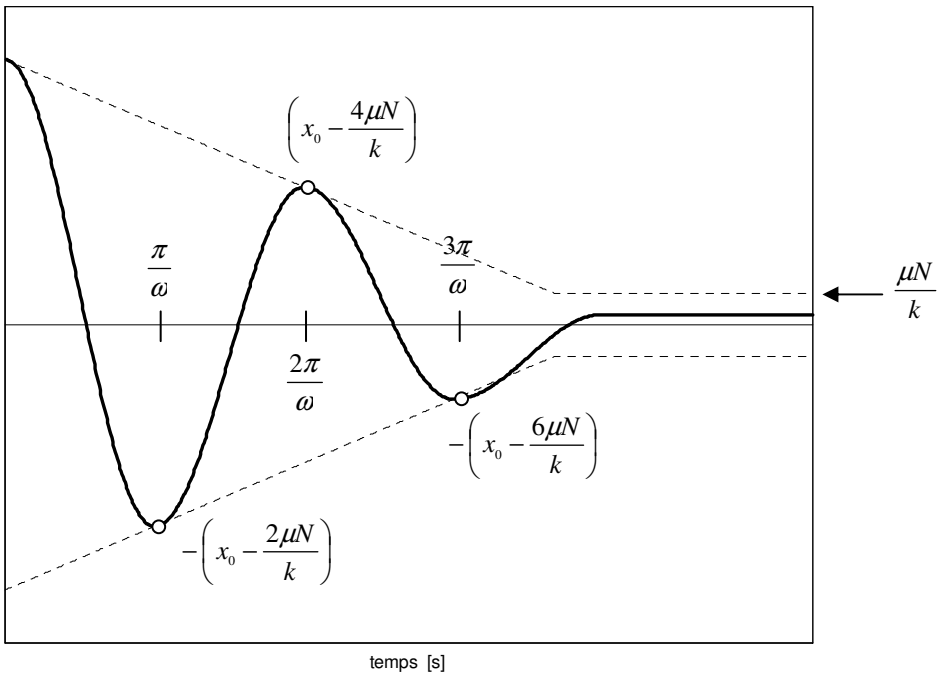


Figure 2.26 - Oscillation libre avec frottement solide

Remarques :

a) L'amplitude des oscillations décroît linéairement comme

$$x_0 - \frac{2\mu N\omega}{\pi k} t$$

b) La fréquence d'oscillation du système amorti par frottement solide est la même que pour le système non amorti.

c) La position d'arrêt peut être différente de la position d'équilibre initial.

2.2 – Energie dissipée par cycle et amortissement équivalent

La **réponse harmonique forcée** d'un système avec amortissement de par frottement solide est la solution de l'équation

$$m\ddot{x} + \mu N \operatorname{sign}(\dot{x}) + kx = F \cos\omega t$$

Plutôt que de résoudre cette équation directement, on recherche une solution approchée en considérant la solution du système à amortissement visqueux qui dissipe la même **énergie par cycle.** C'est une hypothèse raisonnable tant que la force d'excitation est bien plus importante que la force de friction ($F >> \mu N$).

On suppose une réponse stationnaire de la forme

$$x(t) = X \sin\omega t$$

L'énergie dissipée par cycle ΔE par un système dont le coefficient d'**amortissement visqueux** vaut c est

$$\Delta E_V = \int_{\text{cycle}} F_d \, dx = \int_0^{2\pi/\omega} \left(c\dot{x} \frac{dx}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi/\omega} c\dot{x}^2 \, dt$$

avec $\dot{x}(t) = \omega X \cos\omega t$

$$\Delta E_V = \int_0^{2\pi/\omega} c\omega^2 X^2 \cos^2 \omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{c}{2} \omega^2 X^2 \, dt = \pi c \omega X^2$$

(car $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t$)

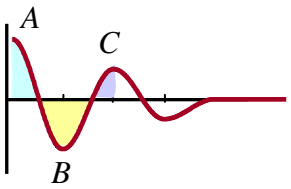
Par ailleurs, l'énergie dissipée par cycle par **frottement solide** est

$$\Delta E_S = \int_{\text{cycle}} F_d \, dx = \int_0^{2\pi/\omega} \left(\mu N \operatorname{sign}(\dot{x}) \frac{dx}{dt} \right) dt = \mu N \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sign}(\dot{x}) \, \dot{x} \, dt$$

En séparant cette intégrale en *3 zones* en fonction du signe de $\dot{x}$

$$\Delta E_S = \mu N\ \omega X\left[\underbrace{\int_0^{\pi/2\omega}\cos\omega t\,dt}_{A} - \underbrace{\int_{\pi/2\omega}^{3\pi/2\omega}\cos\omega t\,dt}_{B} + \underbrace{\int_{3\pi/2\omega}^{2\pi/\omega}\cos\omega t\,dt}_{C}\right]$$

$$= 4\mu N\ \omega X\int_0^{\pi/2\omega}\cos\omega t\,dt = 4\mu N X$$



(en considérant $\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du = \frac{1}{\omega}\left[\sin u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega}$).

Pour qu'un système à amortissement visqueux dissipe la même énergie qu'un système à amortissement par frottement solide : $\Delta E_V = \Delta E_S$, il faut qu'il ait un coefficient d'amortissement visqueux équivalent

$$c_{\text{eq}} = \frac{4\mu N}{\pi\omega X},$$

ou en terme de rapport d'amortissement équivalent

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{c_{\text{eq}}}{2m\,\omega_0} = \frac{2\mu N/m}{\pi\omega_0\omega X}$$

On constate qu'il dépend de l'**amplitude** et de la **fréquence** d'excitation. Ainsi le système à frottement visqueux dont le mouvement est décrit par

$$\ddot{x} + 2\zeta_{\text{eq}}\omega_0\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F}{m}\cos\omega t,$$

dissipera la même énergie par cycle que le système à frottement solide. Sa solution est de la forme $x(t) = X\cos(\omega t - \phi)$, X amplitude *réelle*

$$X = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta_{\text{eq}}\,r\right)^2}} = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(4\mu N/\pi kX\right)^2}}$$

En résolvant cette expression pour X

$$X^2\left[\left(1-r^2\right)^2 + \frac{1}{X^2}\left(\frac{4\mu N}{\pi k}\right)^2\right] = \left(\frac{F}{k}\right)^2$$

on obtient pour l'amplitude

$$X = \frac{F}{k}\frac{\sqrt{1-\left(4\mu N/\pi F\right)^2}}{\left|1-r^2\right|}$$

Par ailleurs, la phase s'écrit

$$\phi = \arctan\frac{2\zeta_{\text{eq}}\,r}{1-r^2} = \arctan\frac{4\mu N}{\pi kX\left(1-r^2\right)}$$

En substituant dans cette dernière équation l'expression de X

$$\phi = \arctan \frac{\pm 4\mu N}{\pi F \sqrt{1-\left(4\mu N/\pi F\right)^2}} \qquad \text{(le signe } \pm \text{ dépend de } \left|1-r^2\right|\text{)}$$

ainsi quand $r<1 \;\Rightarrow\; \phi>0$ et quand $r>1 \;\Rightarrow\; \phi<0$.

Remarque

Contrairement au système à amortissement visqueux, à la résonance ($r=1$), le modèle de système à frottement solide présente une amplitude infinie et une discontinuité pour la phase.
Les expressions pour la réponse sont valables seulement dans le cas où $4\mu N < \pi F$, ce qui confirme l'hypothèse de départ.
L'amplitude du système n'est pas une fonction linéaire de la force d'excitation et sa phase dépend de F. Il ne satisfait pas au principe de superposition. C'est un **système non-linéaire**.

2.3 – Amortissement hystérétique (ou structural)

Nous avons vu qu'il est intéressant d'étudier les mécanismes d'amortissement en examinant l'énergie dissipée par cycle définie par l'équation

$$\Delta E = \int_{\text{cycle}} F_d \, dx, \qquad F_d : \text{ force d'amortissement}$$

On définit une capacité d'amortissement spécifique par le rapport de l'énergie perdue par cycle sur la valeur crête de l'énergie potentielle $\Delta E/U_{\max}$. Le **facteur de perte** est l'expression précédente normalisée par 2π

$$\eta = \frac{\Delta E}{2\pi U_{\max}},$$

$U_{\max}$ est l'énergie potentielle au maximum du déplacement.

Pour un système à amortissement **visqueux**

$$\eta = \frac{\pi c \omega X^2}{2\pi\left(\frac{1}{2}kX^2\right)} = \frac{c\,\omega}{k}$$

A la fréquence de résonance $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$, le facteur de perte est le **double** du rapport d'amortissement :

$$\eta = \frac{c}{\sqrt{km}} = 2\zeta .$$

Si on considère la force nécessaire pour déplacer la masse d'un système à amortissement **visqueux**

$$F = kx + c\dot{x}$$

avec $x = X \sin \omega t$ et $\dot{x} = \omega X \cos \omega t$. Avec $\cos \omega t = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \omega t}$, il est possible d'écrire

$$F = kx \pm c\omega\sqrt{X^2 - x^2}$$

Dans le plan (F, x), cette relation est représentée par l'ellipse de la Figure 2.27a. C'est une boucle d'hystérésis dont l'aire correspond à l'énergie perdue par cycle $\Delta E_V = \pi c \omega X^2$. Pour $c = 0$, l'ellipse devient la droite $F = kx$.

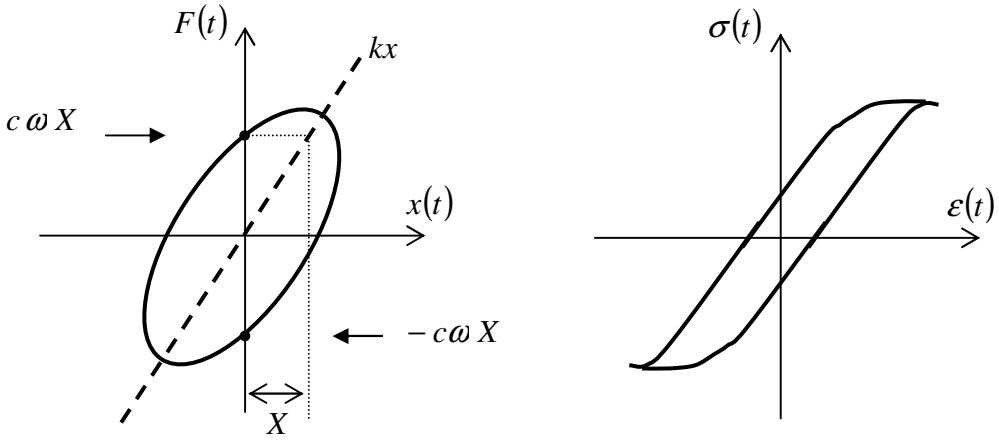


Figure 2.27 - (a) Ellipse représentant la boucle d'hystérésis dans le cas d'un amortissement visqueux. (b) Boucle d'hystérésis dans le cas d'un amortissement structural.

En mesurant les contraintes et les déformations de matériaux excités par des efforts harmoniques, il apparaît également des boucles d'hystérésis semblables. Elles sont dues à des dissipations d'énergie appelées **amortissement hystérétique** ou amortissement structural. L'aire fermée dans la boucle correspond à la perte d'énergie par cycle

$$\Delta E_H = \pi k \beta X^2$$

qui est proportionnelle à la raideur, au carré de l'amplitude et à β la constante d'amortissement hystérétique (β est indépendant de la fréquence). Si on compare cette dernière expression à celle de la perte d'énergie par cycle par amortissement visqueux

$$\Delta E_V = \Delta E_H \quad \Rightarrow \quad \pi c_{\text{eq}} \omega X^2 = \pi k \beta X^2$$

le coefficient d'amortissement équivalent d'un système à amortissement visqueux qui dissiperait ma même énergie par cycle

$$c_{\text{eq}} = \frac{k\beta}{\omega}$$

β étant déterminé expérimentalement à partir de la courbe d'hystérésis. L'équation du mouvement d'un tel système est

$$m\ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega}\dot{x} + kx = F\cos\omega t\,.$$

Si la réponse en régime stationnaire est de la forme $x(t) = X\cos(\omega t - \phi)$, on obtient le même type de solution que précédemment

$$X = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta_{\text{eq}} r\right)^2}} \qquad \text{et} \qquad \phi = \arctan\frac{2\zeta_{\text{eq}} r}{1-r^2}$$

où $\zeta_{\text{eq}} = c_{\text{eq}} \big/ 2\sqrt{km} = \beta\omega_0/2\omega = \beta/2r$, soit

$$X = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \beta^2}} \qquad \text{et} \qquad \phi = \arctan\frac{\beta}{1-r^2}\,.$$

Contrairement au cas de l'amortissement visqueux, on observe que l'amplitude maximale de Xk/F à lieu à la fréquence de résonance $r = 1$. Autre particularité, la réponse n'est jamais en phase avec la force d'excitation.

En utilisant des **variables complexes** (voir la remarque de la section 1.2)

$$m\underline{\ddot{x}} + \frac{\beta k}{\omega}\underline{\dot{x}} + k\underline{x} = F\,e^{j\omega t}$$

avec $\underline{x} = X\,e^{j\omega t}$ et $\underline{\dot{x}} = j\omega X\,e^{j\omega t} = j\omega\underline{x}$, d'où

$$m\underline{\ddot{x}} + k(1 + j\beta)\underline{x} = F\,e^{j\omega t}$$

L'amortissement hystérétique (ou structural) peut donc être pris en compte sous la forme d'une **raideur complexe**

$$\underline{k} = k(1 + j\beta)\,.$$

3 – REPONSE FORCEE A UNE EXCITATION QUELCONQUE

3.1 – Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système à un degré de liberté se définie comme la réponse à une excitation de la forme $F(t) = F_0\,\delta(t)$ où $\delta(t)$ est la fonction de Dirac :

$$x(t) = F_0\,h(t)$$

La **réponse impulsionnelle** est donc

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour} \quad t < 0 \\ \dfrac{1}{m\omega_a}\exp(-\zeta\omega_0 t)\,\sin\omega_a t, & \text{pour} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

avec la pseudo-pulsation $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$,

La réponse impulsionnelle est donnée pour une impulsion unitaire $\delta(t)$ appliquée à $t = 0$. Une excitation impulsionnelle[2] appliquée à l'instant $t = t_1$

$$F(t) = I_0\,\delta(t - t_1)$$

aura pour réponse

$$x(t) = I_0\,h(t - t_1) = \frac{I_0}{m\omega_a}e^{-\zeta\omega_0(t-t_1)}\sin\omega_a(t - t_1)$$

pour $t \geq t_1$ et $x(t) = 0$ pour $t < t_1$. Cette solution s'entend au sens d'une solution particulière, une solution générale viendrait s'ajouter si les conditions initiales n'étaient pas nulles (existence d'un mouvement pour $t \leq 0$).

3.2 – Réponse à une excitation non-sinusoïdale

La réponse à une excitation quelconque $F(t)$ correspond au produit de convolution de cette excitation par la réponse impulsionnelle du système à 1 ddl

$$x(t) = F(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

Puisque la réponse impulsionnelle est causale ($h(t) = 0$ pour $t < 0$)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} F(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau .$$

Si l'excitation est-elle aussi causale, on pourra écrire $x(t) = \int_{0}^{t} F(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$.

[2] L'impulsion $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0\,\delta(t)dt = I_0$ s'exprime en Ns ou kg m s^{-1} et $I_0 h(t)$ a bien la dimension d'un déplacement.

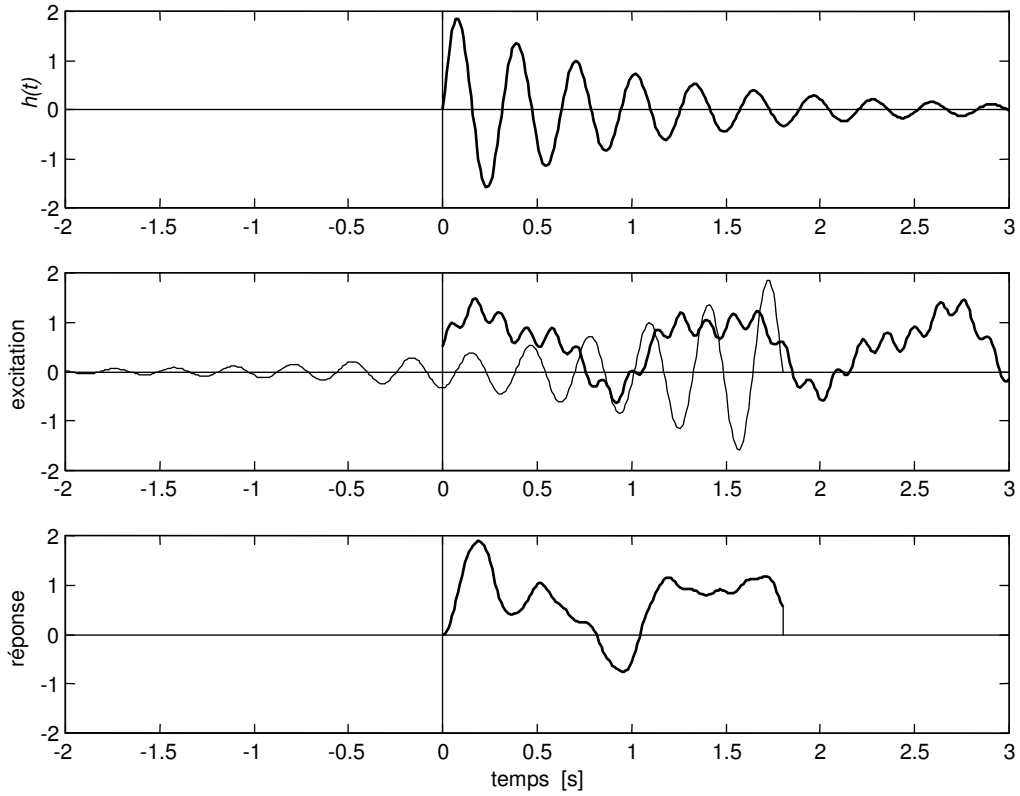


Figure 2.28 - Calcul de la réponse à une excitation quelconque par convolution par la réponse impulsionnelle du système à un ddl.

Exemple : Réponse de l'oscillateur masse-ressort amorti à une force en échelon (fonction de Heaviside)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k\,x = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ F_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Dans le cas d'un système sous-amorti, la réponse s'écrit

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{F_0}{m\omega_a} e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin\omega_a(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_a} e^{-\zeta\omega_0 t} \int_{t_0}^{t} e^{\zeta\omega_0\tau} \sin\omega_a(t-\tau)\,d\tau$$

L'intégration de cette fonction (table) conduit à

$$x(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0(t-t_{01})} \cos[\omega_a(t-t_0) - \phi] \qquad \text{pour} \quad t \geq t_0$$

$$\text{avec} \phi = \arctan\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

En absence d'amortissement, le système continue à osciller indéfiniment

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - \cos\omega_0 t\right)$$

Quand $0 < \zeta < 1$ et $t >> 0$, on tend vers la réponse stationnaire du système

$$x_s(t) = \frac{F_0}{k}$$

La Figure 2.29 représente l'excitation et la réponse dans cette configuration

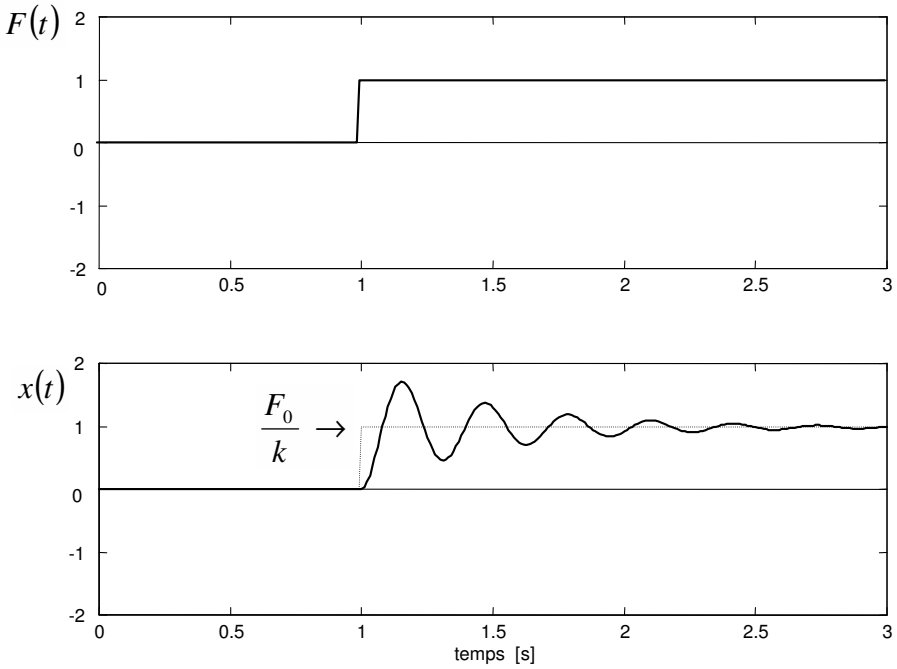


Figure 2.29 – Excitation (haut) et réponse (bas) d'un système à 1 ddl.
$m = 10$ kg, $\omega_0 = 20$ rad/s, $\zeta = 0.05$

3.3 - Réponse à une excitation périodique quelconque

Soit une excitation qui correspond à une fonction ayant une période T, telle que $F(t+T) = F(t)$. Cette fonction peut être représentée par une série de Fourier

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t\right), \qquad \omega_T = \frac{2\pi}{T}$$

L'équation du mouvement est

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k\,x = F(t)$$

et sa solution particulière

$$x_p(t) = x_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n\left[a_n \cos(n\omega_T t - \phi_n) + b_n \sin(n\omega_T t - \phi_n)\right]$$

avec

$$X_n = \frac{1}{m}\left\{\left[\omega_0^2 - \left(n\omega_T\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\omega_0 n\omega_T\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \phi_n = \arctan\frac{2\zeta\omega_0 n\omega_T}{\omega_0^2 - \left(n\omega_T\right)^2}$$

La solution particulière $x_0(t)$ satisfait l'équation

$$m\ddot{x}_0 + c\,\dot{x}_0 + k\,x_0 = \frac{a_0}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_0 = \frac{a_0}{2k}$$

Pour obtenir la solution complète, on ajoute la solution de l'équation homogène (la réponse libre). Pour le cas où $0 < \zeta < 1$,

$$x(t) = A\, e^{-\zeta\omega_0 t}\, \sin\left(\omega_a t - \theta\right) + x_p(t)$$

où A et θ sont déterminés par les conditions initiales : le premier terme représente donc la réponse transitoire et $x_p(t)$ la réponse stationnaire.

3.4 - Utilisation de la transformation de Laplace

La transformée de Laplace est un outil particulièrement utile pour calculer la réponse des systèmes à un grand nombre d'excitations. C'est aussi une méthode générale pour résoudre les équations différentielles. La transformée de Laplace d'une fonction intégrable $f(t)$ telle que $f(t) = 0$ pour $t < 0$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

s est une variable complexe. $F(s)$ est l'image de la fonction $f(t)$ dans le plan complexe s. La transformée de Laplace possède des propriétés intéressantes pour la dérivation

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$$
$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

où $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ sont les valeurs initiales. Il est donc possible de résoudre une équation différentielle en tenant compte de ses conditions initiales. Par exemple, le système à 1 ddl non-amorti décrit par

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0 \qquad x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle conduit à

$$s^2\, X(s) - s\,x_0 - v_0 + \omega_0^2\, X(s) = 0$$

d'où

$$X(s) = \frac{s\,x_0 + v_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

Pour revenir à la description temporelle de la réponse, on emploie la transformée inverse

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

Plutôt que de calculer l'intégrale, en pratique on utilise souvent une table ou "dictionnaire d'images" :

$$X(s) = \frac{s\,x_0}{s^2+\omega_0^2} + \frac{v_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos\ at \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin\ at$$

d'où la solution : $$x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Exemple : Calcul de la réponse impulsionnelle d'un système à 1 ddl sous-amorti
Pour une impulsion unitaire, l'équation du mouvement est

$$m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = \delta(t) \qquad \text{avec} \quad x_0 = 0 \ \text{ et } \ v_0 = 0$$

La transformée de Laplace conduit à

$$\left(m\,s^2 + c\,s + k\right)X(s) = 1$$

ou en normalisant par rapport à la masse

$$\left(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2\right)\,X(s) = \frac{1}{m}$$

d'où la solution

$$X(s) = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = H(s)$$

Un dictionnaire d'images (*J. Hladik, La transformée de Laplace à plusieurs variables, Masson, 1969)* donne

$$\frac{1}{p^2 + 2abp + b^2} \quad \leftrightarrow \quad \left[b^2\left(1-a^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\ e^{-abt}\ \sin\left[b\sqrt{1-a^2}\ t\right] \quad \text{pour} \quad a^2 < 1$$

donc

$$x(t) = \frac{1/m}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}\ e^{-\zeta\omega_0 t}\ \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\ t\right)$$

qui est bien la réponse impulsionnelle du système

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$$

La transformée de Fourier est aussi largement employée

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

La transformée de Fourier peut s'obtenir à partir de la transformée de Laplace avec $s = j\omega$ et en changeant les bornes d'intégration

$$H(\omega) = H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

3.5 - Réponses à des excitations aléatoires

Pour les excitations déterministes les fonctions du temps sont connues. Avec des excitations aléatoires, la réponse du système est seulement connue sous forme statistique. Aussi la réponse $x(t)$ ne pourra être obtenue que sous une forme identique.

La **densité de puissance spectrale** (autospectre) est une mesure de la répartition de puissance dans le domaine des fréquences d'un signal aléatoire

$$\boxed{S_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{E}\{X^*(\omega,T) X(\omega,T)\}}$$

où

$$X(\omega,T) = \int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

est la transformée de Fourier d'un tronçon de signal de durée finie T (pour assurer la convergence). La réponse d'un système de réponse impulsionnelle $h(t)$ excité par une force aléatoire $F(t)$ est représentée par le produit de convolution

$$x(t) = F(t) * h(t)$$

dont la transformée de Fourier est

$$X(\omega,T) = F\{F(t) * h(t)\} = H(\omega) F(\omega,T)$$

La densité de puissance spectrale de la réponse $x(t)$ s'écrit alors

$$S_{xx}(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{E}\{F(\omega,T) F^*(\omega,T)\}$$

$$\boxed{S_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{FF}(\omega)}$$

Pour déterminer la fonction de transfert $H(\omega)$ d'un système avec un signal aléatoire (pot vibrant excité par un bruit blanc par exemple), on utilise la densité de **puissance interspectrale** (interspectre) entre le signal de la réponse et celui de la force d'excitation

$$S_{Fx}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{E}\{F^*(\omega,T) X(\omega,T)\}.$$

En remplaçant $X(\omega,T)$ par $H(\omega)F(\omega,T)$ on peut écrire

$$\boxed{H(\omega)=\frac{S_{Fx}(\omega)}{S_{FF}(\omega)}}$$

Remarque : La fonction de transfert obtenue par cette procédure est connue comme étant de type H_1 .

[APPLICATION 3] *Analyseur de spectre*

Cet analyseur est très utilisé en vibration et en acoustique. Il permet par exemple de faire une estimation de la **densité de puissance spectrale** ou **interspectrale** (plus brièvement, interspectre ou autospectre). Il est généralement basé sur la transformée de Fourier rapide (**FFT**) d'un signal échantillonné et numérisé.

Par exemple, l'interspectre entre deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ s'exprime mathématiquement par

$$S_{xy}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{E}\{X^*(f,T)Y(f,T)\}$$

Comme cet interspectre représente une distribution de puissance sur une échelle de fréquence allant de $[-\infty,+\infty]$, il est nécessaire d'en tenir compte pour l'intégrer sur une bande $[f_1, f_2]$:

$$P=\int_{-f_2}^{-f_1}S_{xy}(f)\,\mathrm{d}f+\int_{f_1}^{f_2}S_{xy}(f)\,\mathrm{d}f$$

Pour des signaux $x(t)$ et $y(t)$ **réels**, l'interspectre présente des symétries (paire pour la partie réelle et impaire pour la partie imaginaire) qui conduisent souvent à utiliser une définition (interspectre unilatère) qui permet de ne considérer que les fréquences positives

$$G_{xy}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\mathrm{E}\{X^*(f,T)Y(f,T)\}\quad\text{pour}\quad f\geq 0$$

tel que $P=\int_{f_1}^{f_2}G_{xy}(f)\,\mathrm{d}f$ puisque $G_{xy}(f)=2\,S_{xy}(f)$ pour $f\geq 0$.

Remarque : les relations de symétrie pour les interspectres de signaux réels dont il a été question plus haut conduisent aux définitions :

$$S_{xy}(f)=G_{xy}(f)/2\quad\text{et}\quad S_{xy}(-f)=G_{xy}^*(f)/2$$

En pratique, un tronçon du signal $x(t)$ de durée T est échantillonné selon le critère de Shannon ($\Delta t=1/F_e$, F_e : fréquence d'échantillonnage), puis numérisé pour produire un vecteur de M valeurs ($T=M\,\Delta t$, résolution : $\Delta f=1/T=F_e/M$) :

$$x_m=x(t_m),\qquad m=\{1\cdots M\}$$

La FFT appliquée à ce vecteur conduit à $M/2$ valeurs pour la partie réelle et $M/2$ valeurs pour la partie imaginaire :

$$\tilde{X}(f_k) = \mathrm{FFT}\{x_m\} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{N} x_m \; e^{-j\frac{2\pi k(m-1)}{M}}$$

Dans le cas de signaux aléatoires (bruits par exemple), l'interspectre est **estimé** avec un nombre limité de tronçons de signaux et l'espérance mathématique E est remplacée par une moyenne sur N tronçons (N vecteurs de longueur M)

L'**estimation de l'interspectre** s'écrit alors

$$\tilde{G}_{xy}(f_k) = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} \tilde{X}_n^*(f_k)\,\tilde{Y}_n(f_k)$$

La Figure 2.30 représente le schéma fonctionnel d'un analyseur de spectre pour obtenir un interspectre selon l'expression précédente.

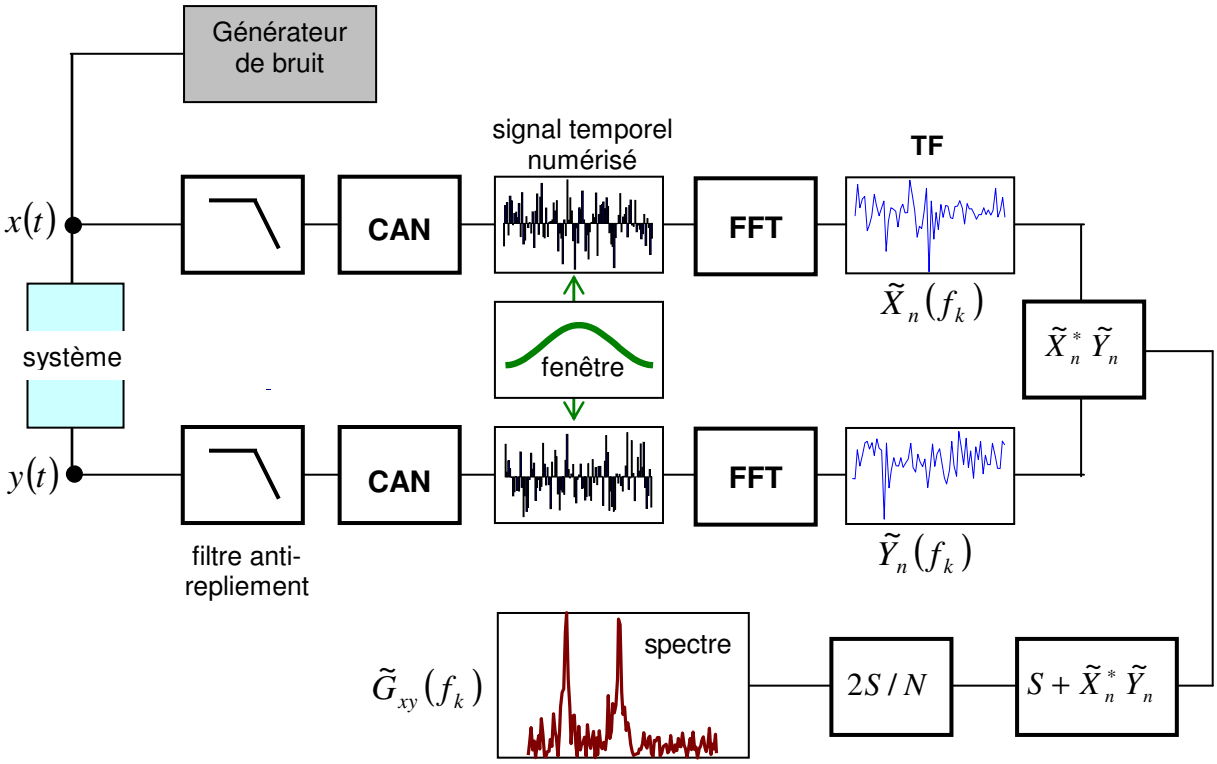


Figure 2.30 – Schéma fonctionnel d'un analyseur de spectre

Remarques

1) un filtre anti-repliement permet le respect de la condition de Shannon avant échantillonnage du signal (échantillonneur-bloqueur et conversion analogique-numérique),
2) une fenêtre (hanning) est souvent utilisée pour multiplier le signal numérique pour réduire l'effet de troncature (création de lobes secondaires),
3) l'autospectre $\tilde{G}_{xx}(f_k)$ s'obtient en remplaçant $y(t)$ par $x(t)$,

4) la formulation de $\tilde{G}_{xy}(f_k)$ associée aux définitions des transformées de Fourier discrètes $\tilde{X}_n(f_k)$ et $\tilde{Y}_n(f_k)$ conduit à un interspectre dont la puissance de chaque raie spectrale vaut

$$\tilde{G}_{xy}(f_k) = \int_{\Delta f} G_{xy}(f)\,\mathrm{d}f$$

Pour obtenir une estimation de la **densité spectrale** à la fréquence f_k qui soit indépendante de la résolution Δf, il faut diviser $\tilde{G}_{xy}(f_k)$ par Δf (s'assurer que cette opération est réalisée par l'analyseur en calculant le spectre à des résolutions différentes, en changeant *M*).

[APPLICATION 4] *Mesure des fonctions de transfert*

On trouvera différentes formes de fonction de transfert en fonction de la réponse (déplacement ou accélération)

Accélérance $A(\omega) = \dfrac{a(\omega)}{F(\omega)}$ avec l'accélération $a(\omega)$

Admittance $Y(\omega) = \dfrac{x(\omega)}{F(\omega)} = -\dfrac{A(\omega)}{\omega^2}$ avec le déplacement $x(\omega) = -\dfrac{a(\omega)}{\omega^2}$

La fonction de transfert mesurée (**FRF** : Fonction de Réponse en Fréquence) dépend du type de capteur utilisé pour mesurer la réponse de la structure. Nous désignons par $H_{Fa}(\omega)$ la fonction de transfert mesurée entre un signal de réponse délivré par un accéléromètre et un signal d'excitation délivré par un capteur de force.

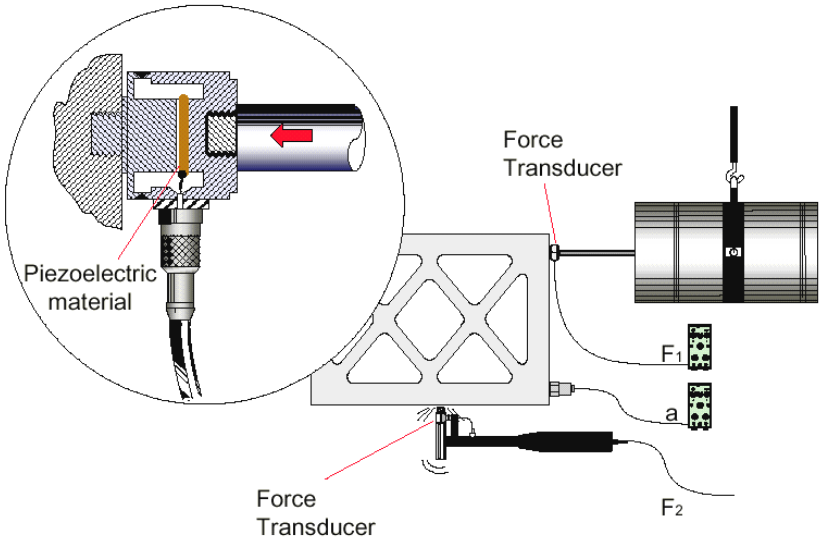


Figure 2.31 – Détermination de la fonction de transfert entre deux points d'une structure

La Figure 2.31 illustre la détermination d'une fonction de transfert entre deux points d'une structure. Deux types d'excitations sont employés : un pot vibrant ou un marteau d'impact. Dans les deux cas, le signal d'entrée est délivré par un capteur de force (F_1 ou F_2) et le signal de sortie provient de l'accéléromètre (a).

a) **pot vibrant**

C'est un moteur électrodynamique piloté par un signal aléatoire (bruit blanc) ou déterministe large bande (balayage en fréquence, chirp, …). La force est mesurée par un capteur de force placé directement sur la structure. La liaison entre le capteur et le pot vibrant est parfois assurée par une tige (*stinger* : corde à piano ou nylon) dont le comportement en flambage va supprimer l'influence des défauts d'alignement du pot qui auraient tendance à exciter la structure par un moment.

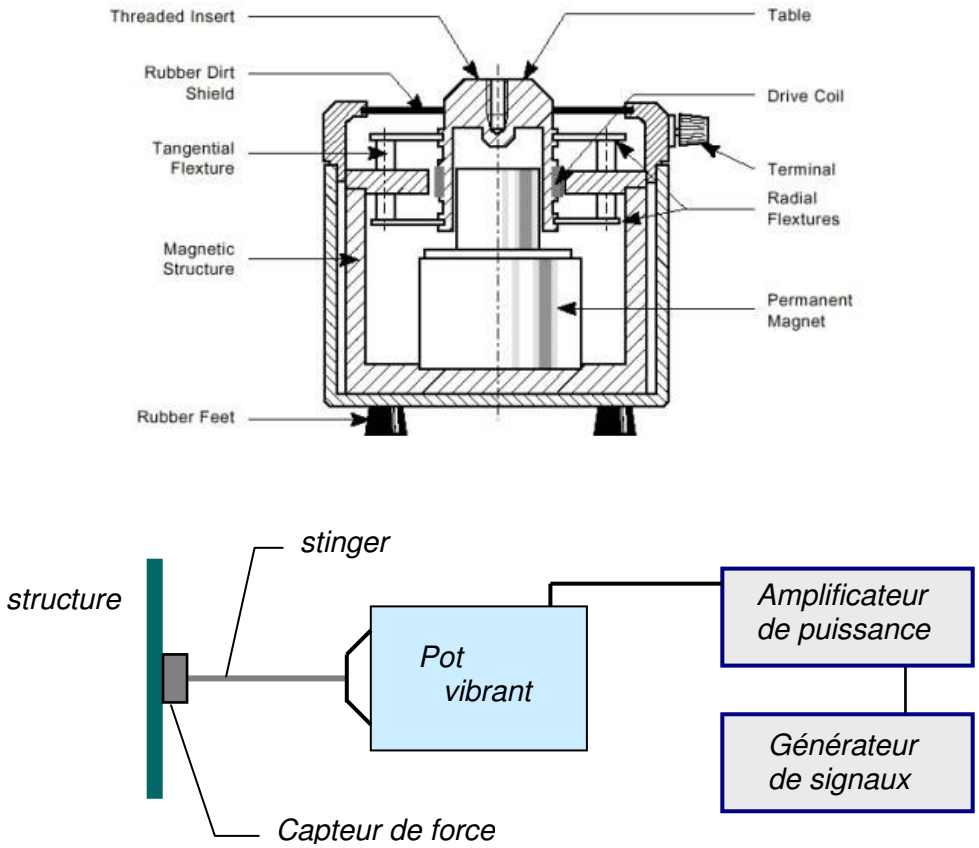


Figure 2.32 – Pot vibrant et son montage sur une structure avec un capteur de force.

Ce mode d'excitation ajoute localement une masse qui devra être corrigée pour les structures légères. La fonction de transfert est calculée à partir de densités de puissance spectrale (interspectre $G_{Fa}(\omega)$ et autospectre $G_{FF}(\omega)$)

$$H_{Fa}(\omega) = \frac{G_{Fa}(\omega)}{G_{FF}(\omega)}$$

(estimateur de type H1 : le bruit en sortie tend à être éliminé).

b) **marteau d'impact**

Le capteur de force est placé dans la tête du marteau. C'est une excitation large bande dont la fréquence maximale utilisable f_c dépend de la raideur de l'embout.

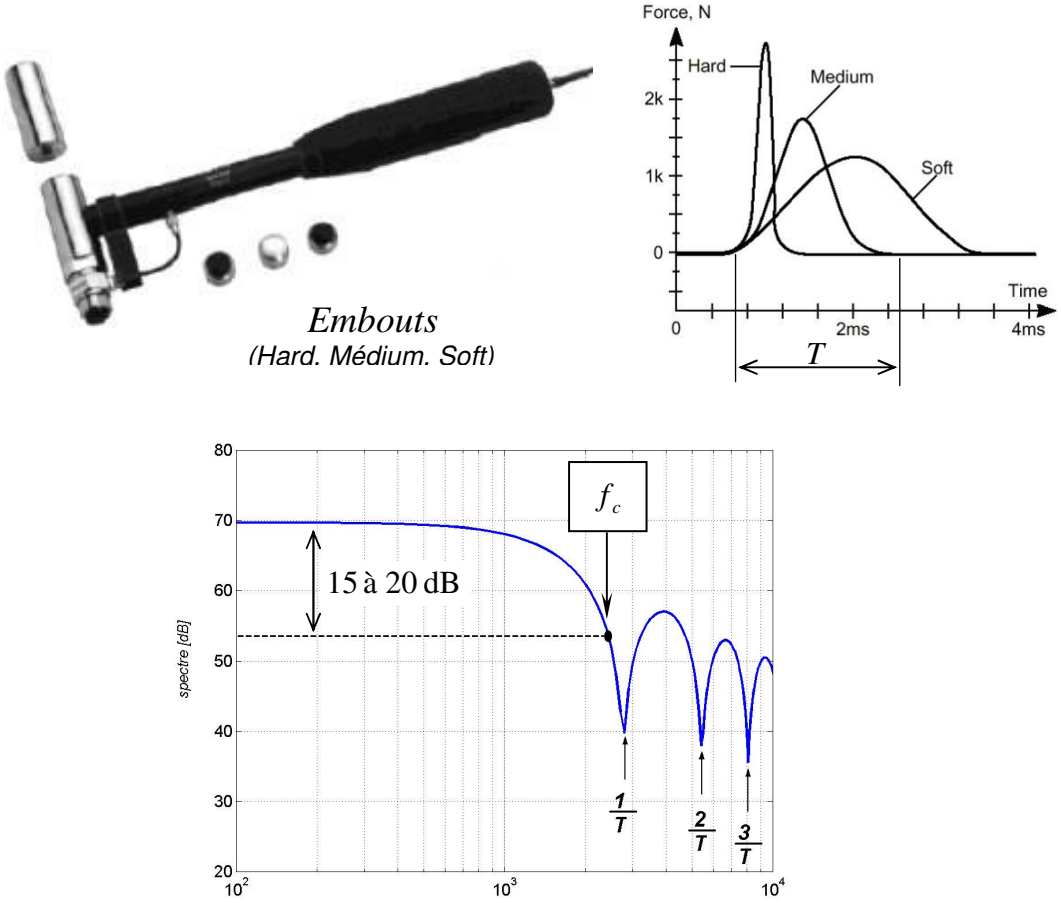


Figure 2.33 – Marteau d'impact et représentation schématique de l'enveloppe spectrale de l'excitation en fonction de la nature de l'embout utilisé.

Il n'y a pas de problèmes de masse ajoutée. L'énergie transmise à la structure reste faible mais la technique possède l'avantage d'être *rapide* et *facile à mettre en œuvre*. Elle demande cependant une certaine habileté à l'expérimentateur pour éviter les rebonds.

La fonction de transfert est obtenue à partir du rapport des transformées de Fourier des signaux d'excitation et de réponse (c'est à dire du rapport $\tilde{G}_{Fa}(f_k)/\tilde{G}_{FF}(f_k)$, calculer sur un seul tronçon de signal, N = 1), souvent moyennée sur plusieurs réalisations. Le signal impulsionnel de force étant de courte durée, une fenêtre rectangulaire est parfois employée pour réduire le bruit (et les rebonds ?). La réponse d'un système peu amorti risquant d'être tronqué par la fenêtre temporelle, une fonction exponentielle doit être utilisée. Cette procédure étant équivalente à l'ajout d'un amortissement supplémentaire, une correction devra être apportée par le logiciel dans le cas de son utilisation pour la détermination de l'amortissement.

[APPLICATION 5] *Mesure de l'amortissement 2*

Les propriétés mises en évidence dans les sections 1.2 et 1.3 ont conduit à deux méthodes de détermination du facteur d'amortissement (qui viennent s'ajouter à la méthode du décrément logarithmique) valables pour les faibles valeurs d'amortissement ($\zeta < 10\,\%$) et largement employées en analyse modale expérimentale : la méthode de la bande passante à 3 dB et la méthode d'identification du cercle. Ces deux méthodes utilisent des fonctions de transfert obtenues expérimentalement. C'est l'admittance $Y(\omega) = \dfrac{x(\omega)}{F(\omega)} = -\dfrac{A(\omega)}{\omega^2}$ qui est employée, mais on voit comment elle peut se calculer facilement à partir de la fonction de transfert accélération/force $H_{Fa}(\omega) = A(\omega)$.

Méthode de la bande passante à 3dB

Le module

$$|Y(\omega)| = \frac{1}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}}$$

présente une valeur maximale à la pulsation $\omega_{\max} = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$ (voir section 1.2). Pour les faibles amortissements que l'on rencontre dans les structures métalliques (inférieur au 1%), $\omega_{\max} \cong \omega_0$ et $Y_{\max} = \left[m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_{\max}^2\right)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_{\max})^2}\right]^{-1} \cong 1/\left(2m\zeta\omega_0^2\right)$. Une atténuation de 3 dB de part et d'autre de cette valeur maximale correspond à la "bande passante" du système. On a remarqué que cette bande passante s'élargissait quand l'amortissement augmentait. Si on appelle ω_1 et ω_2 les pulsations de part et d'autre de $\omega_{\max}$ qui correspondent à une atténuation de 3 dB de $|Y(\omega)|$, on constate que

$$20\log_{10}\frac{|Y(\omega_1)|}{Y_{\max}} = 20\log_{10}\frac{|Y(\omega_2)|}{Y_{\max}} = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}} = -10\log_{10}2 = -3\text{ dB}$$

Cette relation permet d'écrire pour $\omega_i = \omega_1$ ou $\omega_i = \omega_2$

$$\sqrt{2}/Y_{\max} = 1/|Y(\omega_i)| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\left(2\zeta\omega_0^2\right) = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_i^2\right)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_i)^2}$$

qui en portant les deux membres au carré conduit à une équation du second degré en ω_i^2

$$\omega_i^4 - 2\omega_0^2\omega_i^2\left(1-2\zeta^2\right) + \omega_0^4\left(1-8\zeta^2\right) = 0\,,$$

dont les racines sont

$$\omega_i^2 = \omega_0^2\left[\left(1-2\zeta^2\right) \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}\right].$$

De petites valeurs de ζ permettent d'écrire, en négligeant les termes en ζ^4

$$\left(1+\frac{\zeta^2}{2}\right)^2 = 1 + \frac{\zeta^4}{4} + \zeta^2 \approx 1+\zeta^2 \quad \text{d'où} \quad \sqrt{1+\zeta^2} \approx 1 + \frac{\zeta^2}{2}$$

ce qui conduit aux approximations suivantes

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^2 &= \omega_0^2\left[\left(1-2\zeta^2\right)-2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}\right]\approx \omega_0^2\left(1-2\zeta\right)\\ \omega_2^2 &= \omega_0^2\left[\left(1-2\zeta^2\right)+2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}\right]\approx \omega_0^2\left(1+2\zeta\right)\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \omega_2^2-\omega_1^2=4\zeta\omega_0^2$$

En considérant que $\omega_0 \cong \omega_{\max}$ et que

$$\omega_2^2-\omega_1^2=(\omega_2+\omega_1)(\omega_2-\omega_1)\approx 2\omega_0(\omega_2-\omega_1)\approx 2\omega_{\max}(\omega_2-\omega_1),$$

on obtient alors $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1=2\omega_{\max}\zeta$. La méthode consiste à faire varier la fréquence de part et d'autre du lieu de la valeur maximale pour noter les fréquences f_1 et f_2 qui correspondent à une atténuation de 3 dB, ce qui permet de calculer

$$\boxed{\frac{f_2-f_1}{(f_2+f_1)/2}=\frac{\Delta f}{f_{\max}}=\frac{\Delta\omega}{\omega_{\max}}=2\zeta}$$

On définit aussi Q le **facteur de surtension** comme $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_{\max}}=2\zeta=\dfrac{1}{Q}$

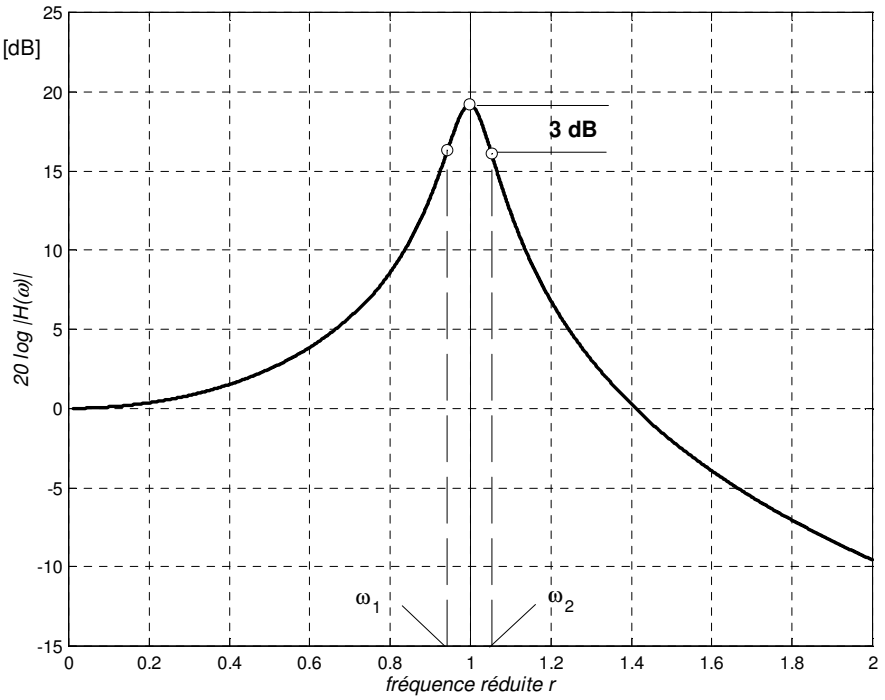


Figure 2.34 - Méthode de la bande passante à 3 dB

Méthode d'identification du cercle ("circle-fitting")

Au voisinage de ω_0 la fonction de transfert sur le plan de Nyquist est assimilable à un cercle (voir section 1.3). Ses paramètres (position et diamètre) sont identifiés à partir des valeurs mesurées par une procédure par moindres carrés et permettent d'obtenir ceux de la fonction de transfert $H_{Fa}(\omega)$ ou de l'admittance $Y(\omega)$: ω_0, ζ et k (ou m).

[ANNEXE] *Informations pratiques sur les mesures vibratoires*

Calibrage des accéléromètres

Système de calibration portable permettant de contrôler toute la chaîne de mesure (voir ci-contre).

Des méthodes de calibration par comparaison avec un accéléromètre de référence (méthode dos à dos : ISO 5347-3) permettent des précisions de l'ordre de 1% à des fréquences fixes (80 Hz ou 160 Hz) ou meilleures que 5% sur l'ensemble du spectre. Les méthodes de substitution utilisent un accéléromètre de référence intermédiaire ou un vibromètre laser.

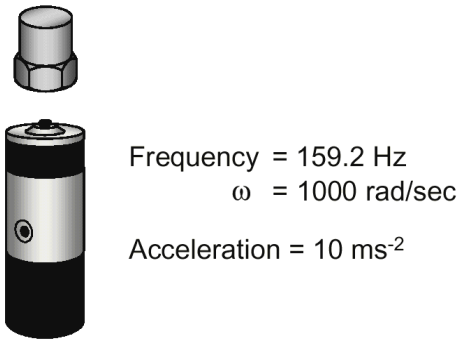


Figure 2.35 – Système de calibration portable pour calibrer l'ensemble de la chaine de mesure.

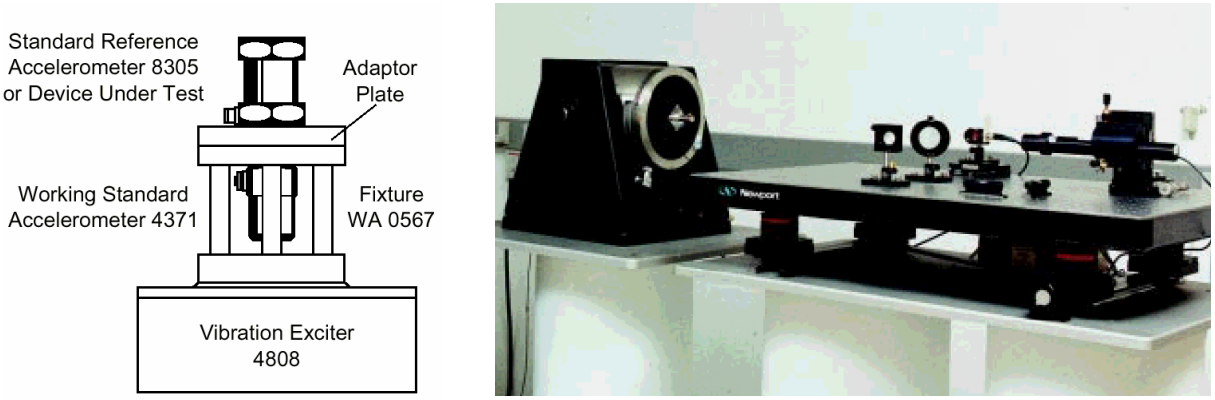


Figure 2.36 – Dispositifs pour l'étalonnage des accéléromètres

Montage des accéléromètres sur la structure

- par vis
- ciment exopy ou cyanoacrylate
- adhésif double face
- cire (pour des températures inférieures à 40°C

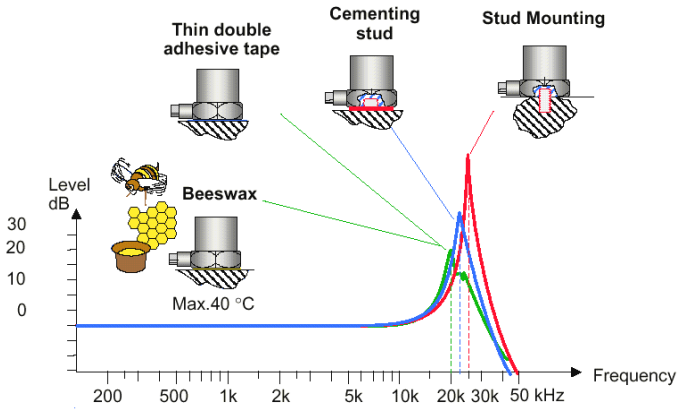


Figure 2.37 – Modes de fixation des accéléromètres (Doc. Brüel & Kjaer)

Précautions d'emploi des accéléromètres

Isolation électrique (rondelle de mica) de la structure pour éviter les boucles de masse

Bruit triboéléctrique créé par les chocs du câble contre la structure

Remède : fixer le câble à la structure par un ruban adhésif.

Les chocs violant comme les chutes sur les sols durs peuvent provoquer des accélérations de plusieurs centaines de g. L'endommagement est caractérisé par des altérations du spectre (d'après BK)

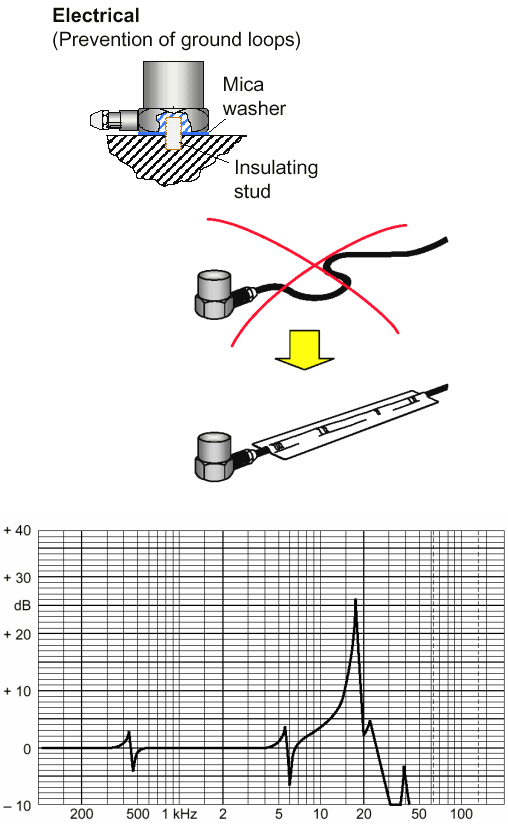


Figure 2.38 – Précautions à prendre pour l'utilisation des accéléromètres (Doc. Brüel & Kjaer)

Vibromètre laser

La vibromètrie laser Doppler (LDV) est une technique de mesure sans contact des vibrations qui utilise l'effet Doppler. Le vibromètre permet la mesure sur des surfaces chaudes, molles, mobiles, miniatures, légères ou difficilement accessibles, sans les charger par la masse d'un accéléromètre. Les vibromètres utilisent généralement un laser Hélium-Néon (rouge visible $\lambda = 0.6328$ µm) de faible puissance (classe 2) et peuvent être utilisés à des distances de quelques centimètres à plusieurs centaines de mètres. Ce sont des dispositifs interférométriques à deux faisceaux qui détectent la différence de phase entre une référence interne et le faisceau de mesure réfléchi sur la cible [3].

C'est donc la composante de la vitesse dans la direction du faisceau qui est mesurée. Les vibromètres délivrent souvent un signal analogique correspondant à cette vitesse vibratoire. Des systèmes comportant 3 têtes vont permettre de mesurer les trois composantes de la vitesse en un point de la surface de l'objet.

[3] pour des informations complémentaires sur ce matériel et son principe voir par exemple : www.polytec.de/polytec-com/l_vib/vib_uni_vib.html et www.bksv.com/pdf/Bp1864.pdf

Les vibrometers laser fonctionnent avec une grande variété d'états de surface mais il est important que la quantité de lumière qui retourne vers l'objectif soit suffisante. Quand la réflexion est spéculaire (surface polie), l'alignement doit être précis pour que le faisceau réfléchi revienne dans la direction de l'instrument. Au contraire, avec une surface diffuse, la lumière sera réfléchie dans toutes les directions mais parfois trop affaiblie pour les surfaces absorbantes. En cas de problèmes de mesure, il est possible d'utiliser une peinture ou un adhésif réfléchissant et diffusant (micro billes).

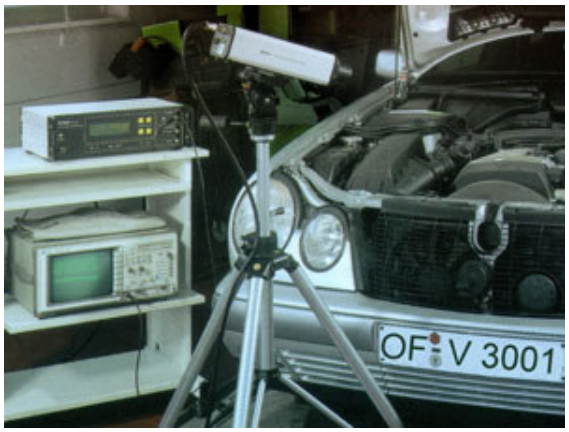


Figure 2.39 – Vibromètre laser et analyseur de spectre (Doc. Polytec).

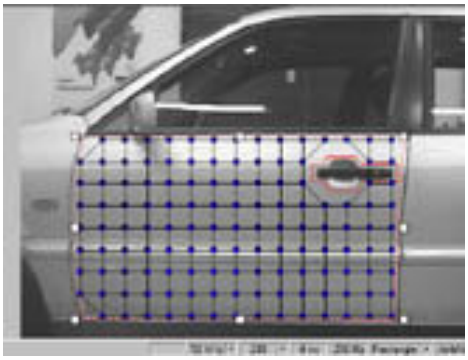




Figure 2.40 – Un vibromètre à balayage est un système dont la tête comporte des miroirs pilotés par calculateur permettant d'effectuer automatiquement des mesures sur un maillage prédéfini (Doc Polytec).

III - SYSTEMES MECANIQUES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

FONDAMENTAL

1. SYSTEMES A DEUX DEGRES DE LIBERTE

   1.1 - Modèle non dissipatif (non-amorti)
   1.2 - Exemple
   1.3 - Réponse forcée

2. GENERALISATION AUX SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

   2.1 - Méthode de la base modale : réponse libre
   2.2 - Systèmes avec amortissement visqueux
   2.3 - Réponse forcée

APPLICATION

3. ABSORBEUR DYNAMIQUE (système à 2 DDL)

4. INTRODUCTION A L'ANALYSE MODALE EXPERIMENTALE

   4.1 - Principe de l'analyse modale expérimentale
   4.2 - Le modèle modal
   4.3 - Acquisition des données expérimentales
   4.4 - Extraction des paramètres modaux

ANNEXES

1. Rappel sur les matrices

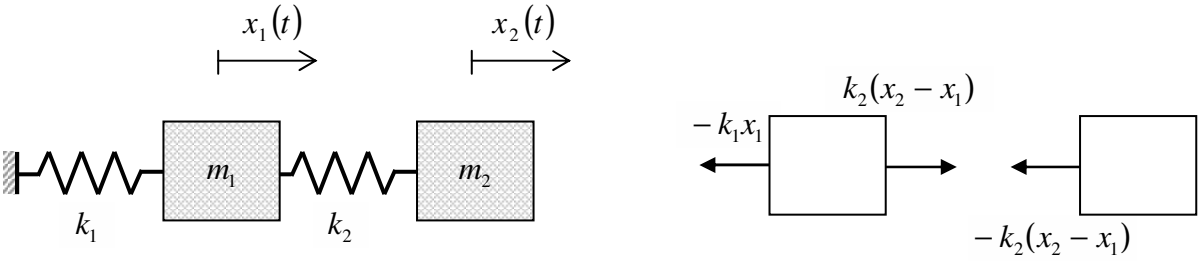
2. Equations de Lagrange

3. Quotient de Rayleigh

FONDAMENTAL

1 – SYSTEME A DEUX DEGRES DE LIBERTE

1.1 – Modèle non-dissipatif (non-amorti)



En sommant les forces qui s'exercent sur chaque masse, on obtient

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

où encore sous la forme de deux équations différentielles du second ordre **couplées**

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases}$$

A ces équations correspondent **4 conditions initiales**

$$x_1(0) = x_{10}, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$$

Pour résoudre ce problème, on utilise une représentation matricielle qui présente l'avantage de pouvoir se généraliser à un nombre quelconque de degrés de liberté.

Des vecteurs **colonnes** sont utilisés pour décrire déplacements, vitesses et accélérations

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

La **matrice des masses** $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ permet d'écrire l'équation dynamique

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1\ddot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 \end{bmatrix}$$

La **matrice des raideurs** permet d'exprimer les forces qui s'appliquent sur les masses

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Kx} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 \\ -k_2 x_1 + k_2 x_2 \end{bmatrix}$$

Le système d'équations qui décrit le système à deux degrés de liberté peut donc s'écrire sous forme matricielle

$$\boxed{\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}}$$

Les matrices de masses et des raideurs sont symétriques

$$\mathbf{M}^{\mathbf{T}} = \mathbf{M} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}^{\mathbf{T}} = \mathbf{K}$$

On suppose une solution harmonique **complexe** de la forme $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}\, e^{j\omega t}$ avec $\mathbf{X}$ le vecteur des amplitudes indépendant de t (dans ce chapitre on omet volontairement de prendre explicitement la partie réelle : $\mathbf{x}(t)$ est donc une variable complexe). L'équation s'écrit

$$\left(-\omega^2\ \mathbf{M} + \mathbf{K}\right)\mathbf{X}\, e^{j\omega t} = \mathbf{0}$$

Comme en général $e^{j\omega t}$ doit être différent de 0, l'équation précédente devient

$$\left(-\omega^2\ \mathbf{M} + \mathbf{K}\right)\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{D}\,\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{D}$ est nommée **matrice dynamique**.

Une solution triviale correspond à $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}\,\mathbf{X} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0}$, ($\mathbf{D}^{-1}$ inverse de **D**), c'est à dire que $x_1 = x_2 = 0$. La solution non-triviale correspond au cas où la matrice $\mathbf{D}$ est singulière (son déterminant est nul et elle n'a pas d'inverse).

Rappel : si $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ alors $\det(\mathbf{D}) = ad - bc$ et $\mathbf{D}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{D})}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

La condition de singularité est appliquée à la matrice dynamique pour obtenir une solution indépendante de $\mathbf{X}$:

$$\det\left(-\omega^2\ \mathbf{M} + \mathbf{K}\right) = 0$$

permet de déterminer l'inconnue ω^2

$$\det(\mathbf{D}) = \det\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix}$$
$$= m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2)\omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

C'est une équation du second degré en ω^2 qui fournit **deux solutions** ω_1^2 et ω_2^2, soit $\pm\omega_1$ et $\pm\omega_2$. En reportant cette solution dans l'équation matricielle, il est possible de déterminer deux vecteurs (vecteurs propres) $\mathbf{X}$

$$\left(-\omega_1^2\ \mathbf{M}+\mathbf{K}\right)\mathbf{X}_1=\mathbf{0}$$
$$\left(-\omega_2^2\ \mathbf{M}+\mathbf{K}\right)\mathbf{X}_2=\mathbf{0}$$

Les vecteurs $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ ne sont connus qu'à un facteur multiplicateur près. La solution de $\mathbf{x}(t)$ est une combinaison linéaire des termes $\mathbf{X}_1\ e^{\pm j\omega_1 t}$ et $\mathbf{X}_2\ e^{\pm j\omega_2 t}$

$$\mathbf{x}(t)=\left(B_1\ e^{j\omega_1 t}+B_2\ e^{-j\omega_1 t}\right)\mathbf{X}_1+\left(B_3\ e^{j\omega_2 t}+B_4\ e^{-j\omega_2 t}\right)\mathbf{X}_2$$

où les coefficients B_1 à B_4 dépendent des conditions initiales $\mathbf{x_0}=\mathbf{x}(0)=\left[x_{10}\quad x_{20}\right]^T$ et $\dot{\mathbf{x}}_\mathbf{0}=\dot{\mathbf{x}}(0)=\left[\dot{x}_{10}\quad \dot{x}_{20}\right]^T$. La solution peut aussi s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x}(t)=A_1\sin\left(\omega_1 t+\phi_1\right)\mathbf{X_1}+A_2\sin\left(\omega_2 t+\phi_2\right)\mathbf{X_2}$$

où les amplitudes et les phases dépendent des conditions initiales.

Chaque masse oscille aux deux fréquences ω_1 et ω_2 appelées **fréquences naturelles** du système. Si les conditions initiales sont choisies telles que $A_2=0$, alors les deux masses oscillent uniquement à ω_1 et leurs positions relatives dépendent du vecteur $\mathbf{X_1}$ appelé **déformée du premier mode**. Réciproquement si les conditions initiales sont choisies pour que $A_1=0$.

NB : les fréquences naturelles du système couplé à deux degrés de liberté ne correspondent pas à celle des systèmes isolés ou bloqués.

1.2 – Exemple

Soit le système précédent avec $m_1=9,\ m_2=1,\ k_1=24,\ k_2=3$. L'équation caractéristique

$$\det(\mathbf{D})=\omega^4-6\omega^2+8=\left(\omega^2-2\right)\left(\omega^2-4\right)=0$$

conduit aux solutions $\omega_1^2=2$ et $\omega_2^2=4$.

Premier vecteur $\mathbf{X_1}$ correspondant à $\omega^2=\omega_1^2=2$

$$\left(-\omega_1^2\ \mathbf{M}+\mathbf{K}\right)\mathbf{X}_1=\begin{bmatrix}27-9(2) & -3\\ -3 & 3-(2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

L'équation précédente fournit deux équations $9x_{11} - 3x_{12} = 0$ et $-3x_{11} + x_{12} = 0$ qui sont dépendantes et conduisent donc à la même solution

$x_{11} = \frac{1}{3} x_{12}$ donc le vecteur est défini à une constante multiplicative près $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Deuxième vecteur $\mathbf{X}_2$ correspondant à $\omega^2 = \omega_2^2 = 4$

$$\left(-\omega_2^2\ \mathbf{M} + \mathbf{K}\right)\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 27 - 9(4) & -3 \\ -3 & 3 - (4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-9x_{21} - 3x_{22} = 0 \ \text{ soit } x_{21} = -\frac{1}{3} x_{22} \quad \text{donc} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solution pour le mouvement des deux masses

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

avec $\omega_1 = \sqrt{2}$ et $\omega_2 = 2$. A_1, A_2, ϕ_1 et ϕ_2 sont déterminés à partir des conditions initiales.

Solution correspondant à des vitesses initiales nulles : $\dot{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \omega_1 A_1 \cos\phi_1\ x_{11} + \omega_2 A_2 \cos\phi_2\ x_{21} \\ 0 &= \omega_1 A_1 \cos\phi_1\ x_{12} + \omega_2 A_2 \cos\phi_2\ x_{22} \end{aligned}\right\} \ \Rightarrow \ \omega_1 A_1 \cos\phi_1 \left(\frac{x_{11}}{x_{21}} - \frac{x_{12}}{x_{22}}\right) = 0$$

d'où $\cos\phi_1 = 0 \ \Rightarrow \ \phi_1 = \frac{\pi}{2}$. De la même manière, on obtiendra $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$. En prenant en compte les valeurs du déplacement initial, il est alors possible d'obtenir A_1 et A_2

$$\left.\begin{aligned} x_{10} &= A_1 \sin\phi_1\ x_{11} + A_2 \sin\phi_2\ x_{21} \\ x_{20} &= A_1 \sin\phi_1\ x_{12} + A_2 \sin\phi_2\ x_{22} \end{aligned}\right\} \ \Rightarrow \ \begin{aligned} x_{10} &= A_1\ x_{11} + A_2\ x_{21} \\ x_{20} &= A_1\ x_{12} + A_2\ x_{22} \end{aligned}$$

soit $A_1 = \frac{x_{10}x_{22} - x_{20}x_{21}}{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}}$ et $A_2 = \frac{x_{10}x_{12} - x_{20}x_{11}}{x_{21}x_{12} - x_{22}x_{11}}$

et finalement avec $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$, l'équation du mouvement dans ce cas particulier est

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} A_1 \cos\left(\sqrt{2}\ t\right) - \frac{1}{3} A_2 \cos(2\ t) \\ A_1 \cos\left(\sqrt{2}\ t\right) + A_2 \cos(2\ t) \end{bmatrix}$$

Remarque : Si on veut mettre en évidence seulement le premier mode (à $\omega_1 = \sqrt{2}$), il faut que $A_2 = 0$ (c'est à dire $x_{10}x_{12} = x_{20}x_{11}$), donc que les déplacements initiaux vérifient la relation $\frac{x_{10}}{x_{20}} = \frac{x_{11}}{x_{12}}$.

Il en sera de même pour le deuxième mode (à $\omega_2 = 2$), pour lequel $A_1 = 0$ conduit à $\frac{x_{10}}{x_{20}} = \frac{x_{21}}{x_{22}}$.

Donc pour obtenir un mouvement correspondant à un mode unique, il faut que le déplacement initial soit proportionnel à la **déformée modale** du mode si les vitesses initiales sont nulles.

1.3 - Réponse forcée

Des forces d'excitation $F_1(t)$ et $F_2(t)$ sont appliquées aux deux masses. L'équilibre des forces conduit au système d'équations

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$$

Le second membre est le vecteur des forces $\mathbf{F}(t) = [F_1(t) \quad F_2(t)]^T$. Pour des excitations complexes $F_1(t) = \underline{F}_1\, e^{j\omega t}$ et $F_2(t) = \underline{F}_2\, e^{j\omega t}$ ($\underline{F}_1$ et $\underline{F}_2$ sont des nombres complexes dont les phases représentent celles de l'excitation). Au vecteur complexe $\mathbf{F}(t) = \underline{\mathbf{F}}\, e^{j\omega t}$ correspondra une réponse également complexe $\mathbf{x}(t) = \underline{\mathbf{x}}\, e^{j\omega t}$. Le système d'équations peut alors s'écrire

$$\mathbf{D}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{F}}$$

avec la matrice dynamique (réelle dans le cas d'un système non-anorti)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix}$$

La solution particulière s'écrit

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^{-1}\,\underline{\mathbf{F}}$$

où $\mathbf{D}^{-1}$ est l'inverse de la matrice dynamique $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{D})} \begin{bmatrix} -\omega^2 m_2 + k_2 & k_2 \\ k_2 & -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

en dehors des fréquences naturelles ω_1 et ω_2 où $\det(\mathbf{D}) = 0$ les réponses complexes sont définies par

$$\underline{x}_1 = \frac{\left(-\omega^2 m_2 + k_2\right)\underline{F}_1 + k_2 \underline{F}_2}{\det(\mathbf{D})} \quad \text{et} \quad \underline{x}_2 = \frac{k_2 \underline{F}_1 + \left(-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2\right)\underline{F}_2}{\det(\mathbf{D})}$$

avec $\det(\mathbf{D}) = \left(k_2 - \omega^2 m_2\right)\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right) - k_2^2$.

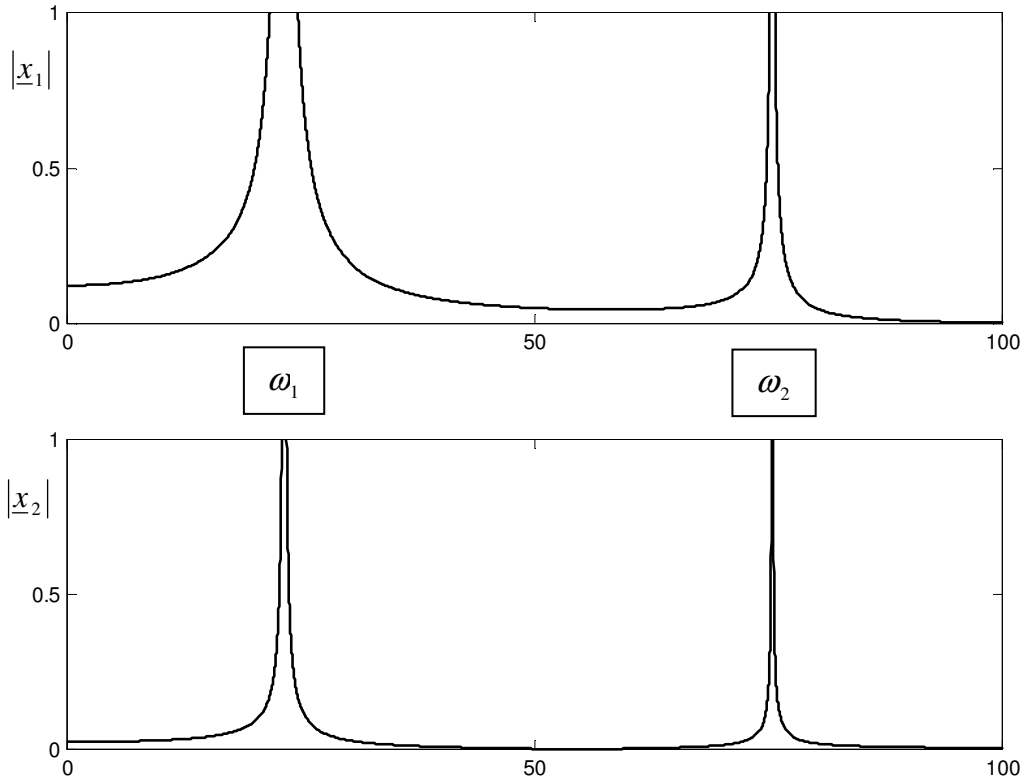
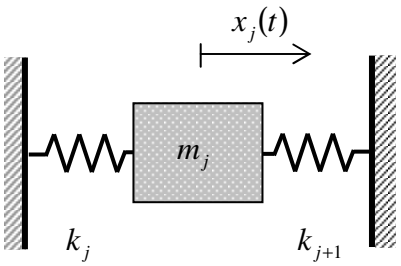


Figure 3.1 - Réponse en fréquence d'un système à deux degrés de liberté

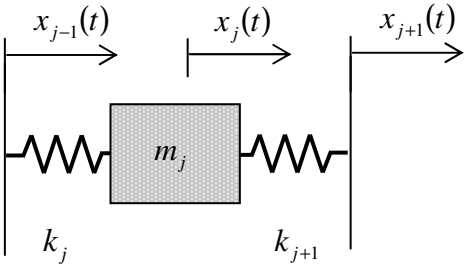
2 - GENERALISATION AUX SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

Pour un système à n degrés de liberté, le vecteur déplacement devient un vecteur colonne $n \times 1$ et les matrices de masse et de raideur sont des matrices carrées $n \times n$. En considérant une masse j, l'équation d'équilibre s'écrit :



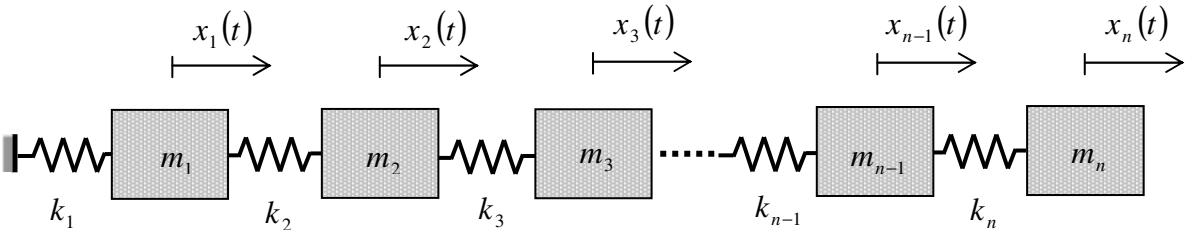
(a) pour les masses $j-1$ et $j+1$ bloquées

$$m_j \ddot{x}_j = -k_j x_j - k_{j+1} x_j$$



(b) pour les masses $j-1$ et $j+1$ en mouvement

$$m_j \ddot{x}_j = -k_j \left(x_j - x_{j-1}\right) - k_{j+1}\left(x_j - x_{j+1}\right)$$



En généralisant au système complet :

$$\begin{aligned} m_j \ddot{x}_j &= -k_j \left(x_j - x_{j-1}\right) + k_{j+1}\left(x_{j+1} - x_j\right) \\ &= k_j x_{j-1} - \left(k_j + k_{j+1}\right) x_j + k_{j+1} x_{j+1} \end{aligned} \qquad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, n$$

avec $x_0 = 0$, $k_{n+1} = 0$. L'ensemble de ces équations peut se mettre sous la forme d'un système linéaire

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

avec

$$\mathbf{M} = \mathrm{diag}\left(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}, m_n\right)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -k_3 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -k_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{M} = \mathrm{diag}(m_j)$ matrice diagonale $n \times n$ pour un système à n masses.

$\mathbf{K}$ matrice symétrique $n \times n$ des raideurs

$\mathbf{M}^{\mathbf{T}} = \mathbf{M}$ et $\mathbf{K}^{\mathbf{T}} = \mathbf{K}$ (symétrie)

Remarque: Dans le cas où la dernière masse est connectée par une raideur k_{n+1} à une partie fixe, le dernier élément sur la diagonale de la matrice de raideur devient $K_{nn} = k_n + k_{n+1}$.

2.1 - Méthode de la base modale : réponse libre

L'objectif est de ramener l'étude à celle d'un système à 1 DDL

- en normalisant l'équation du mouvement par rapport à la masse,
- en réalisant une transformation de coordonnées pour se placer dans la "base modale" où les équations du mouvement sont découplées.

Soit le système à plusieurs degrés de liberté défini par

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

dont on veut déterminer la **réponse libre** pour les conditions initiales:

$\mathbf{x}(0)$ vecteur des déplacements initiaux à $t = 0$,

$\dot{\mathbf{x}}(0)$ vecteur des vitesses initiales à $t = 0$.

Première étape : Normalisation par rapport à la masse

La matrice des masses peut s'écrire $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{M}^{1/2}$ où

$$\mathbf{M}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{m_n} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\left(\sqrt{m_j}\right).$$

Il est possible d'exprimer $\mathbf{M}^{-1/2} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{\sqrt{m_j}}\right)$ et de remplacer $\mathbf{x}$ par (premier changement de variable)

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2}\,\mathbf{q}}$$

Le système d'équation du mouvement devient

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1/2}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q} = 0$$

et en multipliant à gauche par $\mathbf{M}^{-1/2}$

$$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1/2}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q} = 0$$

On remarque que

$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{I}$: matrice unitaire

$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2} = \tilde{\mathbf{K}}$: matrice symétrique normalisée de la raideur

ce qui conduit à l'équation dynamique normalisée

$$\boxed{\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = 0}$$

Si $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q}$ alors $\mathbf{q} = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{x}$ et les **nouvelles valeurs initiales** sont:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{x}(0) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{M}^{1/2}\dot{\mathbf{x}}(0)$$

Deuxième étape : <u>calcul des valeurs propres et vecteurs propres</u>

En cherchant une solution de la forme $\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}e^{j\omega t}$ l'équation du mouvement devient

$$\left(-\omega^2\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{K}}\right)\mathbf{v}e^{j\omega t} = 0$$

Après rejet de la solution triviale $\mathbf{v} = 0$ et en posant $\lambda = \omega^2$, on est ramené à un **problème** typique **de recherche de valeurs propres** :

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

a) à chaque valeur propre λ_i correspond un vecteur propre $\mathbf{v}_i$,

b) $\tilde{\mathbf{K}}$ est une matrice carrée $n \times n$ qui a n valeurs propres et n vecteurs propres,

c) $\tilde{\mathbf{K}}$ est une matrice symétrique alors les λ_i sont réels et les $\mathbf{v}_i$ sont composées d'éléments réels,

d) les n valeurs propres sont obtenues en cherchant les solutions λ de l'équation caractéristique

$$\det\left(\lambda\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{K}}\right) = 0,$$

e) les n vecteurs propres sont les solutions des n équations associées à chaque valeur propre λ_i

$$\left(\lambda_i\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{K}}\right)\mathbf{v}_i = 0$$

f) les vecteurs propres forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants qui peuvent être normés. La norme du vecteur $\mathbf{v}$ est définie par

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{v}} = \left[\sum_{j=1}^{n} v_j^2\right]^{1/2}$$

Pour normer le vecteur $\mathbf{v}$, on recherche le scalaire α tel que $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ ait une norme unitaire, donc

$$(\alpha\mathbf{v}^{\mathbf{T}})(\alpha\mathbf{v}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{1}{\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\mathbf{v}}$$

d'où $$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

g) Les vecteurs normés $\mathbf{u}_i$ satisfont la relation d'orthogonalité

$$\mathbf{u}_i^{\mathbf{T}}\mathbf{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

et peuvent définir une **matrice orthogonale** (les vecteurs $\mathbf{u}_i$ sont dits orthonormaux)

$$\boxed{\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n]}$$

telle que $\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{P} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{K}}\,\mathbf{P} = \mathrm{diag}(\lambda_i)$.

Conséquence : $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}$ (voir Annexe)

Troisième étape : projection dans la base modale

La matrice orthogonale $\mathbf{P}$ est utilisée pour effectuer un nouveau changement de variable : on pose

$$\boxed{\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}\,\mathbf{r}(t)}$$

et on multiplie à gauche par $\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$

$$\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{P}\,\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{P}^{\mathbf{T}}\,\tilde{\mathbf{K}}\,\mathbf{P}\mathbf{r}(t) = 0$$

En tenant compte des propriétés énoncées plus haut et en considérant $\lambda_i = \omega_i^2$, cette transformation conduit à l'expression suivante

$$\boxed{\mathbf{I}\,\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathrm{diag}(\omega_i^2)\,\mathbf{r}(t) = 0}$$

qui représente un système de n **équations indépendantes** (*découplées*) :

$$\ddot{r}_1(t) + \omega_1^2 r_1(t) = 0$$
$$\cdots$$
$$\ddot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = 0$$
$$\cdots$$
$$\ddot{r}_n(t) + \omega_n^2 r_n(t) = 0$$

En exprimant les conditions initiales dans la base modale

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}\,\mathbf{r}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{q}(t)$$

d'où $$\mathbf{r}(0) = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{q}(0) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}\,\dot{\mathbf{q}}(0)$$

la **solution** pour $r_i(t)$ est celle du **système à un degré de liberté**

$$r_i(t) = \frac{\sqrt{\omega_i^2 r_{i0}^2 + \dot{r}_{i0}^2}}{\omega_i} \sin\left(\omega_i t + \arctan\frac{\omega_i r_{i0}}{\dot{r}_{i0}}\right)$$

(r_{i0} et $\dot{r}_{i0}$ sont les éléments des vecteurs $\mathbf{r}(0)$ et $\dot{\mathbf{r}}(0)$)

Quatrième étape : <u>calcul des déplacements des masses</u> (*transformation inverse*)

En utilisant les équations précédentes, il est possible de calculer le vecteur des déplacements $\mathbf{x}$ à partir des solutions dans la base modale $\mathbf{r}$. Puisque $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1/2}\,\mathbf{q}(t)$ et $\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}\,\mathbf{r}(t)$

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{P}\,\mathbf{r} = \mathbf{S}\,\mathbf{r}}$$

La matrice $\mathbf{S} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{P}$ où $\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n]$ est donc constituée de vecteurs colonnes

$$\mathbf{S} = [\boldsymbol{\Phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\Phi}_i, \cdots, \boldsymbol{\Phi}_n]$$

tels que $\boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} (u_i)_1 / \sqrt{m_1} \\ (u_i)_2 / \sqrt{m_2} \\ \vdots \\ (u_i)_n / \sqrt{m_n} \end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{\Phi}_i$ est le vecteur de la **déformée modale** du mode i, c'est à dire le vecteur des déplacements unitaires $(\boldsymbol{\Phi}_i)_j$ de chaque masse j.

Les déplacements peuvent s'écrire

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}\,\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\,\boldsymbol{\Phi}_i, \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Phi}_i = \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

soit pour une masse j

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\,(\boldsymbol{\Phi}_i)_j = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)\,\phi_{ji}$$

avec $A_i = \dfrac{\sqrt{\omega_i^2 r_{i0}^2 + \dot{r}_{i0}^2}}{\omega_i}$ et $\varphi_i = \arctan \dfrac{\omega_i \, r_{i0}}{\dot{r}_{i0}}$

Resumé de la démarche

Première étape : Normalisation par rapport à la masse et premier changement de variable :

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{q}$$

Deuxième étape : recherche des valeurs propres $\lambda_i = \omega_i^2$ et des vecteurs propres $\mathbf{v}_i$.
Les vecteurs normalisés $\mathbf{u}_i$ obtenus à partir des vecteurs $\mathbf{v}_i$ permettent de construire une matrice orthogonale $\mathbf{P}$

Troisième étape : projection dans la base modale
La matrice $\mathbf{P}$ est utilisée pour effectuer un changement de base qui conduit au deuxième changement de variable :

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$$

Le système d'équations obtenu correspond à n équations différentielles indépendantes de systèmes à un degré de liberté dont les solutions $r_i(t)$ peuvent être facilement calculées en employant les conditions initiales ($\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{q}_0 \rightarrow \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{x}}_0 \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_0 \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_0$).

Quatrième étape : calcul des déplacements dans la base physique (*transformation inverse*)
Pour cela le changement de variable inverse est effectué :

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}$$

Le déplacement $x_j(t)$ de chaque masse est une combinaison linéaire des solutions $r_i(t)$ de la base modale :

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t) \left(\phi_i\right)_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{\omega_i^2 r_{i0}^2 + \dot{r}_{i0}^2}}{\omega_i} \sin\left(\omega_i + \arctan \frac{\omega_i \, r_{i0}}{\dot{r}_{i0}} \right) \frac{\left(u_i\right)_j}{\sqrt{m_j}}$$

2.2 - Systèmes avec amortissement visqueux

Les systèmes réels sont amortis mais on ne connaît pas bien dans la plupart des cas le modèle d'amortissement. Souvent, le modèle d'amortissement visqueux est utilisé pour des raisons de simplicité. La méthode consiste à considérer un **taux d'amortissement modal** $\zeta_i < 1$ inclus dans les équations découplées de la base modale

$$\ddot{r}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \, \dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r(t) = 0$$

La solution est (voir système à 1 ddl)

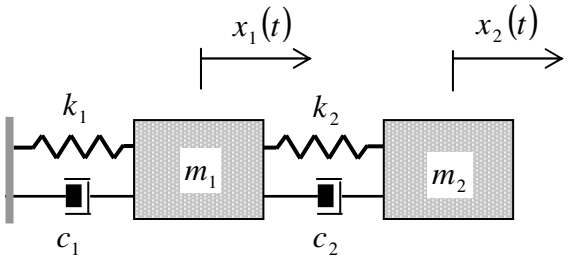
$$r_i(t) = A_i \exp(-\zeta_i \omega_i t)\sin(\omega_{a\,i} t + \phi_i)$$

avec

$$\omega_{a\,i} = \omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2}\ ,\ A_i = \sqrt{\frac{\left(\dot{r}_{i\,0} + \zeta_i\ \omega_i r_{i\,0}\right)^2 + \left(r_{i\,0}\omega_{a\,i}\right)^2}{\omega_{a\,i}^2}} \quad \text{et} \quad \phi_i = \arctan\frac{r_{i\,0}\omega_{a\,i}}{\dot{r}_{i\,0} + \zeta_i \omega_i r_{i0}}$$

Le taux d'amortissement modal ζ_i devra être estimé expérimentalement, soit être identifié à partir de la matrice des coefficients d'amortissement qui entre dans le système d'équations du mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$



Par exemple, pour un système à 2 ddl

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\ddot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Cette équation pose problème car la décomposition modale ne peut pas être réalisée par la procédure décrite précédemment car les coefficients d'amortissement créent un couplage supplémentaire entre les équations du mouvement. Plusieurs méthodes numériques sont utilisables pour résoudre ce problème. Cependant, dans bon nombre de cas, il sera possible d'approcher la matrice $\mathbf{C}$ par une combinaison linéaire de matrices de masse et de raideur

$$\mathbf{C} = \alpha\,\mathbf{M} + \beta\,\mathbf{K}\,, \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ constants.}$$

Cette forme d'amortissement est appelé **amortissement proportionnel**

$$\mathbf{M}\ \ddot{\mathbf{x}}(t) + \left[\alpha\,\mathbf{M} + \beta\,\mathbf{K}\right]\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

En posant $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q}(t)$ et en multipliant à gauche par $\mathbf{M}^{-1/2}$, il vient

$$\mathbf{I}\ \ddot{\mathbf{q}}(t) + \left[\alpha\,\mathbf{I} + \beta\,\tilde{\mathbf{K}}\right]\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}$$

puis en posant $\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}\mathbf{r}(t)$ et en multipliant à gauche par $\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$

$$\mathbf{I}\ \ddot{\mathbf{r}}(t) + \left[\alpha\,\mathbf{I} + \beta\,\mathrm{diag}\left(\omega_{\mathrm{i}}^2\right)\right]\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathrm{diag}\left(\omega_{\mathrm{i}}^2\right)\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$$

Cette dernière équation ne comporte que des matrices diagonales donc correspondant à n équations modales découplées

$$\ddot{r}_i(t)+\left[\alpha+\beta\omega_i^2\right]\dot{r}_i(t)+\omega_i^2 r_i(t)=0$$

En rapprochant cette équation de celle utilisant le taux d'amortissement modal ζ_i, on obtient l'équivalence $2\zeta_i\omega_i=\alpha+\beta\omega_i^2$, d'où

$$\zeta_i=\frac{\alpha}{2\omega_i}+\frac{\beta\omega_i}{2}.$$

2.3 - Réponses forcées

L'équation se met sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$$

$\mathbf{F}(t)$ est le vecteur des forces appliquées à chaque masse

$$\mathbf{F}(t)=\left[F_1(t)\quad F_2(t)\quad\cdots\quad F_n(t)\right]^T$$

En suivant toujours la même démarche : on pose $\mathbf{x}(t)=\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q}(t)$ et on multiplie à gauche par $\mathbf{M}^{-1/2}$

$$\mathbf{I}\,\ddot{\mathbf{q}}(t)+\tilde{\mathbf{C}}\,\dot{\mathbf{q}}(t)+\tilde{\mathbf{K}}\,\mathbf{q}(t)=\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{F}(t)$$

avec $\tilde{\mathbf{C}}=\mathbf{M}^{-1/2}\,\mathbf{C}\,\mathbf{M}^{-1/2}$, puis on pose $\mathbf{q}(t)=\mathbf{P}\mathbf{r}(t)$ et on multiplie à gauche par $\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$

$$\mathbf{I}\,\ddot{\mathbf{r}}(t)+\mathrm{diag}(2\zeta_i\omega_i)\dot{\mathbf{r}}(t)+\mathrm{diag}(\omega_i^2)\mathbf{r}(t)=\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{M}^{-1/2}\,\mathbf{F}(t)$$

où ζ_i est obtenu par exemple par la méthode de l'amortissement proportionnel.

$\mathbf{f}(t)=\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{M}^{-1/2}\,\mathbf{F}(t)$ est le vecteur des **forces modales** (généralisées), dont les éléments $f_i(t)$ sont des combinaisons linéaires des forces $F_i(t)$. Finalement, l'équation modale découplée est de la forme

$$\ddot{r}_i(t)+2\zeta_i\omega_i\,\dot{r}_i(t)+\omega_i^2 r_i(t)=f_i(t)$$

dont la solution complète est celle du système à 1 ddl de déplacement $r_i(t)$

$$\begin{aligned}r_i(t)&=A_i\exp(-\zeta_i\omega_i t)\sin(\omega_{a\,i}t+\phi_i)+f_i(t)*h_i(t)\\&=A_i\exp(-\zeta_i\omega_i t)\sin(\omega_{a\,i}t+\phi_i)+\frac{1}{\omega_{a\,i}}\exp(-\zeta_i\omega_i t)\int_0^t f_i(\tau)e^{\zeta_i\omega_i\tau}\sin\omega_{a\,i}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Les coefficients A_i et ϕ_i de la solution générale sont déterminés en utilisant les conditions initiales.

En **régime stationnaire** (harmonique permanent), la solution particulière pour $F_j(t) = F_{j0}\cos(\omega t + \varphi_j)$ est dans la base modale

$$r_i(t) = \frac{f_{i0}}{\sqrt{\left(\omega_i^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\omega\omega_i\zeta_i\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\frac{2\omega\omega_i\zeta_i}{\omega_i^2 - \omega^2} + \theta_i\right)$$

avec $\underline{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{P^T}\,\mathbf{M}^{-1/2}\,\underline{\mathbf{F}}_0 = \mathbf{S^T}\,\underline{\mathbf{F}}_\mathbf{0}$ où $\mathbf{S^T} = \left(\mathbf{M^{-1/2}}\,\mathbf{P}\right)^T = \mathbf{P^T}\,\mathbf{M^{-1/2}}$.

$\underline{\mathbf{f}}_0$ est le vecteur des forces modales généralisées complexes dont chaque élément est $\underline{f}_{i0} = f_{i0}\,e^{j\theta_i}$. Il est calculé à partir du vecteur $\underline{\mathbf{F}}_0$ des forces complexes appliquées à chaque nœud (masse) du système et dont chaque élément s'écrit $\underline{F}_{j0} = F_{j0}\,e^{j\varphi_j}$. L'utilisation d'un vecteur complexe est nécessaire pour représenter les **déphasages** φ_j différents pour chaque force.

Le vecteur déplacement s'écrit comme précédemment par

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}\,\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\,\mathbf{\Phi}_i$$

NB : En utilisant la fonction de transfert modale complexe $L_i(\omega) = \dfrac{1}{\left(\omega_i^2 - \omega^2\right) + 2\,j\omega\omega_i\,\zeta_i}$,

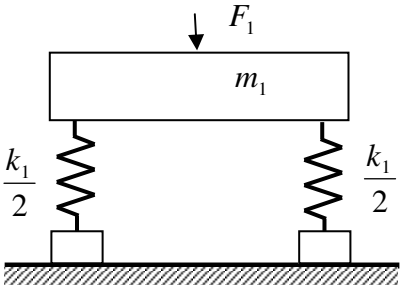
la solution dans la base modale s'exprimer simplement par $r_i(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{f}_{i0}\;L_i(\omega)\,e^{j\omega t}\right\}$.

.

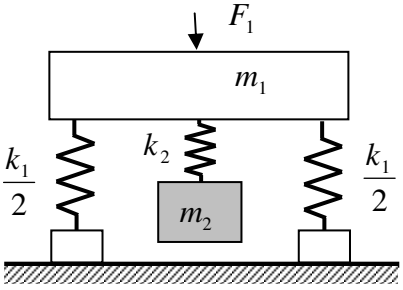
APPLICATION

3 - ABSORBEUR DYNAMIQUE (système à 2 DDL)

C'est un système employé pour réduire les vibrations d'un premier système assimilable en basse fréquence à un système à un ddl (une machine montée sur une suspension élastique, par exemple). Le problème vibratoire se pose en général à la pulsation de résonance du premier système $\Omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$ (au cours d'une montée en vitesse). Pour réduire l'amplitude des vibrations, une masse m_2 est suspendue élastiquement par une raideur k_2 au premier système (la machine) constituant ainsi un système à deux ddl.



Problème quand $\omega = \Omega_1$



Ajout de l'absorbeur dynamique

A partir des relations précédemment établies pour le système à 2 ddl, avec $F_2 = 0$, les amplitudes des deux masses sont

$$x_1 = \frac{\left(-\omega^2 m_2 + k_2\right)F_1}{\left(k_2 - \omega^2 m_2\right)\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right) - k_2^2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{k_2\, F_1}{\left(k_2 - \omega^2 m_2\right)\left(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1\right) - k_2^2}$$

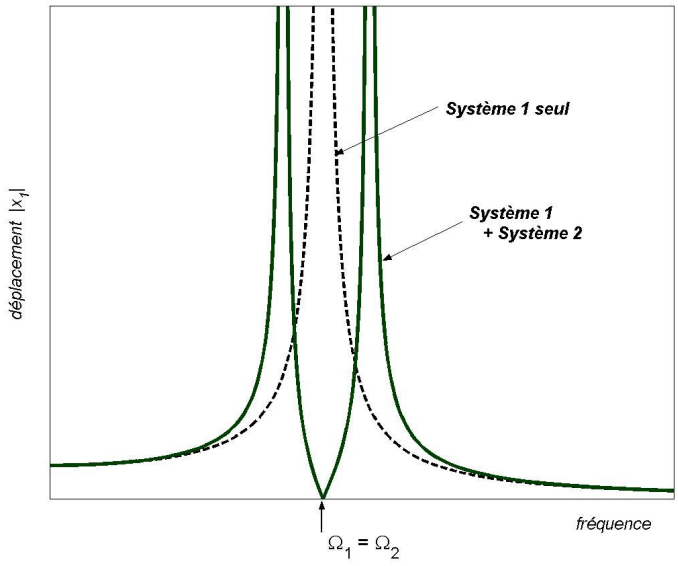
En posant $\Omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$ et $\Omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$ (pulsations naturelles des systèmes 1ddl isolés)

$$x_1 = \frac{\frac{F_1}{k_1}\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_2^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_2^2}\right)\left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\omega^2}{\Omega_1^2}\right) - \frac{k_2}{k_1}}$$

Cette équation montre que quand ω correspond à la fréquence naturelle de l'absorbeur seul $\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$, l'amplitude des vibrations de la masse 1 s'annule : $x_1 = 0$. On accorde donc Ω_2 **sur la fréquence dont on veut réduire l'amplitude**.

Souvent, la pulsation initiale à réduire est $\omega = \Omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, l'absorbeur est **accordé** sur cette valeur

$$\boxed{\Omega_2 = \Omega_1}$$



Utilisation d'un absorbeur dynamique pour réduire l'amplitude des vibrations d'un système à sa pulsation propre

4 - ANALYSE MODALE EXPERIMENTALE

4.1 - Principe de l'analyse modale expérimentale

La représentation modale permet de synthétiser le comportement dynamique des structures comme la somme de plusieurs systèmes à 1 ddl. L'intérêt de cette représentation trouve sa justification dans le fait que les amplitudes de vibration deviennent très importantes autour des fréquences de résonance de ces systèmes.

Ainsi, le test vibratoire d'un système mécanique aura souvent pour objectif

- de connaître ses **fréquences propres**
- de déterminer ses autres paramètres (amortissements, vecteurs propres) pour obtenir un **modèle analytique** théorique complet qui pourra ensuite être employé en simulation pour connaître son comportement dynamique avec des excitations particulières.

C'est l'objet de l'analyse modale expérimentale. Elle est basée sur les approximations suivantes :

- le système est linéaire (dans la gamme des amplitudes étudiées),
- le système continu peut se représenter par un système discret où les paramètres sont exprimés pour chaque nœud du maillage (nombre de ddl = nombre de mailles),
- l'amortissement est supposé proportionnel.

4.2 - Le modèle modal

4.2.1 – Réponse d'un système à N ddl

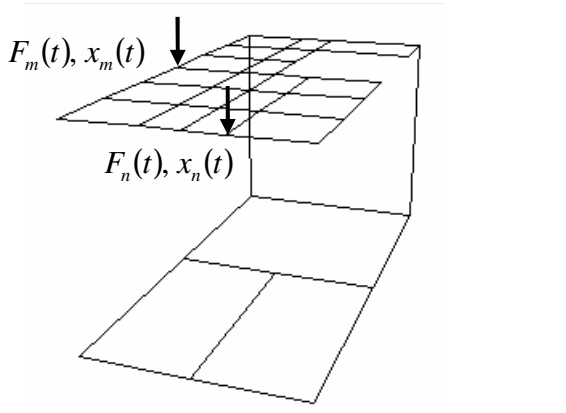
Soit un système à N ddl dont le modèle peut se décrire par la relation matricielle suivante (Rappel):

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\,\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\,\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$$

avec le vecteur des déplacements $\mathbf{x}(t)=[x_1,\cdots,x_N]^T$ aux différents points du maillage et des forces $\mathbf{F}(t)=[F_1,\cdots,F_N]^T$. En notation complexe

$$\left[-\omega^2\mathbf{M}+j\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right]\mathbf{x}=\mathbf{F}$$

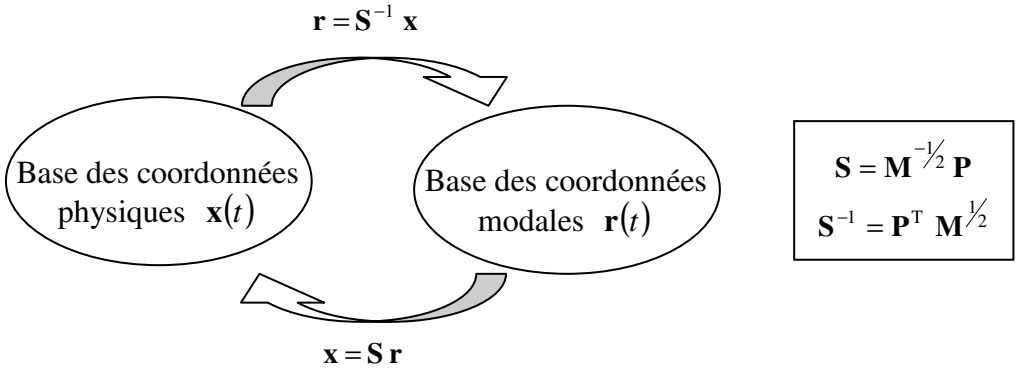
($\mathbf{x}$ et $\mathbf{F}$ sont complexes avec une dépendance temporelle en $e^{j\omega t}$)



La recherche des valeurs propres de la matrice de raideur normalisée par la matrice de masse $\mathbf{M}=\mathrm{diag}(m_j)$ conduit aux fréquences propres et aux vecteurs propres :

$$\tilde{\mathbf{K}}=\mathbf{M}^{-1/2}\,\mathbf{K}\,\mathbf{M}^{-1/2} \qquad \begin{cases} \text{valeurs propres} \\ \{\omega_1^2,\cdots,\omega_i^2,\cdots,\omega_N^2\} \\ \text{vecteurs propres normés} \\ \{\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_i,\cdots,\mathbf{u}_N\} \end{cases}$$

Les vecteurs propres normés constituent une matrice orthogonale $\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_i \cdots \mathbf{u}_N]$ qui permet de construire la matrice de passage entre la base physique et la base modale :



Le système d'équations découplées dans la base modale

$$\mathbf{I}\,\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathrm{diag}(2\zeta_i\omega_i)\,\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathrm{diag}(\omega_i^2)\,\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(t)$$

qui peut aussi s'écrire en notation complexe

$$\left[-\omega^2\mathbf{I} + \mathrm{diag}(j2\zeta_i\omega_i\omega) + \mathrm{diag}(\omega_i^2)\right]\mathbf{r} = \mathbf{f}$$

avec le vecteur des forces modales généralisées

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{F} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F}$$

Les solutions de ces *N* équations sont

$$r_i(\omega) = f_i(\omega)\,L_i(\omega)$$

avec

$r_i(\omega)$ déplacement modal complexe pour le mode *i*,
$f_i(\omega)$ force modale généralisée complexe appliquée au mode *i*,
$L_i(\omega)$ fonction de transfert complexe pour le mode *i*

$$L_i(\omega) = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + j2\zeta_i\omega_i\omega}$$

Les déplacements aux points du maillage s'obtiennent par

$$\mathbf{x}(\omega) = \mathbf{S}\,\mathbf{r}(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad x_j(\omega) = \sum_{i=1}^{N} r_i(\omega)\,\boldsymbol{\Phi}_i = \sum_{i=1}^{N} f_i(\omega) L_i(\omega)\,\boldsymbol{\Phi}_i$$

$\boldsymbol{\Phi}_i$ est le vecteur qui correspond à la *déformée modale* de chaque point du maillage pour le mode *i* . Chacun des *N* vecteurs sont les colonnes de la matrice $\mathbf{S} = [\boldsymbol{\Phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\Phi}_i, \cdots, \boldsymbol{\Phi}_n]$.

4.2.2 – Expression des fonctions de transfert

En remplaçant le vecteur des forces modales généralisées par son expression $\mathbf{f} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\ \mathrm{diag}(L_i)\ \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\Phi}_i\,\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}}}{\omega_i^2 - \omega^2 + j2\zeta_i\omega_i\omega}\mathbf{F}$$

Si on veut exprimer la réponse $x_m(\omega)$ à une excitation $F_n(\omega)$ en un seul point n du maillage, le vecteur force $\mathbf{F} = [0,\cdots,0,F_n(\omega),0,\cdots,0]$ est utilisé dans l'expression précédente

$$x_m(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\Phi}_i)_m\,(\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}})_n}{\omega_i^2 - \omega^2 + j2\zeta_i\omega_i\omega} F_n(\omega)$$

En définissant l'admittance $Y_{mn}(\omega)$ comme la fonction de transfert $x_m(\omega)/F_n(\omega)$, on constate que la matrice des admittances est

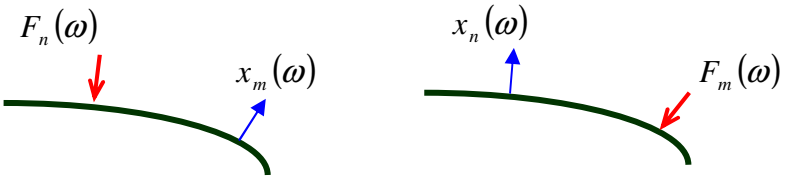
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ Y_{N1} & & & Y_{NN} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\Phi}_i\,\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}}}{\omega_i^2 - \omega^2 + j2\zeta_i\omega_i\omega}$$

dont les éléments sont des fonctions de transfert entre deux points

$$Y_{mn}(\omega) = \frac{x_m(\omega)}{F_n(\omega)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{\Phi}_i)_m\,(\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}})_n}{\omega_i^2 - \omega^2 + j2\zeta_i\omega_i\omega}$$

La symétrie de la matrice $\mathbf{Y}$ est une propriété connue comme le **principe de réciprocité**

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad Y_{mn}(\omega) = Y_{nm}(\omega) \quad \Rightarrow \quad \frac{x_m(\omega)}{F_n(\omega)} = \frac{x_n(\omega)}{F_m(\omega)}$$



4.3 - Acquisition des données expérimentales

L'analyse modale expérimentale est une *méthode inverse* : à partir des réponses en chaque point du maillage à des excitations (forces) connues, nous cherchons à déterminer les caractéristiques du modèle à *N* ddl.

2.3.1 – Conditions d'essai

Le mode de fixation de la structure est très important. Le plus souvent la structure est :

- suspendue (libre),
- encastrée,
- en condition de fonctionnement.

Selon la configuration choisie, les modes risquent d'être différents (en particulier les premiers). Les fixations libres ou encastrées permettront des comparaisons avec des calculs par éléments finis.

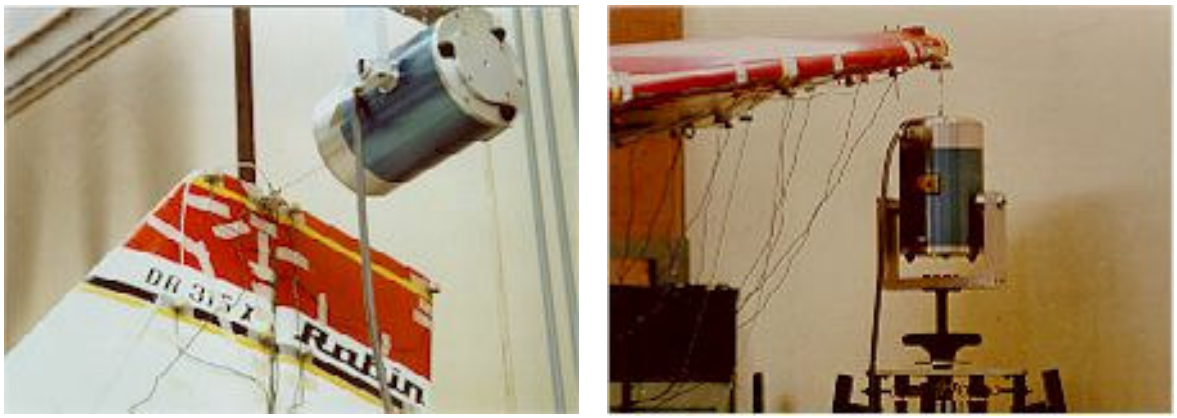


Figure 3.1 – Excitation d'une structure d'avion par des pots vibrants pour déterminer des fonctions de transfert expérimentales (Doc. ONERA)

4.3.2 – Mesure des fonctions de transfert entre les points du maillage

On trouvera différentes formes en fonction de la réponse (déplacement, vitesse ou accélération)

Accélérance $$A_{mn}(\omega)=\frac{a_m(\omega)}{F_n(\omega)}$$

Mobilité $$M_{mn}(\omega)=\frac{v_m(\omega)}{F_n(\omega)}=-j\frac{A_{mn}(\omega)}{\omega}$$

Admittance $$Y_{mn}(\omega)=\frac{x_m(\omega)}{F_n(\omega)}=-j\frac{M_{mn}(\omega)}{\omega}=-\frac{A_{mn}(\omega)}{\omega^2}$$

avec l'accélération $a_m(\omega)$ et la vitesse vibratoire $v_m(\omega)=a_m(\omega)/j\omega$.

La fonction de transfert mesurée (FRF : Fonction de Réponse en Fréquence) dépend du type de capteur utilisé pour mesurer la réponse de la structure (accéléromètre $\rightarrow a_m(\omega)$, vibromètre laser $\rightarrow v_m(\omega)$). Pour généraliser, nous désignons par $H_{mn}(\omega)$ la fonction de transfert mesurée entre un capteur placé au point *m* et une force excitant le point *n* : $H_{mn}(\omega)\in\{A_{mn}(\omega),M_{mn}(\omega),Y_{mn}(\omega)\}$.Très souvent les logiciels d'analyse modale travaillent sur des admittances $Y_{mn}(\omega)$. En fonction du capteur employé pour mesurer la fonction de transfert, elle devra être divisée par $j\omega$ (vibromètre laser) ou par $-\omega^2$ (accéléromètre).

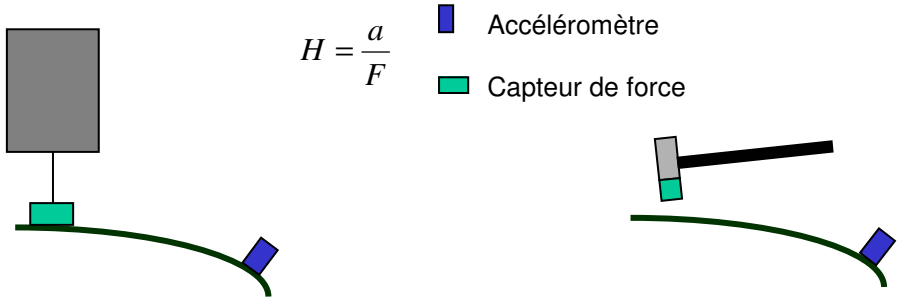


Figure 3.2 – Les deux modes d'excitation couramment utilisés pour obtenir les FRF entre les points du maillage d'une structure : le pot vibrant (gauche), le marteau d'impact (droite).

Principalement, deux types d'excitations sont employées (voir Chapitre II) :

a) le **pot vibrant**
Il permet d'exciter d'injecter d'avantage d'énergie, donc d'exciter des structures plus lourdes. En contre partie, son installation est délicate et il ajoute localement de la masse à la structure. Le signal d'excitation peut être un bruit blanc, un bruit pseudo-aléatoire synchronisé sur la fenêtre d'acquisition, un balayage de signal harmonique, un chirp, etc.

b) le **marteau d'impact**
Il est facile à mettre en œuvre mais réclame une certaine expérience. Bien adapté aux structures légères, il ne les charge pas et le spectre d'excitation peut être ajusté par le choix d'un embout. Pour les structures très résonantes, il faut s'assurer que le signal de réponse présente une 'extinction' suffisante pour ne pas être tronqué à l'extrémité de la fenêtre d'acquisition, en lui donnant une dimension adéquate ou/et en appliquant une fonction exponentielle. Cette dernière procédure étant équivalente à l'ajout d'un amortissement supplémentaire, une correction devra être apportée par le logiciel, après détermination des paramètres modaux.

4.4 - Extraction des paramètres modaux

Il existe plusieurs méthodes pour l'extractions des paramètres modaux à partir des mesures sur la structure dont les deux grandes catégories sont [1] [2] :

- les ***méthodes fréquentielles***
  Des fonctions de transfert idéales de systèmes à un ou plusieurs ddl sont ajustées sur les courbes expérimentales par des méthodes de moindres carrés (*méthode de lissage des fonctions de transfert*)

- les ***méthodes temporelles***
  Ces méthodes sont basées sur la représentation du comportement à partir des réponses impulsionnelles modales. Les réponses sont obtenues en multi-excitation et les réponses impulsionnelles souvent calculées par transformée de Fourier inverse des fonctions de transfert (*méthodes d'Ibrahim et des exponentielles complexes*).

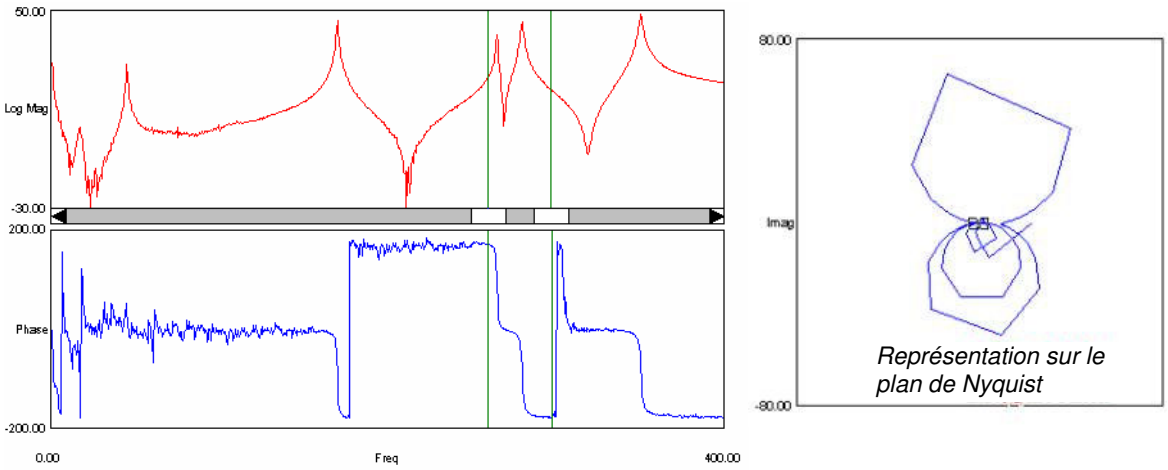


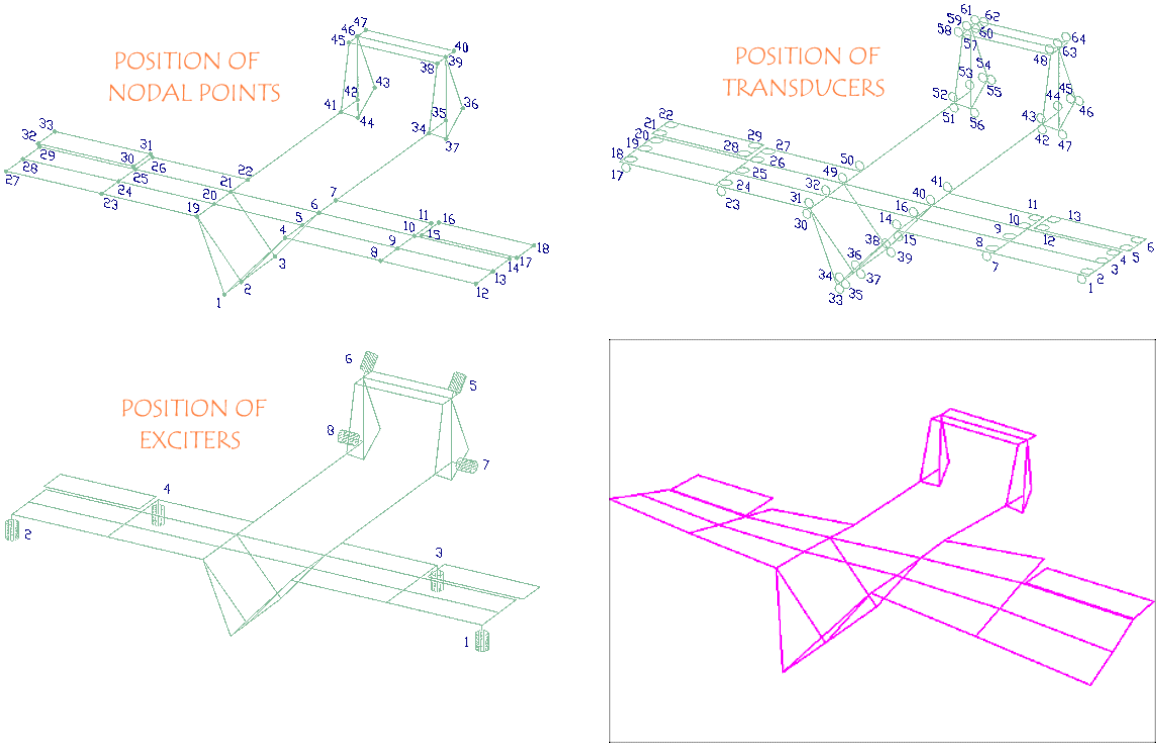
Figure 3.3 - Fonctions de transfert obtenues expérimentalement entre les différents points du maillage

[1] D.J. Ewins, *Modal Testing : Theory, Practice, and Application* (2nd edition), Research Studies Press, 2000.

[2] J. Piranda, Analyse modale expérimentale, volume « Mesures et contrôle », *Techniques de l'Ingénieur,* 2001.

Il faut citer également la *méthode d'appropriation* [3] qui ne procède pas à l'extraction des paramètres modaux à partir des fonctions de transfert mais soumet la structure à des configurations de forces permettant d'exciter séparément chaque mode de la structure. Elle est employée dans les cas de linéarités importantes, surtout dans le domaine de l'aéronautique.

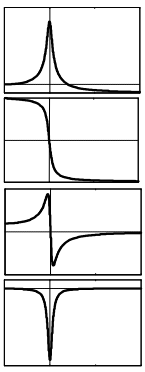
La méthode d'extraction de paramètres modaux la plus couramment utilisée est sans doute la méthode de ***lissage des fonctions de transfert*** : c'est cette méthode qui est étudiée par la suite. La **démarche** consiste à identifier les fréquences propres ω_n, puis à estimer les amortissements modaux ζ_n. Les fonctions de transfert modélisées remplacent alors les fonctions de transfert mesurées pour déterminer les déformées modales[4].



2.4.1 – Identification des fréquences propres et des amortissements

a) identification des **fréquences propres**

- maximum d'amplitude
- rotation de phase de 90°
- passage à zéro de partie réelle
- maximum de la partie imaginaire

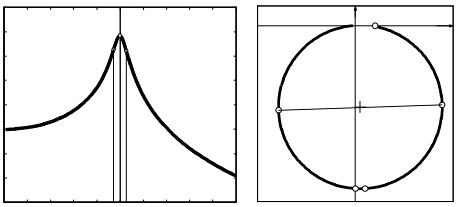


[3] J. Piranda

[4] P. Avitabile, Experimental Modal Analysis : A simple non-mathematical presentation, Sound and Vibration, January 2001. (fichier pdf dans \Distrib Doc aux Etus\Vibration 1\Cours\ExpModAna.pdf)

b) détermination de l'**amortissement**

- bande passante à –3 dB
- identification des cercles dans le plan de Nyquist



- **Méthode à simple ddl** (***SDOF***) : des fonctions de transfert idéales de systèmes à un ddl sont ajustées sur les courbes expérimentales par des méthodes de moindres carrés. Pour cela une bande de fréquence est sélectionnée par l'opérateur. Si la structure est peu amortie et les modes suffisamment espacés, la FRF présente dans cette zone des caractéristiques semblables à celles d'un système à 1 ddl. La fréquence propre et le taux d'amortissement peuvent être aisément déterminés.

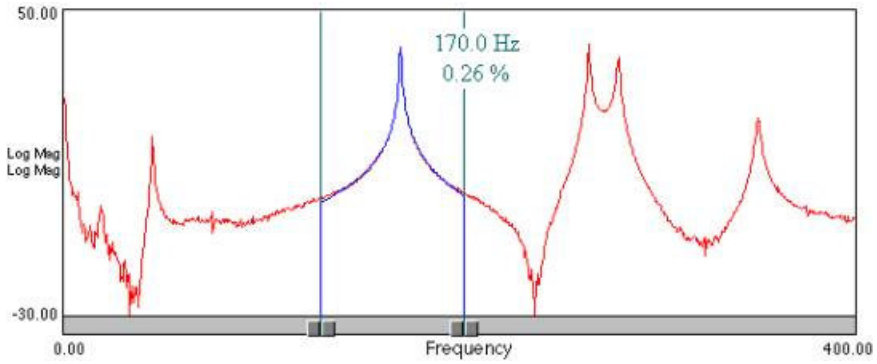


Figure 3.4 – Méthode SDOF : une bande de fréquence de la FRF présentant une seule résonance est sélectionnée et identifiée a un modèle de système 1 ddl.

- **Méthode à multiple ddl** (***MDOF***) : quand les modes ont des fréquences propres très proches il est préférable d'utiliser des fonctions de transfert idéales de systèmes à plusieurs ddl. Plusieurs modes sont sélectionnés dans une bande de fréquence. Une méthode inverse est alors employée pour identifier les paramètres (fréquences propres, amortissements, coefficients de participation) d'un système possédant plusieurs ddl.

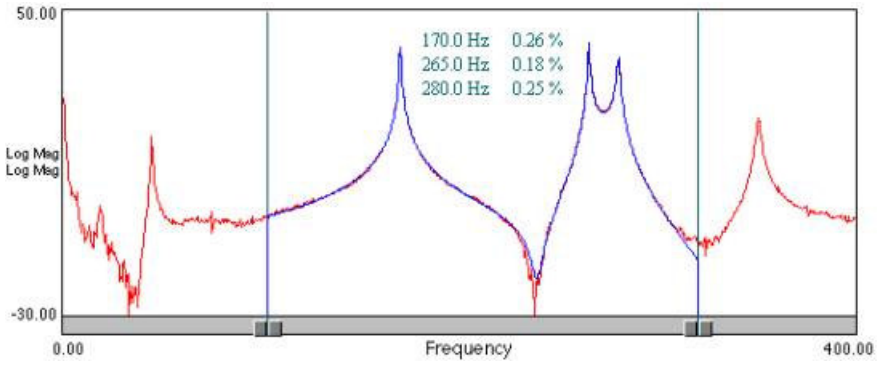


Figure 3.5 – Méthode MDOF : un groupe de modes est sélectionné sur la FRF puis identifié à un modèle de système à plusieurs ddl.

Quand les différents modes observés ont été identifiés au mieux, un modèle synthétique de la structure est calculé en utilisant les paramètres modaux estimés à partir des FRF mesurées.

La différence entre les fonctions de transfert **expérimentales** et les fonctions de transfert **synthétisées** permet d'apprécier la qualité de l'identification. C'est sur la base de ce modèle obtenu par la synthèse des différents modes que ce fait la détermination des déformées modales.

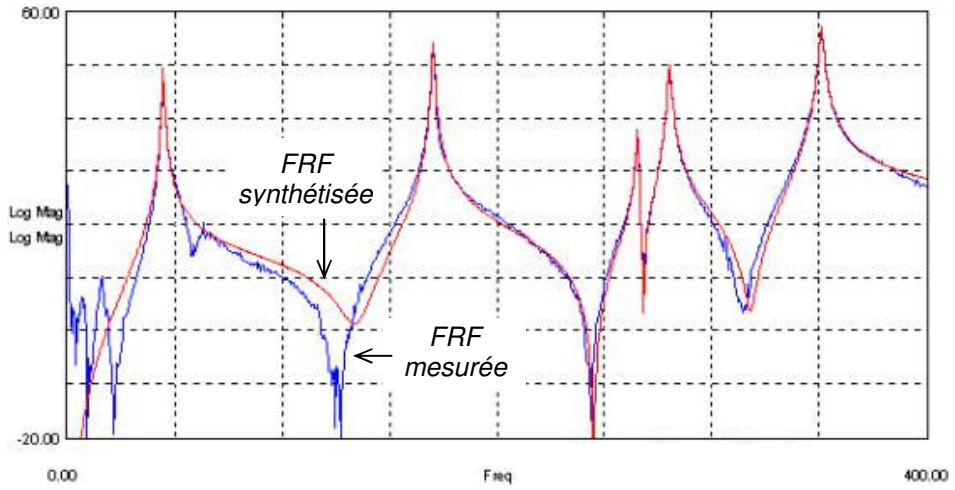


Figure 3.6 – Comparaison de FRF mesurée et de son modèle obtenu par synthèse des modes identifiés.

2.4.2 – Détermination des déformées modale

Les FRF peuvent donc être représentées par le modèle modal à N ddl sous la forme

$$Y_{mn}(\omega) = \frac{x_m(\omega)}{F_n(\omega)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\Phi_i)_m \left(\Phi_i^{\mathrm{T}}\right)_n}{\omega_i^2 - \omega^2 + j2\zeta_i\omega_i\omega}$$

La **méthode simple** qui sert à illustrer la démarche suppose que le système est *peu amorti* et que les *fréquences propres* sont bien *séparées*. Des algorithmes plus complexes ne faisant pas ces hypothèses simplificatrices sont mis en œuvre dans les logiciels utilisés pour l'analyse modale. Ainsi, avec les hypothèses simplistes que nous avons adoptées, la valeur de la FRF à la fréquence de résonance ω_i du mode *i* vaut :

$$Y_{mn}(\omega_i) \approx \frac{(\Phi_i)_m \left(\Phi_i^{\mathrm{T}}\right)_n}{j2\zeta_i\omega_i^2} \quad + \quad \varepsilon$$

où les $(\Phi_i)_m \left(\Phi_i^{\mathrm{T}}\right)_n = \left(\Phi_i \, \Phi_i^{\mathrm{T}}\right)_{mn} = \phi_m\phi_n$ sont les éléments de la matrice créée à partir des déformées modales :

$$\boldsymbol{\Phi}_i \, \boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^2 & \phi_1\phi_2 & \cdots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \phi_N\phi_1 & & \cdots & \phi_N^2 \end{bmatrix}$$

La configuration de cette matrice traduit le **principe de réciprocité**. Chaque **colonne** est associée à un ensemble de FRF correspondant à la réponse de tous les points de la structure quand elle est *excitée en un seul point* (cas d'une excitation par pot vibrant). Inversement, une **ligne** est associée à un autre ensemble de FRF correspondant à la réponse en un point pour des *excitations successives en tous les points du maillage* (cas de l'excitation par marteau d'impact).

Ainsi la connaissance d'une **ligne ou** d'une **colonne** de $\boldsymbol{\Phi}_i \, \boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}}$ est **en principe suffisante** pour déterminer toutes les déformées modales :

- A partir de la mesure d'une admittance d'entrée à ω_i (réponse et excitation au même point)

$$j2\zeta_i\omega_i^2 \, Y_{nn}(\omega_i) = \phi_n^2 \quad \rightarrow \quad \phi_n$$

- A partir des mesures des admittances croisées à ω_i

$$j2\zeta_i\omega_i^2 \, Y_{mn}(\omega_i) = \phi_m\phi_n \quad \rightarrow \quad \phi_m = \frac{\phi_m\phi_n}{\sqrt{\phi_n^2}} \qquad \textit{(cas d'une ligne)}$$

Les *N* déformées modales du système sont ainsi calculées. Les logiciels d'analyse modale les représentent comme des déformations (fortement amplifiées) par rapport à la position moyenne, généralement animées d'un mouvement périodique. Pour les structures de géométrie compliquée les mouvements en chaque points sont considérés dans les 3 directions : chaque point compte alors pour 3 ddl.

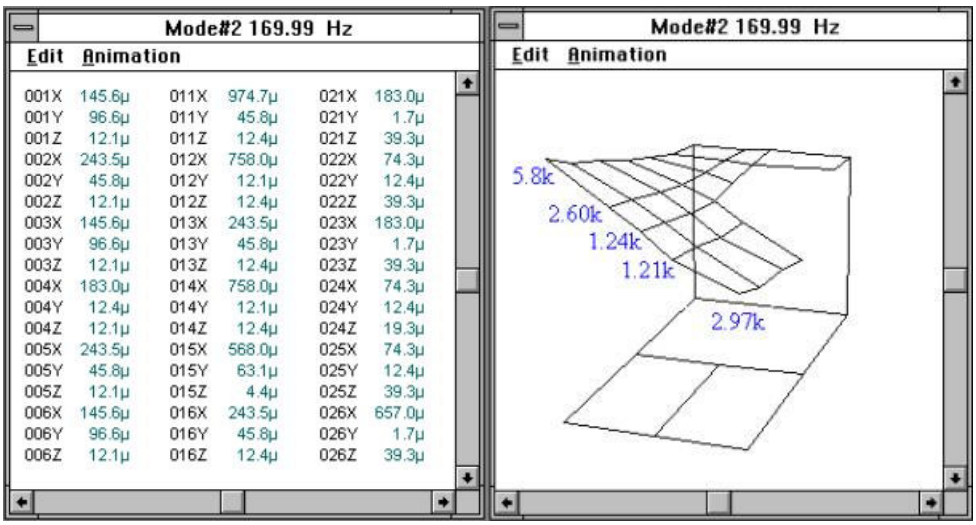


Figure 3.7 – Résultats du calcul de la déformée modale d'un mode. Elle est souvent visualisée par une animation dans les logiciels d'analyse modale.

Remarques :

1) Bien qu'une colonne (*ou une ligne*) soit en principe suffisante pour estimer l'ensemble des déformées modales d'une structure, quelques précautions doivent être prises : si l'excitation unique (*ou le capteur unique*) se trouve ***sur la ligne nodale*** d'un mode, ce mode ne serra pas visible sur les FRF mesurées. Des essais préalables peuvent permettre de choisir le point d'excitation (*ou de réponse*) mais la solution souvent retenue consiste à mesurer plusieurs ensemble de FRF correspondant à plusieurs points d'excitation (*ou de réponse*).

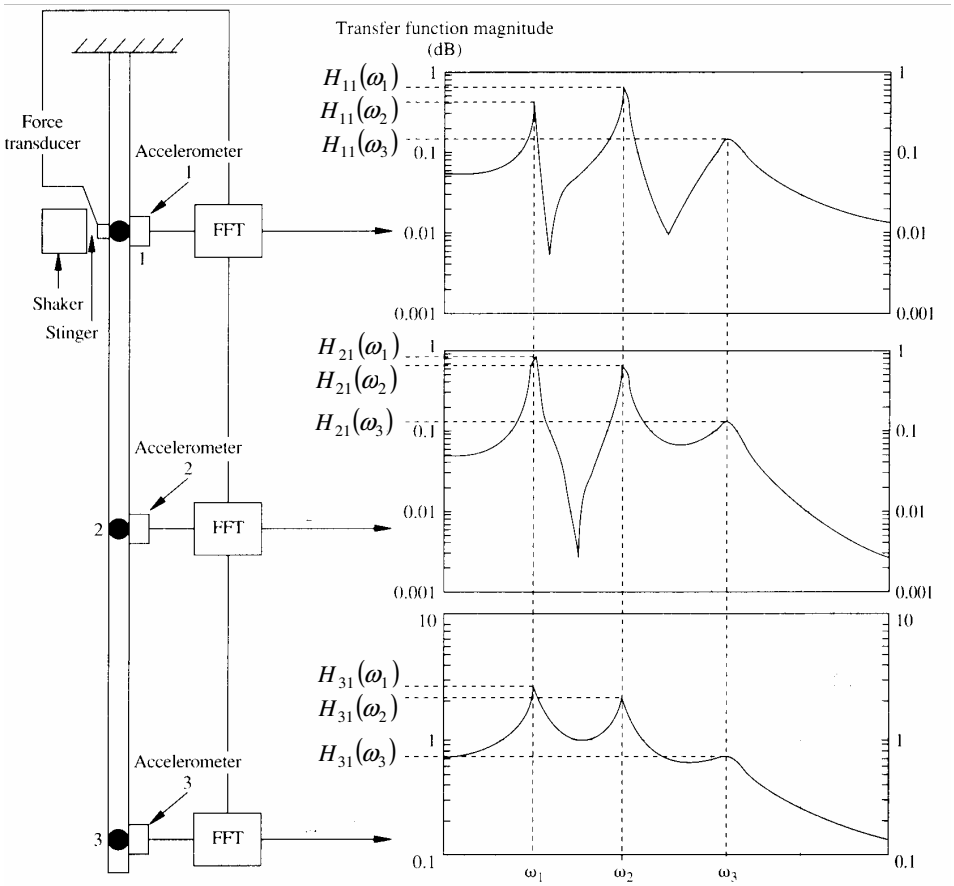
2) L'hypothèse de faible amortissement et de fréquences propres bien séparées nous à permis de négliger à la fréquence propre du mode *i* que l'on veut déterminer, la contribution des autres modes telle qu'elle apparaît derrière le signe somme de la relation suivante :

$$Y_{mn}(\omega_i) = \frac{(\Phi_i)_m \left(\Phi_i^{\mathrm{T}}\right)_n}{j2\zeta_i\omega_i^2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{(\Phi_j)_m \left(\Phi_j^{\mathrm{T}}\right)_n}{\omega_j^2 - \omega_i^2 + j2\zeta_j\omega_j\omega_i}$$

Les algorithmes utilisent des méthodes itératives pour résoudre ce problème.

2.4.2 – Exemple : Détermination des déformées modale d'une poutre

Pour prendre un exemple simple, l'analyse modale une poutre encastrée est réalisée sur un maillage de 3 points : nous cherchons donc à identifier un système à 3 ddl. Une excitation unique au point 1 et 3 accéléromètres sont employés pour l'acquisition des FRF.



Etape 1 : <u>détermination des FRF expérimentales</u>

Les FRF dont mesurées à l'aide d'un analyseur FFT en utilisant des interspectres entre signaux provenant des accéléromètres et du capteur de force :

$$H_{m1}(\omega)=\frac{G_{mF}(\omega)}{G_{FF}(\omega)}$$

Etape 2 : <u>estimation des fréquences propres et des amortissements</u>

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 10 \text{ rad/s} & \zeta_1 &= 0.01\\ \omega_2 &= 20 \text{ rad/s} & \zeta_2 &= 0.01\\ \omega_3 &= 32 \text{ rad/s} & \zeta_3 &= 0.05\end{aligned}$$

Les admittances sont obtenues par régression sur les courbes expérimentales (curve fitting)

$$Y_{m1}(\omega)=-H_{m1}(\omega)/\omega^2 .$$

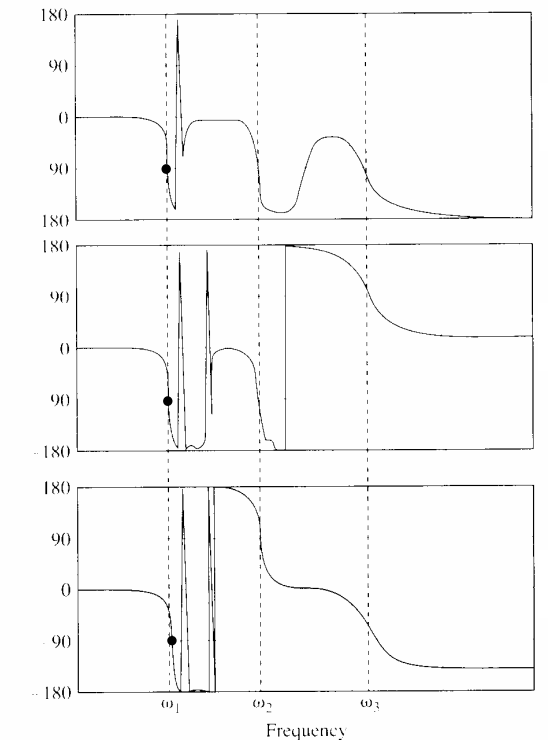
Etape 3 : <u>détermination des déformées modales</u>

L'objectif est d'obtenir la déformée $\mathbf{\Phi}_1=[\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3]^{\mathrm{T}}$ pour le mode 1. La première colonne de la matrice

$$\mathbf{\Phi}_1\,\mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\phi_1^2 & \phi_1\phi_2 & \phi_1\phi_3\\ \phi_2\phi_1 & \phi_2^2 & \phi_2\phi_3\\ \phi_3\phi_1 & \phi_3\phi_2 & \phi_3^2\end{bmatrix}$$

↑ colonne correspondant aux FRF mesurées

est obtenue à partir des admittances : $|\phi_m\phi_1|=2\zeta_1\omega_1^2\,|Y_{m1}(\omega_1)|, \quad m\in\{1,2,3\}$. Ainsi $|\phi_1^2|=0.85$, $|\phi_2\phi_1|=1.83$ et $|\phi_3\phi_1|=4.63$ conduisent à $|\phi_1|=0.92$, $|\phi_2|=1.99$ et $|\phi_3|=5.04$. Les signes sont obtenus à partir des phases des $Y_{m1}(\omega_1)$.



$\text{Phase}\{Y_{11}\} = -90^\circ$

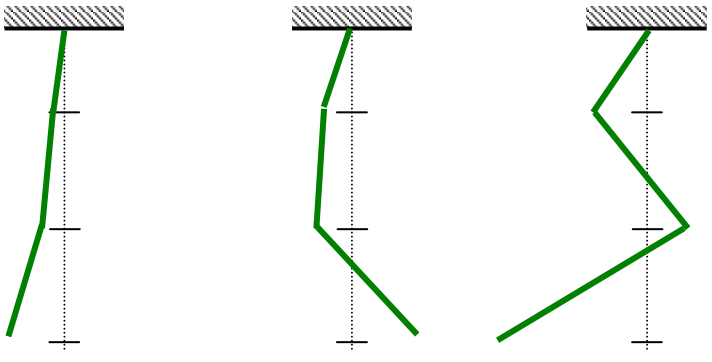
$\text{Phase}\{Y_{21}\} = -90^\circ$

$\text{Phase}\{Y_{31}\} = -90^\circ$

On procède de la même façon pour les 2 autres modes

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} -0.92 \\ -1.99 \\ -5.04 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} -2.67 \\ -2.89 \\ 5.87 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} -4.22 \\ 2.99 \\ -15.3 \end{bmatrix}$$

Ces informations permettent de construire les déformées modales des trois premiers modes



Annexes

1 - Rappel sur les matrices

Transposées de matrices **Inverses de matrices**

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} \qquad \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \qquad (\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathrm{diag}[\alpha])^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}[\alpha] \qquad (\mathrm{diag}[\alpha])^{-1} = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{\alpha}\right]$$

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

Matrices orthogonales

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

2 - Equations de Lagrange

Nous avons utilisé des équations d'équilibre dynamique pour construire les systèmes à un et plusieurs degrés de liberté, ce qui peut présenter de grosses difficultés pour les systèmes complexes. Une approche systématique pour modéliser un système est l'utilisation des équations de Lagrange. Elles permettrent d'obtenir les équations du mouvement à partir de relations énergétiques :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i$$

$L = T - V$ est la différence entre l'énergie cinétique totale du système à N degrés de liberté et V est l'énergie potentielle totale de déformation. $\mathbf{q}$ est le vecteur des N déplacements généralisés (ou coordonnées généralisées) et $\mathbf{F}$ le vecteur des forces généralisées correspondant :

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad \cdots \quad q_N]^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{F} = [F_1 \quad \cdots \quad F_N]^{\mathrm{T}}$$

Puisque l'énergie cinétique est seulement fonction des vitesses $\dot{q}_i$ et l'énergie potentielle des déplacements q_i, l'équation devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i$$

et finalement en ajoutant l'énergie dissipée

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=F_i}$$

Par exemple, pour un système à un **degré de liberté**, l'équation de Lagrange est

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right)+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}+\frac{\partial V}{\partial x_i}=F$$

avec l'énergie cinétique $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

l'énergie de déformation élastique $V=\frac{1}{2}kx^2$

l'énergie dissipée $D=\frac{1}{2}c\dot{x}^2$

En effectuant les calculs

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}\,,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}\,,\qquad \frac{\partial D}{\partial x}=c\dot{x}\,,\qquad \frac{\partial V}{\partial x}=kx\,,$$

on obtient l'équation différentielle du mouvement pour un système à un degré de liberté :

$$m\ddot{x}+c\ddot{x}+kx=F$$

Pour un système **plusieurs degrés de liberté**, les relations énergétiques peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$T=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{q}}\,,\qquad D=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}}\,,\qquad V=\frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{K}\,\mathbf{q}\,,$$

et les termes de l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)=\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}}\,,\quad \frac{\partial D}{d\dot{\mathbf{q}}}=\mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}}\,,\quad \frac{\partial V}{d\mathbf{q}}=\mathbf{K}\,\mathbf{q}$$

conduisent à

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\,\mathbf{q}=\mathbf{F}$$

Exemple d'un système à **deux degrés de libertés** : $\mathbf{q}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ et $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}F_1 & F_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

Les énergies totales s'écrivent

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$D=\frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}c_2\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

C'est dans l'expression des énergies de déformation et de dissipation que la procédure présente tout son intérêt : il n'est pas nécessaire de préciser le signe du mouvement relatif $(x_2 - x_1)$ qui peut être une cause d'erreur dans l'écriture des relations d'équilibre de systèmes plus complexes.

Les calculs relatifs à la coordonnée x_1

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \,,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \ddot{x}_1 \,,\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 \,,\ \frac{\partial V}{\partial x_1} = (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2$$

et à la coordonnée x_2

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \,,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \ddot{x}_2 \,,\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = -c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 \,,\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = -k_2 x_1 + k_2 x_2$$

conduisent au système d'équations du mouvement

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = F_2 \end{cases}$$

3 - Quotient de Rayleigh

La méthode de Rayleigh pour obtenir la fréquence propre des systèmes conservatifs sur la base de l'égalité des énergies potentielle et cinétique maximales (voir chapitre 1)

$$U_{\max} = T_{\max}$$

peut aussi être appliquée aux systèmes à plusieurs degrés de liberté. Dans ce cas l'énergie potentielle peut s'exprimer à partir de la matrice de raideur $\mathbf{K}$ et du vecteur déplacement $\mathbf{x}$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{x}^{\mathbf{T}} \mathbf{K}\, \mathbf{x}$$

et l'énergie cinétique à partir de la matrice de masse $\mathbf{M}$ et du vecteur vitesse $\dot{\mathbf{x}}$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M}\, \dot{\mathbf{x}}$$

Comme $\dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} = \omega^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x}$, l'énergie cinétique peut s'écrire finalement

$$T = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{M}\, \mathbf{x}$$

et le rapport obtenu en appliquant l'égalité des énergies potentielle et cinétique

$$\omega_1^2 = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K}\, \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M}\, \mathbf{x}}$$

est connu comme le **quotient de Rayleigh** et fourni la **première fréquence propre** du système à multiples ddl.

IV - EQUATION D'ONDE ACOUSTIQUE ET SES SOLUTIONS

1. ONDE A UNE DIMENSION

1.1 - Equation d'onde unidimensionnelle
1.2 - Solution générale pour une onde plane
1.3 - Solution harmonique : l'équation de Helmholtz
1.4 - Onde progressive et onde stationnaire

2. ONDES DANS L'ESPACE TRIDIMENSIONNEL

2.1 - Equation d'onde en 3D
2.2 - Solutions en coordonnées sphériques
2.3 - Source au-dessus d'une paroi réfléchissante
2.4 - Représentation dans un repère cartésien : réflexion et transmission
2.4 - Equation inhomogène : l'expression des sources

3. INTENSITE ET PUISSANCE ACOUSTIQUE

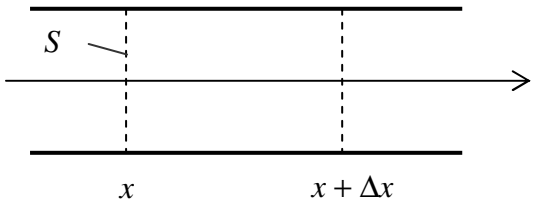
3.1 - Intensité acoustique
3.2 - Exemples
3.3 - Puissance acoustique

ANNEXE : Représentation de l'intensité et des valeurs quadratiques moyennes

1 – ONDE A UNE DIMENSION

1.1 – Equation d'onde en une dimension

On considère un gaz dans un tube de section S



ρ_T masse volumique
P_T pression
u_T vitesse

L'indice T signifie que la quantité totale est prise en considération.

1.1.1 – Equations de la mécanique des fluides

Conservation de la masse
Le principe de conservation de la masse se traduit par l'égalité suivante si on considère les fluctuations de masse volumique du volume élémentaire $S\,\Delta x$ pendant le temps Δt

$$\frac{\partial \rho_T}{\partial t} S\,\Delta x\,\Delta t = \left[(S\rho_T u_T)_x - (S\rho_T u_T)_{x+\Delta x} \right] \Delta t$$
$$= -S \frac{\partial (\rho_T u_T)}{\partial x} \Delta x\,\Delta t$$

soit

$$\frac{\partial \rho_T}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_T u_T)}{\partial x} = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement
Elle s'établie à partir de l'expression en mécanique des fluides de la loi fondamentale de la dynamique $m\gamma = F$. Pour le volume élémentaire $S\,\Delta x$,

$$\rho_T\, S\,\Delta x \frac{\partial u_T}{\partial t} = S\left[(P_T)_x - (P_T)_{x+\Delta x} \right]$$
$$= -S \frac{\partial P_T}{\partial x} \Delta x$$

soit

$$\rho_T \frac{\partial u_T}{\partial t} + \frac{\partial P_T}{\partial x} = 0$$

1.1.1 – Equations de l'acoustique linéaire

On considère que les grandeurs totales de la masse volumique et de la pression peuvent s'exprimer comme la somme d'un premier terme constant (indice 0) et d'un second terme fluctuant (indice 1)

$$\rho_T = \rho_0 + \varepsilon\rho_1 \quad \text{et} \quad P_T = P_0 + \varepsilon P_1$$

Le symbole ε est utilisé pour montrer explicitement que l'on s'intéresse aux petits mouvements et que le second terme est beaucoup plus faible que le premier ($\varepsilon << 1$). Pour un fluide au repos (vitesse d'entraînement $u_0 = 0$), on écrira

$$u_T = \varepsilon u_1$$

Note : Pour un niveau sonore très important de 134 dB, à la limite de l'acoustique linéaire, la pression fluctuante εP_1 correspond à 100 Pa soit environ 1/1000 de la pression atmosphérique P_0.

Linéarisation des équations de conservation

On obtient maintenant l'expression suivante pour la conservation de la masse

$$\underbrace{\frac{\partial \rho_0}{\partial t}}_{0} + \varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \underbrace{\varepsilon u_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x}}_{0} + \underbrace{\varepsilon^2 u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x}}_{\text{Second ordre} \approx 0} + \rho_0 \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \underbrace{\varepsilon^2 \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}} = 0$$

La linéarisation consiste à négliger les termes de second ordre en ε^2. En introduisant la notation $\rho = \varepsilon \rho_1$ et $u = \varepsilon u_1$ pour la perturbation par l'onde acoustique de la masse volumique et de la vitesse, l'équation de ***conservation de la masse*** de l'acoustique linéaire s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$

Un traitement similaire appliqué à l'équation de conservation de la quantité de mouvement de la mécanique des fluides

$$\rho_0 \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \underbrace{\varepsilon^2 \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t}}_{\text{Second ordre} \approx 0} + \underbrace{\frac{\partial P_0}{\partial x}}_{0} + \varepsilon \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0$$

conduit à l'équation de ***conservation de la quantité de mouvement*** de l'acoustique linéaire ou ***équation d'Euler***

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0}$$

où $p = \varepsilon P_1$ représente la pression acoustique (valeur fluctuante autour de la pression atmosphèrique P_0).

Ces deux équations comportent 3 inconnus. Une équation supplémentaire est donc nécessaire. Elle est fournie par l'équation d'état du gaz.

Equation d'état du gaz

La pression totale d'un fluide compressible peut être représentée par une fonction de la forme $P_T = f(\rho_T, s)$, s étant l'entropie. Dans le cas d'un gaz parfait (le frottement

visqueux est négligé), la différentielle de l'entropie est $\mathrm{d}s = C_V\left(\mathrm{d}P_T/P_T - \gamma\,\mathrm{d}\rho_T/\rho_T\right)$, avec γ le rapport des chaleurs spécifiques. Les échanges de chaleur dans le gaz conduisent à des phénomènes de dissipation du même ordre de grandeur que la dissipation due à la viscosité et sont aussi négligés (transformation adiabatique : $\mathrm{d}s = 0$). Donc

$$\frac{\mathrm{d}P_T}{P_T} = \gamma\frac{\mathrm{d}\rho_T}{\rho_T}$$

Pour un fluide homogène de caractéristiques constantes dans le temps, dont $\mathrm{d}P_T = P_T - P_0$ et $\mathrm{d}\rho_T = \rho_T - \rho_0$, l'intégration de l'état (P_0, ρ_0) à l'état (P_T, ρ_T) conduit à l'expression $\frac{P_T}{P_0} = \left(\frac{\rho_T}{\rho_0}\right)^{\gamma}$. La relation cherchée pour la pression est donc

$$P_T = f(\rho_T, s = \mathrm{cte}) = f(\rho_T) = P_0\left(\frac{\rho_T}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

Elle correspond aux approximations habituelles de l'acoustique linéaire. Dans le cas où elles ne peuvent être vérifiées, les effets viscothermiques devront être pris en compte [1]. La pression acoustique a été définie comme la différence de pression totale entre l'état actuel du gaz $P_T = f(\rho_T)$ et l'état au repos $P_0 = f(\rho_0)$, qui développée en série de Taylor donne

$$\begin{aligned} p &= P_T - P_0 \\ &= f(\rho_T) - f(\rho_0) = (\rho_T - \rho_0)f'(\rho_0) + \frac{(\rho_T - \rho_0)^2}{2}f''(\rho_0) + \cdots + \frac{(\rho_T - \rho_0)^n}{n!}f^{(n)}(\rho_0) + \cdots \end{aligned}$$

avec $f'(\rho) = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$ et $f'(\rho_0) = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$

$f''(\rho) = \frac{\gamma P_0}{\rho_0^2}(\gamma-1)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-2}$ et $f''(\rho_0) = \frac{\gamma P_0}{\rho_0^2}(\gamma-1)$

en écrivant $\rho = \rho_T - \rho_0$ et en notant $c^2 = \gamma P_0/\rho_0$

$$p = c^2\left[\rho + \rho^2\frac{\gamma-1}{2\rho_0} + \cdots\right]$$

Conserver uniquement le terme de premier ordre dans l'équation précédente conduit à la relation de l'acoustique linéaire

$$\boxed{p = c^2\,\rho}$$

Cette relation permet de supprimer ρ dans l'équation de conservation de la masse linéarisée pour obtenir finalement le système

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \rho_0\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

[1] M. Bruneau, *Manuel d'acoustique fondamentale*, Hermès, 1998.

Equation d'onde
En dérivant la première relation par $\partial/\partial t$ et la seconde par $\partial/\partial x$, on obtient

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=0 \text{ et } \rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0$$

qui permet de constituer une équation unique pour la pression acoustique : l'**équation d'onde**

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0}$$

Remarque : L'équation d'Euler $\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$, permet de définir un **potentiel de vitesse** ϕ tel que

$$u=-\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad p=\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Ce potentiel de vitesse peut remplacer p dans l'équation d'onde. On peut vérifier qu'elle peut se généraliser en utilisant la variable Ψ qui peut être remplacée par n'importe quelle variable acoustique

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0 \quad \text{avec} \quad \Psi=\{p,\rho,u,\phi\}$$

1.2 – Solution générale pour une onde plane

La solution générale de l'équation d'onde (équation différentielle aux dérivées partielles) est

$$p(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{c}\right)$$

où il suffit que f_1 et f_2 soient des fonctions quelconques des variables $t-x/c$ et $t+x/c$ pour vérifier l'équation d'onde :

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{1}{c}f_1'+\frac{1}{c}f_2' \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}f_1''+\frac{1}{c^2}f_2''$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}=f_1'+f_2' \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=f_1''+f_2''$$

Si $f_2=0$, alors $p(x,t)=f_1(t-x/c)$. Si f_1 a une valeur p_a à (x,t), elle aura la même valeur à $(x+\Delta x,t+\Delta t)$, à condition que $t-x/c=t+\Delta t-x/c-\Delta x/c$, c'est à dire que $\frac{\Delta x}{\Delta t}=c$. L'onde se propage vers les x croissants et c est la **célérité du son**. Inversement si $f_1=0$ et $p(x,t)=f_2(t+x/c)$, l'onde se propage vers les x décroissants. La célérité du son s'exprime par

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad \text{avec pour l'air} \quad \begin{cases} \gamma = C_p / C_V = 1{,}4 \\ R = 8{,}314 \ \text{J/(mole.K)} \\ M = 29\ 10^{-3}\ \text{kg/mole} \end{cases}$$

(R constate des gaz parfaits, M la masse molaire)
soit

$c = 20{,}05\sqrt{T}$ [m/s] T température en °K

$\approx 331 + 0{,}607\,\theta$ θ température en °C autour de 0°C

Oxygène $c \approx$ 317 m/s
Hélium $c \approx$ 971 m/s
Eau $c \approx$ 1500 m/s

Pour une *onde plane progressive*, le potentiel de vitesse est $\phi = g(t - x/c)$ et

$$p = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho_0 g'$$
$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{c} g'$$

Dans ce cas, le rapport des deux grandeurs est une constante : l'**impédance caractéristique** du milieu (ou *intrinsèque*)

$$\boxed{\frac{p}{u} = \rho_0 c = Z_0}$$

Air à 0°C et $P_0 = 1013$ hPa,
$Z_0 = \rho_0 c = 427\ \text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$

1.3 – Solution harmonique : l'équation de Helmholtz

En supposant des perturbations harmoniques et en utilisant la notation complexe $p(x,t) = p(x)\,e^{j\omega t}$, on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} e^{j\omega t} \\ \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} &= -\omega^2\ p(x) e^{j\omega t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} p(x)\right] e^{j\omega t} = 0$$

Cette dernière équation, dont le terme $e^{j\omega t}$ ne peut être nul pour tout t, s'écrit sous la forme de l'**équation de Helmholtz**

$$\boxed{\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + k^2\ p(x) = 0}$$

avec le **nombre d'onde** $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

La solution de cette équation est une pression généralement complexe

$$p(x) = A\, e^{-jkx} + B\, e^{jkx}, \qquad A \text{ et } B \in \boldsymbol{C}$$

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles peut se retrouver

$$p(x,t) = p(x)\, e^{j\omega t} = A\, e^{j(\omega t - kx)} + B\, e^{j(t+kx)} = A\, e^{j\omega(t-x/c)} + B\, e^{j\omega(t+x/c)}$$

La **longueur d'onde** se définit par (avec la fréquence $f = \omega/2\pi$)

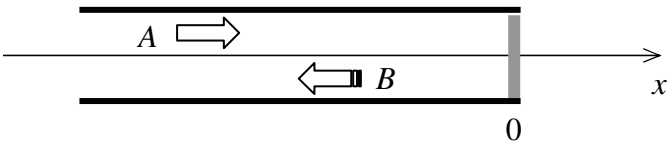
$$\boxed{\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi}{k}}$$

1.4 – Onde progressive et onde stationnaire

La solution générale comporte deux termes dont l'un correspond à une propagation de l'onde vers les *x* croissants et l'autre vers les *x* décroissants.

Souvent, le second terme est produit par la réflexion de la première onde à l'extrémité d'un tube constituant un *guide d'onde* et son amplitude est exprimée en proportion de l'*onde incidente* sous la forme d'un *coefficient de réflexion R* (en omettant $e^{j\omega t}$)

$$\begin{aligned} p(x) &= A\, e^{-jkx} + B\, e^{jkx} \\ &= A\left(e^{-jkx} + R\, e^{jkx}\right), \qquad \text{avec } R = \frac{B}{A} \end{aligned}$$



La *vitesse particulaire* est employée conjointement avec la pression acoustique pour décrire le champ sonore, bien que l'expression de la pression contient toute l'information puisque pression et vitesse sont liées par l'équation d'Euler

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \underset{\text{ondes harmonique et notation complexe}}{\rightleftharpoons} \quad j\omega\rho_0 u + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u = \frac{j}{\rho_0 \omega}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{j}{\rho_0 c k}\frac{\partial p}{\partial x}}$$

Par ailleurs, pression et vitesse sont souvent exprimées par leur *moyenne quadratique* qui équivaut au carré de leur *valeur efficace.* Par exemple pour la pression

$$\left\langle p^2(x,t) \right\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} p^2(x,t)\, dt = p_{eff}^2(x)$$

T est la durée d'intégration. Pour une pression harmonique (donc périodique) $T = 2\pi/\omega$

$$\boxed{\left\langle p^2(x,t)\right\rangle = p_{eff}^2(x) = \frac{|p(x)|^2}{2}}$$

où $|p(x)|$ est l'amplitude de l'onde (ou module en notation complexe : voir l'Annexe).

Remarque : dans la littérature anglo-saxonne la notation p_{RMS} est utilisée pour noter la pression efficace (Root Mean Square)

1.4.1 – Onde progressive ou propagative $R=0$

Une seule onde se propage (ici celle qui se dirige vers les x croissants)

$$p(x) = A\,e^{-jkx} \qquad \text{et} \qquad u(x) = \frac{j}{\rho_0 c k}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{A}{\rho_0 c}\,e^{-jkx}$$

d'où les valeurs quadratiques moyennes

$$\frac{\left\langle p^2(x,t)\right\rangle}{\rho_0 c} = \frac{|p(x)|^2}{2\rho_0 c} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c} \qquad \text{et} \qquad \rho_0 c\left\langle u^2(x,t)\right\rangle = \frac{\rho_0 c}{2}|u(x)|^2 = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c}$$

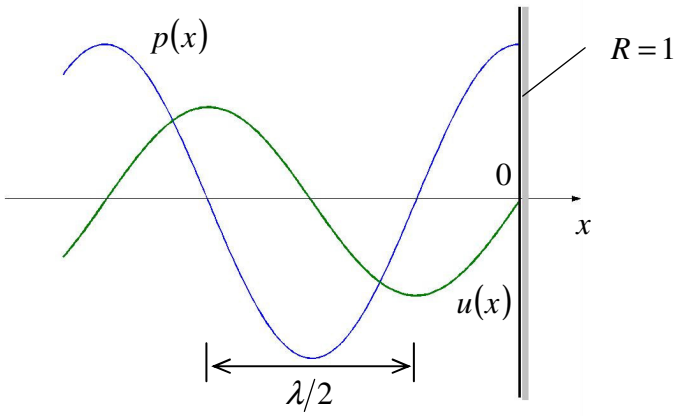
Remarque : on voit l'intérêt d'utiliser l'impédance caractéristique de l'onde $Z_0 = \rho_0 c$ pour avoir la même dimension dans les deux cas. Pour l'onde progressive

$$\frac{\left\langle p^2(x,t)\right\rangle}{\rho_0 c} = \rho_0 c\left\langle u^2(x,t)\right\rangle$$

1.4.2 – Onde stationnaire $R=1$

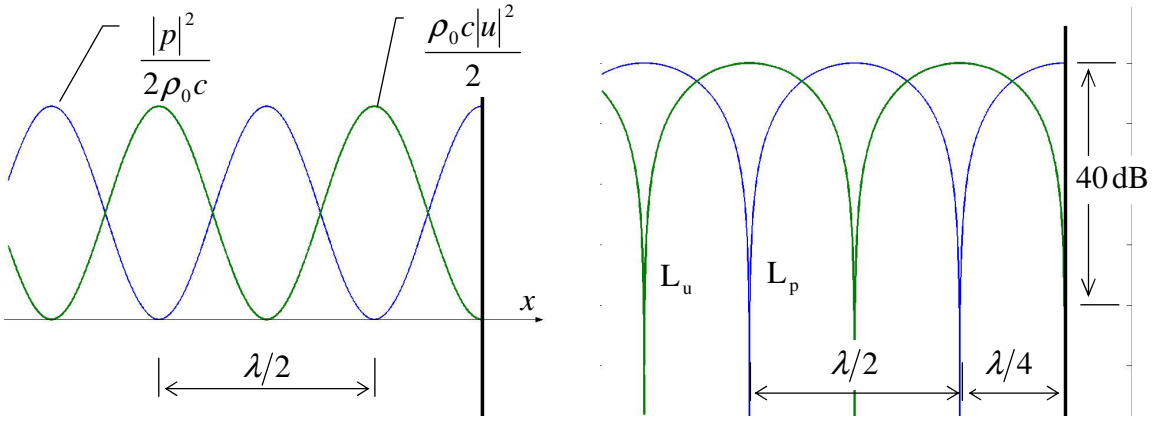
Les ondes se propageant dans les deux directions opposées ont même amplitude : l'onde incidente est totalement réfléchie : $R=1$

$$p(x) = A\left(e^{-jkx} + e^{jkx}\right) = 2A\cos kx \quad \text{et} \quad u(x) = \frac{j}{\rho_0 c k}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{A}{\rho_0 c}\left(e^{-jkx} - e^{jkx}\right) = -j2\frac{A}{\rho_0 c}\sin kx$$



En $x=0$, les vitesses s'annulent sur la paroi réfléchissante $u(0)=0$ et l'amplitude de la pression est maximale $p(0)=2A$ (le double de celle de l'onde incidente). Les grandeurs quadratiques sont :

$$\frac{\langle p^2(x,t)\rangle}{\rho_0 c}=\frac{|p(x)|^2}{2\rho_0 c}=\frac{|A|^2}{\rho_0 c}\cos^2 kx \quad \text{et} \quad \rho_0 c\langle u^2(x,t)\rangle=\frac{\rho_0 c}{2}|u(x)|^2=\frac{|A|^2}{\rho_0 c}\sin^2 kx$$



Pression et vitesse particulaire vibrent en quadrature de phase (pression réelle et vitesse imaginaire). A un ventre de pression (maxima) correspond à un nœud de vitesse (valeur nulle). La distance entre deux ventres ou deux nœuds est d'une demi longueur d'onde.

1.4.3 – Onde quasi-stationnaire 0<R<1

C'est le cas général où le coefficient de réflexion est compris entre 0 et 1.

$$p(x)=A\left(e^{-jkx}+R\,e^{jkx}\right) \qquad \text{et} \qquad u(x)=\frac{j}{\rho_0 ck}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{A}{\rho_0 c}\left(e^{-jkx}-R\,e^{jkx}\right)$$

La pression quadratique moyenne est

$$\frac{\langle p^2(x,t)\rangle}{\rho_0 c}=\frac{|p(x)|^2}{2\rho_0 c}=\frac{A\,A^*}{2\rho_0 c}\left(e^{-jkx}+R\,e^{jkx}\right)\left(e^{jkx}+R^*\,e^{-jkx}\right)$$
$$=\frac{|A|^2}{2\rho_0 c}\left(1+|R|^2+R\,e^{j2kx}+R^*\,e^{-j2kx}\right)$$

En écrivant le coefficient de réflexion complexe $R=|R|\,e^{j\varphi}$ il vient

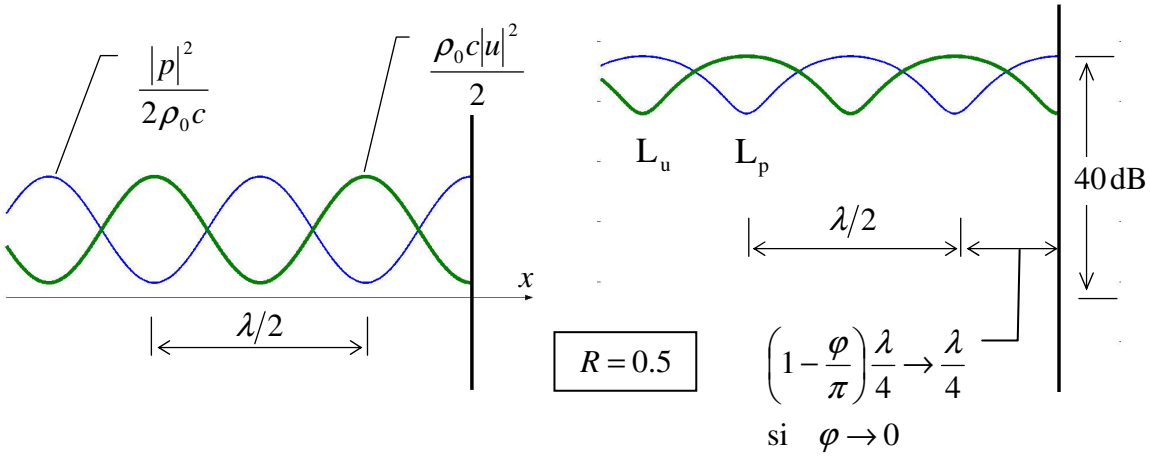
$$R\,e^{j2kx}+R^*\,e^{-j2kx}=2\,\mathrm{Re}\left\{R\,e^{j2kx}\right\}=2\,\mathrm{Re}\left\{|R|\,e^{j(2kx+\varphi)}\right\}=2|R|\cos(2kx+\varphi)$$

et

$$\frac{\langle p^2(x,t)\rangle}{\rho_0 c} = \frac{|p(x)|^2}{2\rho_0 c} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c}\left(1+|R|^2+2|R|\cos(2kx+\varphi)\right)$$

Pour la vitesse quadratique moyenne

$$\begin{aligned}\rho_0 c\langle u^2(x,t)\rangle = \frac{\rho_0 c}{2}|u(x)|^2 &= \frac{A\,A^*}{2\rho_0 c}\left(e^{-jkx}-R\,e^{jkx}\right)\left(e^{jkx}-R^*\,e^{-jkx}\right)\\ &= \frac{|A|^2}{2\rho_0 c}\left(1+|R|^2-R\,e^{j2kx}-R^*\,e^{-j2kx}\right)\\ &= \frac{|A|^2}{2\rho_0 c}\left(1+|R|^2-2|R|\cos(2kx+\varphi)\right)\end{aligned}$$



Pour une onde quasi-stationnaire, il n'y a plus annulation de la pression au minima. Le rapport des valeurs quadratiques maxi et mini est $\left(1+|R|^2+2|R|\right)/\left(1+|R|^2-2|R|\right)$ soit $\left(1+|R|\right)^2/\left(1-|R|\right)^2$. La figure correspond à un coefficient de réflexion $R=0.5$ ce qui conduit à un écart entre les valeurs maximale et minimale de $10\log(1.5/0.5)^2 \approx 9.5$ dB.

L'inde quasi-stationnaire peut être vue comme la superposition d'une onde progressive d'amplitude $A(1-R)$ et d'une onde stationnaire d'amplitude AR

$$p(x) = A\left(e^{-kkx}+R\,e^{jkx}\right) = A\left[(1-R)\,e^{-jkx}+2R\cos kx\right].$$

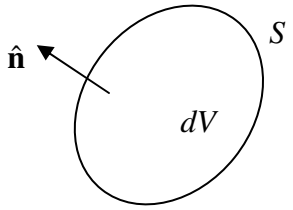
Le **taux d'onde stationnaire** se définit quand à lui comme le rapport des pressions efficaces maximale et minimale

$$\mathrm{TOS} = \frac{p_{\mathrm{eff\ max}}}{p_{\mathrm{eff\ min}}} = \frac{1+|R|}{1-|R|}, \qquad (1 \le \mathrm{TOS} < \infty).$$

2 – ONDE DANS L'ESPACE TRIDIMENSIONNEL

2.1 – Equation d'onde en 3D

On considère un volume élémentaire dV limité par une surface S



Comme pour le cas 1D, l'application des relations d'équilibre sur les grandeurs de la mécanique des fluides (grandeurs 'totales' : indice *T*) conduit aux équations de conservation.

Note : L'opérateur *nabla* est utilisé pour noter le *gradient* d'un scalaire (ici en coordonnées rectangulaires) :

$$\nabla a = \mathbf{grad}\, a = \frac{\partial a}{\partial x}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial a}{\partial y}\hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial a}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_3$$

C'est donc un opérateur vectoriel : $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Traité comme un vecteur il permet de représenter la *divergence* et le *rotationnel* à partir des produits scalaire et vectoriel :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)\cdot(A_x, A_y, A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \mathrm{div}\,\mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)\times(A_x, A_y, A_z)$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{e}}_2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$$

Equation de **conservation de la masse**

$$\iiint_V \frac{\partial \rho_T}{\partial t}\, dV + \oiint_S \rho_T\, \mathbf{u}_T \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0$$

En utilisant la formule de la divergence (ou théorème d'Ostrogradsky), l'intégrale de surface est transformée en intégrale de volume

$$\iiint_V \frac{\partial \rho_T}{\partial t}\, dV + \iiint_V \nabla \cdot (\rho_T\, \mathbf{u}_T)\, dV = 0$$

et la relation de conservation de la masse peut finalement s'écrire sous forme différentielle

$$\frac{\partial \rho_T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_T\, \mathbf{u}_T) = 0$$

Equation de **conservation de la quantité de mouvement**

$$\iiint_V \rho_T\, \frac{\partial \mathbf{u}_T}{\partial t}\, dV + \oiint_S P_T\, \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0$$

est transformée en employant la formule du gradient

$$\iiint_V \rho_T\, \frac{\partial \mathbf{u}_T}{\partial t}\, dV + \iiint_V \nabla P_T\, dV = 0$$

soit

$$\rho_T\, \frac{\partial \mathbf{u}_T}{\partial t} + \nabla P_T = 0$$

Comme précédemment, la prise en compte des grandeurs acoustiques $(p, \rho, \mathbf{u})$ telles que $P_T = P_0 + p$, $\rho_T = \rho_0 + \rho$ et $\mathbf{u}_T = \mathbf{u}$ (fluide au repos : $\mathbf{u}_0 = 0$) permet la linéarisation des équations de conservation. Ensuite, l'emploi de la relation linéaire approchée $p = c^2 \rho$ fournie par l'équation d'état des gaz parfaits conduit aux équations de conservation linéaires de l'acoustique pour le cas tridimensionnel :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad \text{Eq. cons. masse}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = 0 \qquad \text{Eq. d' Euler}$$

En calculant $\nabla \cdot \{\text{Eq. d' Euler}\} - \partial/\partial t \{\text{Eq. cons. masse}\}$, on obtient l'**équation des ondes** pour la pression $p(\mathbf{r}, t)$ où $\mathbf{r} = (x, y, z)$ est le vecteur position dans l'espace

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

Dans cette équation, l'opérateur ∇^2 est le *Laplacien* (parfois aussi noté Δ). Il est obtenu en prenant la *divergence* du *gradient* de la pression acoustique. En utilisant les opérations vectorielles sur l'opérateur *nabla* :

$$\nabla \cdot (\nabla p) = (\nabla \cdot \nabla) p = \nabla^2 p$$

$$\nabla^2 p = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial z^2} & \text{Coordonnées rectangulaires} \\ \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial R}\left(R\dfrac{\partial p}{\partial R}\right) + \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial z^2} & \text{Coordonnées cylindriques} \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial p}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin\varphi}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \dfrac{\partial p}{\partial \varphi}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin^2\varphi}\dfrac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} & \text{Coordonnées sphériques} \end{cases}$$

En considérant que la pression acoustique est harmonique et en utilisant la notation complexe $p(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) e^{j\omega t}$, la variable complexe $p(\mathbf{r})$ est suffisante pour représenter la distribution de la pression dans l'espace. Elle est la solution de l'**équation de Helmholtz**

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = 0$$

avec le nombre d'onde $k = \omega/c$. Dans le cas de l'onde harmonique, l'équation d'Euler prend la forme $j\omega\rho_0 \mathbf{u} + \nabla p = 0$, et le vecteur de la vitesse particulaire peut se calculer si le champ de pression est connu :

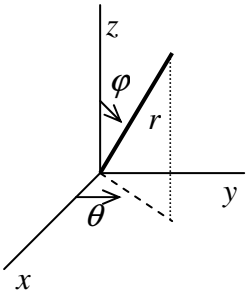
$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{j}{\omega\rho_0}\nabla p(\mathbf{r}) = \frac{j}{\rho_0 c k}\nabla p(\mathbf{r})$$

2.2 – Solutions en coordonnées sphériques

Equation d'onde en coordonnées sphériques

Le Laplacien est exprimé tout d'abord en coordonnées sphériques (voir plus haut). Comme on recherche un rayonnement *isotrope* indépendant de θ et de φ, les dérivées selon ces variables seront nulles

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rp)$$



et l'équation des ondes devient

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rp)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial^2(rp)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(rp)}{\partial t^2} = 0$$

Solution générale

L'équation d'onde pour le rayonnement isotrope est formellement identique à l'équation unidimensionnelle mais avec cette fois la variable rp. La solution pour cette variable est identique

$$rp(r,t) = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

soit finalement pour la pression

$$p(r,t) = \frac{1}{r}f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}f_2\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

terme divergent — terme convergent

Seul le premier terme convergent a un sens physique pour le rayonnement d'une source située à l'origine et vérifie la *condition de rayonnement de Sommerfeld* à l'infini

$$\lim_{r\to\infty}\left[r\left(\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t}\right)\right] = 0$$

Solution harmonique

C'est la solution de l'équation de Helmholtz pour le rayonnement isotrope :

$$p(r) = \frac{A}{r}e^{-jkr} + \frac{B}{r}e^{jkr}$$

Remarque : en ajoutant le terme $e^{j\omega t}$ on retrouve bien la solution générale :

$$p(r,t) = \frac{A}{r}e^{j\omega(t-r/c)} + \frac{B}{r}e^{j\omega(t+r/c)}$$

2.2.1 – Source monopolaire

C'est le champ rayonné le plus simple. Il correspond à la solution divergente de la solution générale pour un rayonnement isotrope :

$$p(\mathbf{r}) = A\frac{e^{-jkr}}{r}.$$

Le front de l'onde est sphérique et son amplitude décroît en proportion inverse de *r*. Le vecteur de la vitesse particulaire a une seule composante radiale (rayonnement isotrope) :

$$u_r = \frac{j}{\rho_0 ck}\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial r} = \frac{A}{\rho_0 c}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(1-\frac{j}{kr}\right)$$

La vitesse particulaire possède un premier terme qui décroît en $1/r$ comme la pression et un second terme qui décroît en $1/r^2$: le terme de *champ proche*.

L'*impédance* de l'onde sphérique $\dfrac{p}{u_r} = \rho_0 c\dfrac{1}{1-\dfrac{j}{kr}}$

diffère de l'impédance caractéristique $Z_0 = \rho_0 c$. Cependant, quand $kr = 2\pi r/\lambda >> 1$ c'est à dire quand $r/\lambda >> 1$, le terme de champ proche en $1/r^2$ devient négligeable devant $1/r$ et $p/u_r \approx \rho_0 c$. En *champ lointain*, l'onde sphérique est localement assimilable à une onde plane.

Remarque : l'amplitude A est une constante arbitraire qu'il est intéressant de relier à une caractéristique de la source. Pour une source monopolaire (source pulsante) , son *débit* peut être caractérisé à partir de sa vitesse radiale u_r sur une sphère de rayon *r* par

$$Q_u = 4\pi r^2 u_r$$

Quand $r \to 0$, $1/kr >> 1$ et $u_r \to -jAe^{-jkr}/\left(\rho_0 \omega r^2\right)$. Le débit Q_u devient constant et caractérise donc la *'force'* de la source et remplace l'amplitude A dans l'expression de la pression

$$p(r,t) = \frac{\rho_0}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial t}Q_u\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{j\omega\rho_0 Q_u}{4\pi r}e^{j(\omega t-kr)}$$

(Q_u est souvent appelé *débit de vitesse* pour le différentier du *débit de masse* $Q_m = \rho_0 4\pi r^2 u_r = \rho_0 Q_u$ également utilisé).

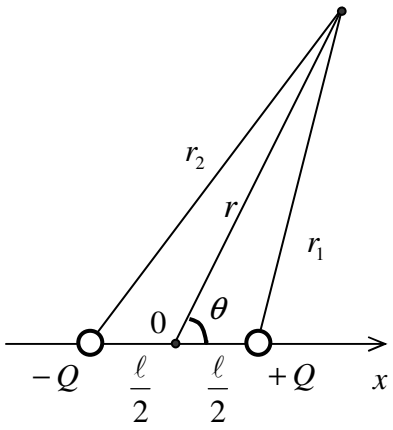
2.2.2 – Source dipolaire

Une source dipolaire peut se représenter comme deux monopôles voisins en opposition de phase distants de ℓ. La pression s'écrit

$$p(\mathbf{r},t) = \frac{j\omega\rho_0 Q}{4\pi r_1}e^{j(\omega t-kr_1)} - \frac{j\omega\rho_0 Q}{4\pi r_2}e^{j(\omega t-kr_2)}$$

soit encore, en omettant le terme $e^{j\omega t}$

$$p(\mathbf{r}) = \frac{j\omega\rho_0 Q}{4\pi}\left[\frac{e^{-jkr_1}}{r_1} - \frac{e^{-jkr_2}}{r_2}\right]$$



Dans le cas où r_1 et r_2 sont bien plus grand que ℓ et que les phases kr_1 et kr_2 ne changent pas beaucoup, c'est à dire que ℓ est plus petit que λ, il est possible d'écrire

$$\frac{e^{-jkr_1}}{r_1} - \frac{e^{-jkr_2}}{r_2} \approx \ell\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-jkr}}{r}\right] = \ell\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{e^{-jkr}}{r}\right] = \ell\cos\theta\frac{e^{-jkr}}{r}\left[1 - \frac{j}{kr}\right]$$

La pression du dipôle ponctuelle devient

$$p(r,\theta) = -\frac{\omega^2\rho_0 Q\ell}{4\pi c}\cos\theta\frac{e^{-jkr}}{r}\left[1 - \frac{j}{kr}\right]$$

et comporte un terme de **champ proche** en $1/r^2$. La vitesse particulaire radiale est

$$u_r = \frac{j}{\rho_0\omega}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{k^2 Q\ell}{4\pi}\cos\theta\frac{e^{-jkr}}{r}\left[1 - \frac{2j}{kr} - \frac{2}{(kr)^2}\right]$$

et il existe une vitesse tangentielle

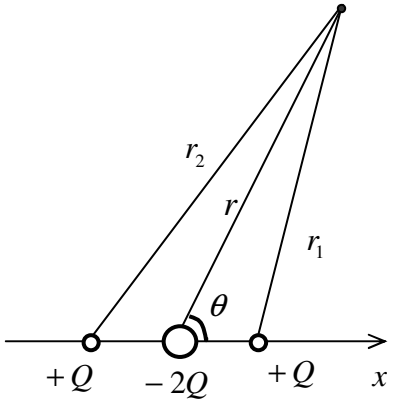
$$u_\theta = \frac{j}{\rho_0\omega}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} = -\frac{k^2 Q\ell}{4\pi}\sin\theta\frac{e^{-jkr}}{r}\left[\frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2}\right]$$

qui ne comporte que des termes de champ proche en $1/r^2$ et en $1/r^3$. La pression dépend de l'angle θ et s'annule sur le plan perpendiculaire à l'axe x passant par l'origine. La pression rayonnée en *champ lointain* peut donc s'écrire sous la forme

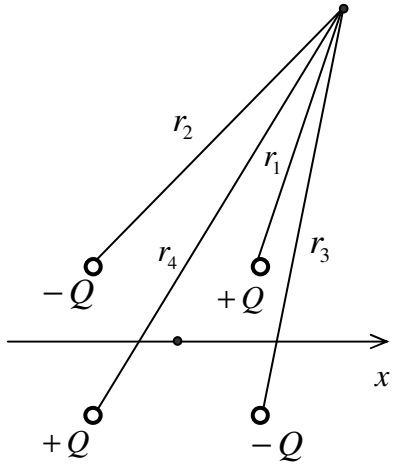
$$p_\infty(r,\theta) = -\frac{\omega^2\rho_0 Q\ell}{4\pi c}\cos\theta\frac{e^{-jkr}}{r}.$$

2.2.3 – Sources multipolaires

De la même façon, il est possible de construire des sources ponctuelles d'ordre supérieur. Par exemple, le quadripôle longitudinal et le quadripôle latéral se définissent par :



Quadripôle longitudinal



Quadripôle latéral

$$p(\mathbf{r}) = \frac{j\omega\rho_0 Q}{4\pi}\left[\frac{e^{-jkr_1}}{r_1} + \frac{e^{-jkr_2}}{r_2} - 2\frac{e^{-jkr}}{r}\right] \cong \frac{j\omega\rho_0 Q\ell^2}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{e^{-jkr}}{r}\right]$$

$$p(\mathbf{r}) = \frac{j\omega\rho_0 Q}{4\pi}\left[\frac{e^{-jkr_1}}{r_1} - \frac{e^{-jkr_2}}{r_2} - \frac{e^{-jkr_3}}{r_3} + \frac{e^{-jkr_4}}{r_4}\right] \cong \frac{j\omega\rho_0 Q\ell^2}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{e^{-jkr}}{r}\right]$$

Pour plus de détails sur ces sources ponctuelles multipolaires, se reporter à la Ref. [7] (P.A. Nelson, "An introduction to acoustics", in *Fondamentals of Noise and Vibration*). Pour le quadripôle longitudinal la dépendance de θ (directivité) est en $\cos^2\theta$ alors qu'elle est en $\cos\theta\sin\theta$ pour le quadripôle latéral.

A partir du monopôle ponctuel, solution élémentaire pour un rayonnement isotrope, il est possible de définir des sources multipolaires. Une autre possibilité consiste à utiliser l'expression complète du *Laplacien* en coordonnées sphériques, quand la pression dépend de θ et de φ. La solution générale est un développement de la pression en *harmoniques sphériques*

$$p(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(2)}(kr)\sum_{m=0}^{n}\left[a_{nm}Y_{nm}^{(1)}(\theta,\varphi) + b_{nm}Y_{nm}^{(2)}(\theta,\varphi)\right]$$

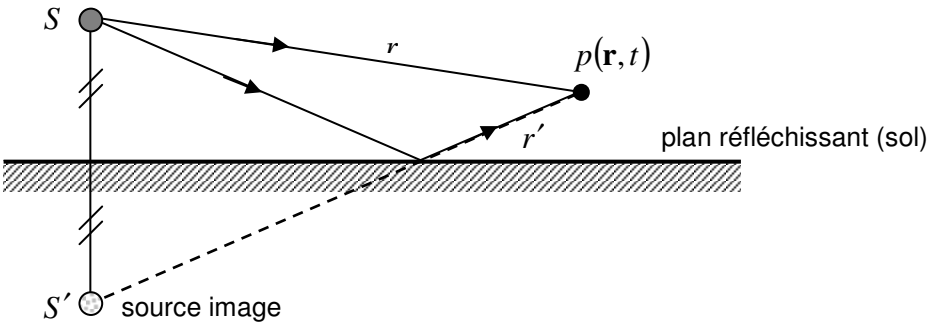
où les harmoniques sphériques s'expriment à partir des fonctions de Legendre

$$Y_{nm}^{(1)}(\theta,\varphi) = \mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \quad \text{et} \quad Y_{nm}^{(2)}(\theta,\varphi) = \mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

et pour un degré n la loi de propagation dans la direction radiale est décrite par la fonction de Hankel sphérique $h_n^{(2)}(z)$ (le terme divergent est seul représenté dans l'expression de la pression précédente). Cette équation signifie que le champ de pression acoustique rayonné par une source quelconque dans l'espace infini peut se représenter à l'extérieur de la plus petite sphère contenant la source par une série infinie d'harmoniques sphériques de coefficients a_{nm} et b_{nm}.

2.3 – Influence d'une paroi réfléchissante

La pression due à une source placée au-dessus d'un plan réfléchissant sera la somme d'une contibution directe et d'une contribution réfléchie.



Avec un plan parfaitement réfléchissant (impédance infinie), on peut considérer que l'onde réfléchie provient d'une **source image** disposée symétriquement par rapport au plan. Ainsi dans le cas d'une source ponctuelle monopolaire

$$p(\mathbf{r},\omega) = p_D(\mathbf{r},\omega) + p_R(\mathbf{r},\omega) = \left(\frac{A\, e^{-jkr}}{r} + \frac{A\, e^{-jkr'}}{r'} \right).$$

Au point de réception, l'onde réfléchie est aussi une onde sphérique qui a une amplitude plus faible que l'onde directe d'un rapport r/r' et qui arrive avec un retard $\tau = \Delta r/c$ ($\Delta r = r' - r$). La pression totale peut s'écrire dans le cas général par

$$p(\mathbf{r},t) = p_D(\mathbf{r},t) + \frac{r}{r'}\, p_D(\mathbf{r}, t-\tau)$$

et dans le cas harmonique par

$$p(\mathbf{r},\omega) = p_D(\mathbf{r},\omega)\left(1 + \frac{r}{r'}\, e^{j\omega\tau}\right) = p_D(\mathbf{r},\omega)\left(1 + \frac{r}{r'}\, e^{jk\Delta r}\right).$$

La pression quadratique peut s'exprimer par

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{|p(\mathbf{r},\omega)|^2}{2\rho_0 c} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c\, r^2}\left(1 + \frac{r}{r'}\, e^{jk\Delta r}\right)\left(1 + \frac{r}{r'}\, e^{-jk\Delta r}\right) = \frac{|p_D(\mathbf{r},\omega)|^2}{2\rho_0 c}\left(1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 + 2\,\frac{r}{r'}\cos k\Delta r\right)$$

Le dernier terme représente l'influence des interférences dues à la différence de parcours Δr entre l'onde directe et l'onde réfléchie. Il en résulte que l'observation de l'émission de la source est affectée par la position du point d'observation, sa distance du plan réfléchissant et la fréquence.

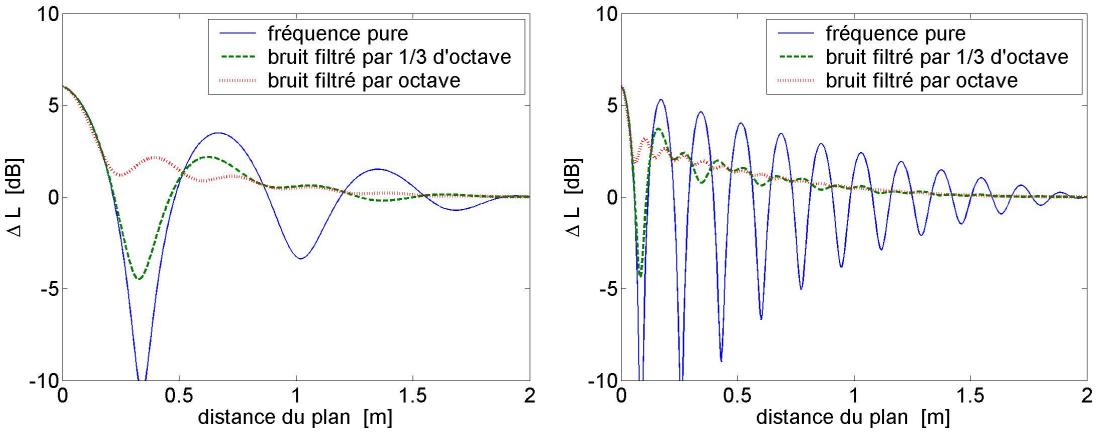
1) Si la mesure est faite sur une **bande de fréquence** $\Delta f = f_2 - f_1$ de fréquence moyenne $f_m = (f_1 + f_2)/2$ pour laquelle la source émet en large bande (bruit blanc) avec une amplitude constante sur Δf tel que $\langle p_D^2 \rangle\big|_{\Delta f} \approx \Delta f\, |p_D(\omega)|^2 / 2$, la pression quadratique au point d'observation est

$$\left.\frac{\langle p^2\rangle}{\rho_0 c}\right|_{\Delta f} = \int_{f_1}^{f_2} \frac{|p_D(\mathbf{r},\omega)|^2}{2\rho_0 c}\left(1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2 + 2\frac{r}{r'}\cos\left(2\pi f\frac{\Delta r}{c}\right)\right)\mathrm{d}f$$

$$= \left.\frac{\langle p_D^2\rangle}{\rho_0 c}\right|_{\Delta f}\left(1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2 + \frac{2}{\Delta f}\frac{r}{r'}\int_{f_1}^{f_2}\cos\left(2\pi f\frac{\Delta r}{c}\right)\mathrm{d}f\right)$$

$$= \left.\frac{\langle p_D^2\rangle}{\rho_0 c}\right|_{\Delta f}\left(1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2 + 2\frac{r}{r'}\frac{\sin\pi\Delta f\ \Delta r/c}{\pi\Delta f\ \Delta r/c}\cos\left(2\pi f_c\frac{\Delta r}{c}\right)\right)$$

Le terme $\sin(\pi\Delta f\ \Delta r/c)/(\pi\Delta f\ \Delta r/c)$ va diminuer l'influence du terme d'interférence quand la bande de fréquence Δf augmente (ou plus précisément quand le produit $\Delta f\Delta r$ s'accroît). La figure ci-dessous représente l'écart $\Delta L = 10\log\left[\langle p^2\rangle / \langle p_D^2\rangle\right]$ des fluctuations par rapport au champ direct (en champ libre) produit par une source ponctuelle situé à 2 m du plan réfléchissant. A proximité de la source, l'écart est pratiquement nul car le champ direct domine, puis les interférences deviennent plus importantes en s'approchant du plan réfléchissant. Au niveau du plan, l'amplitude est doublée (donc $\Delta L = 6\,\mathrm{dB}$). L'importance des interférences diminue quand la largeur de bande du bruit augment (bandes de tiers d'octave et d'octave).

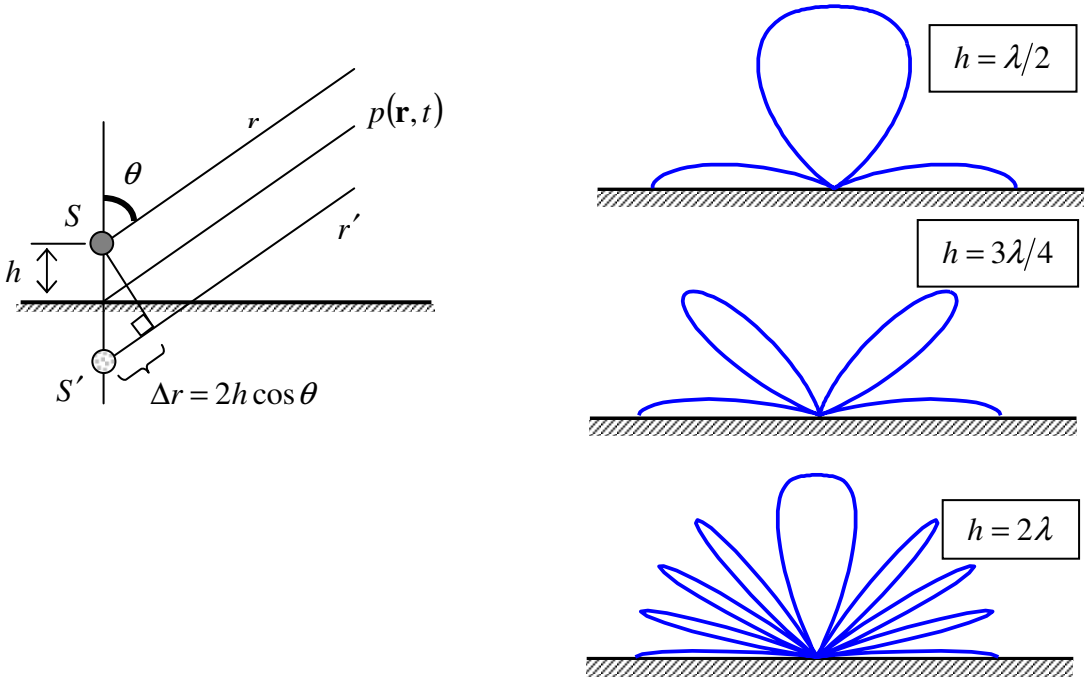


Ecart de pression en dB par rapport à l'onde incidente du champ d'interférence situé entre le plan réfléchissant et la source ponctuelle située à 2 m, à 250 Hz à gauche et 1000 Hz à droite.

2) Si la pression est mesurée dans le **champ lointain** ($r >> h$), il est possible de mettre en évidence la directivité de l'émission de la source à proximité d'un plan réfléchissant. Dans ce cas $r/r' \approx 1$, $\Delta r = 2h\cos\theta$ et la pression quadratique prend la forme

$$\frac{\langle p_\infty^2\rangle}{\rho_0 c} = \frac{\langle p_D{}^2\rangle}{\rho_0 c}\left(1+\cos\left(2kh\cos\theta\right)\right)$$

avec $2kh = 4\pi\dfrac{h}{\lambda}$.



Directivité en champ lointain en fonction du rapport de la hauteur au-dessus du plan réfléchissant et de la longueur d'onde de l'émission.

2.4 – Représentation dans un repère cartésien : réflexion et transmission

Le champ de pression d'une onde plane tridimensionnelle peut se représenter à l'aide du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ de module ω/c et orienté dans la direction de sa propagation et du vecteur position $\mathbf{r}$ du point d'observation, ce qui conduit dans un repère cartésien à écrire

$$p(\mathbf{r}) = A\,e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = A\,e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)},$$

avec $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, la relation de dispersion qui vérifie l'équation d'onde.

Ainsi la pression incidente de la figure ci-dessous qui ne comporte pas de composante se propageant dans la direction z peut s'écrire avec $k_x = k\cos\theta_i$, $k_y = k\sin\theta_i$ et $k_z = 0$

$$p_i(x, y) = A\,e^{-jk(x\cos\theta_i + y\sin\theta_i)}.$$

Réflexion sur un plan rigide

Dans ces conditions l'onde réfléchie a même amplitude que l'onde incidente et $\theta_r = \theta_i$. La composante dans la direction y est la même $k_y = k\sin\theta_i$ et celle dans la direction x de signe contraire $k_x = -k\cos\theta_i$, ce qui conduit à écrire la pression réfléchie sous la forme

$$p_r(x, y) = A\,e^{+jk(x\cos\theta_i - y\cos\theta_i)}.$$

Cas de deux milieux fluides différents

Dans cette situation, la pression incidente dans le milieu 1 de masse volumique ρ_1 et de célérité c_1, $p_i(x,y) = A\,e^{-jk_1(x\cos\theta_i + y\sin\theta_i)}$ (avec $k_1 = \omega/c_1$), se trouve en partie réfléchie dans le milieu 1 sous la forme d'une onde d'amplitude AR (R coefficient de réflexion en amplitude) et d'angle θ_r

$$p_r(x,y) = AR\,e^{+jk(x\cos\theta_r - y\sin\theta_r)},$$

et en partie transmise dans le milieu 2 de masse volumique ρ_2 et de célérité c_2 sous la forme d'une onde d'amplitude AT (T coefficient de transmission en amplitude) et d'angle θ_t

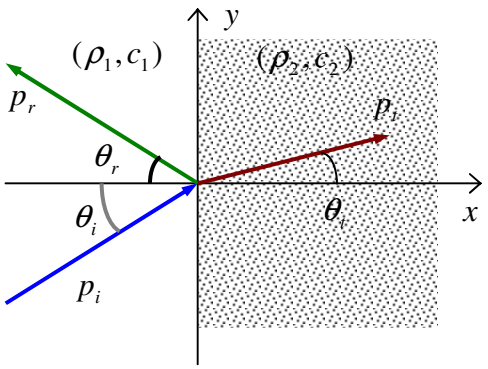
$$p_t(x,y) = AT\,e^{-jk_2(x\cos\theta_t + y\sin\theta_t)},$$

avec $k_2 = \omega/c_2$. Les pressions dans les milieux 1 et 2 sont respectivement

$$p_1(x,y) = p_i(x,y) + p_r(x,y) \quad \text{et} \quad p_2(x,y) = p_t(x,y).$$

Pour résoudre le problème de la réflexion et de la transmission des ondes à l'interface de deux milieux fluides différents, c'est à dire trouver les coefficients R et T ainsi que les angles θ_r et θ_t, il faut satisfaire les conditions à la frontière ($x = 0$) des deux fluides (non-visqueux) en chaque point (et en chaque instant quand une représentation instantanée est utilisée) :

Continuité des pressions en $x = 0$	$p_1(0,y) = p_2(0,y)$
Continuité des vitesses particulaires normales en $x = 0$	$u_{n1}(0,y) = u_{n2}(0,y)$



Transmission et réflexion d'une onde plane à l'interface de deux fluides différents.

En considérant dans un premier temps la condition de continuité des pressions, il est possible en fonction des relations précédentes d'écrire l'égalité

$$A\left(e^{-jk_1 y\sin\theta_i} + R\,e^{-jk_1 y\sin\theta_r}\right) = AT\,e^{-jk_2 y\sin\theta_t}$$

qui pour être vérifiée doit satisfaire deux contraintes

a) les arguments des fonctions exponentielles doivent être identiques, ce qui conduit à la loi de Snell-Descartes

$$k_1 \sin\theta_i = k_1 \sin\theta_r = k_2 \sin\theta_t \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\theta_i}{c_1} = \frac{\sin\theta_r}{c_1} = \frac{\sin\theta_t}{c_2}$$

qui permet d'écrire $\theta_r = \theta_i$ et $\sin\theta_t = \frac{c_2}{c_1}\sin\theta_i$.

Remarque

Cette relation montre que pour $c_2 > c_1$, il existe une valeur critique pour θ_i au-delà de laquelle elle ne peut plus être satisfaite. Cet angle critique correspond à $\sin\theta_c = c_1/c_2$. Quand l'angle d'incidente est supérieur à cet angle critique l'onde transmise n'est pas une onde progressive : c'est une **onde évanescente** dont l'amplitude décroît exponentiellement dans la direction x.

b) les coefficients de réflexion et de transmission doivent vérifier la relation

$$1 + R = T$$

La condition de continuité des vitesses particulaires normales va fournir une autre relation pour déterminer ces coefficients. Les composantes x des vitesses (c'est à dire ici les composantes normales) s'obtiennent en utilisant la relation d'Euler $j\omega\rho_n u_{x_n} + \partial p_n/\partial x = 0$ (pour $n = 1,2$)

$$u_{x1}(x,y) = \frac{A\cos\theta_i}{\rho_1 c_1}\left(e^{-jk_1(x\cos\theta_i + y\sin\theta_i)} - R\, e^{+jk_1(x\cos\theta_i - y\sin\theta_i)}\right),$$

$$u_{x2}(x,y) = \frac{A\cos\theta_t}{\rho_2 c_2} T\, e^{-jk_2(x\cos\theta_t + y\sin\theta_t)}.$$

En imposant en $x = 0$ la contrainte $u_{x1}(0,y) = u_{x2}(0,y)$, on obtient l'égalité

$$\frac{A\cos\theta_i}{\rho_1 c_1}\left(e^{-jk_1 y\sin\theta_i} - R\, e^{-jk_1 y\sin\theta_i}\right) = \frac{A\cos\theta_t}{\rho_2 c_2}\left(T\, e^{-jk_2 y\sin\theta_t}\right)$$

La relation $k_1\sin\theta_i = k_2\sin\theta_t$ montre que l'argument des fonctions exponentielles est identique et que

$$\frac{\cos\theta_i}{\rho_1 c_1}(1-R) = \frac{\cos\theta_t}{\rho_2 c_2} T.$$

Les coefficients de réflexion et de transmission s'écrivent (avec $Z_1 = \rho_1 c_1$ et $Z_2 = \rho_2 c_2$)

$$R = \frac{Z_2\cos\theta_i - Z_1\cos\theta_t}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t} \quad \text{et} \quad T = \frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\cos\theta_t}.$$

L'impédance à l'interface des deux fluides s'écrit $Z_S = \frac{p_1(0,y)}{u_{n1}(0,y)} = \frac{p_2(0,y}{u_{n2}(0,y)}$

$$Z_S = \frac{p_1(0,y)}{u_{n1}(0,y)} = \left(\frac{1+R}{1-R}\right)\frac{Z_1}{\cos\theta_i} = \frac{Z_2}{\cos\theta_t}.$$

Z_S est l'impédance de surface qui peut se substituer dans les expressions précédentes des coefficients de réflexion et de transmission

$$R = \frac{Z_S\cos\theta_i - Z_1}{Z_S\cos\theta_i + Z_1} \quad \text{et} \quad T = \frac{2Z_S\cos\theta_i}{Z_S\cos\theta_i + Z_1}.$$

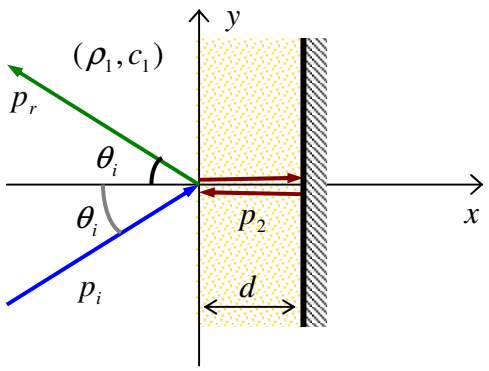
Il est donc possible de déterminer le champ acoustique dans le demi-espace 1 à partir de la seule connaissance de l'impédance de surface Z_S.

Réflexion à la surface d'un matériau à réaction locale

Les matériaux fibreux utilisés pour l'absorption des ondes sont souvent représentés[2] par des modèles de fluides équivalents (modèle de Delany et Bazley, modèle de Johnson-Allard). Une hypothèse de **réaction locale** est souvent ajoutée : elle suppose que l'anisotropie du matériau est telle (orientation des fibres par exemple) que les ondes transmises se propagent uniquement dans la direction normale à la surface (c'est à dire que θ_t est toujours nul).

Avec un matériau à **réaction locale**, les relations précédentes montrent que l'impédance de surface est indépendante de l'angle d'incidence et correspond à $Z_S = Z_2$ pour un matériau d'épaisseur **infinie**. Le modèle empirique de Delany et Bazley donne pour Z_2 une impédance complexe et une constante de propagation elle aussi complexe, dont la partie imaginaire contribue à affaiblir les ondes qui se propagent dans le matériau

$$p_t(x,y) = AT\,e^{-jk_2x} = AT\,e^{-j(\mathrm{Re}\{k_2\}+j\,\mathrm{Im}\{k_2\})x} = AT\,e^{-j\,\mathrm{Re}\{k_2\}x}\,e^{-\mathrm{Im}\{k_2\}x}.$$



Transmission et réflexion d'une onde plane à l'interface d'un matériau à réaction locale d'épaisseur finie posé sur un plan rigide.

[2] Il existe d'autres modèles où le matériau poreux n'est pas assimilé à un fluide : le modèle de Biot, en particulier, qui prend en compte les vibrations d'un squelette élastique enfermant le fluide ambiant.

Plutôt qu'une épaisseur infinie de matériau poreux, il est plus fréquent de rencontrer le cas d'un matériau d'épaisseur d disposé sur une surface rigide (donc d'impédance infinie) sur laquelle l'onde transmise dans la direction x se trouve réfléchie

$$p_2(x, y) = A\left(T\, e^{-jk_2 x} + B\, e^{jk_2 x}\right).$$

Le coefficient B est obtenu en considérant que la vitesse doit s'annuler sur la surface rigide, donc que $\partial p_t / \partial x = 0$ en $x = d$, ce qui conduit à $B = T\, e^{-j2k_2 d}$.

L'impédance de surface qui pourra être employée dans l'expression du coefficient de réflexion est alors

$$Z_S = \frac{p_2(0, y)}{u_{n2}(0, y)} = Z_2 \frac{1 + e^{-j2k_2 d}}{1 - e^{-j2k_2 d}} = -jZ_2 \cot k_2 d\ .$$

Remarque
Même pour un matériau à réaction locale dont l'impédance de surface est constante quel que soit l'angle d'incidence, le coefficient de réflexion d'un matériau à réaction locale dépend de l'angle d'incidence. Il en sera de même du **coefficient d'absorption** α défini comme le rapport de la puissance absorbée par le matériau sur la puissance de l'onde incidente, qui est relié au coefficient de réflexion par la relation

$$\alpha(\omega, \theta_i) = 1 - \left|R(\omega, \theta_i)\right|^2.$$

2.5 – Equation inhomogène : l'expression des sources

Les équations de conservation de l'acoustique linéaire ont été obtenues en considérant un espace sans sources. Si nous envisageons maintenant une source créant un débit de masse (source ponctuelle pulsante), il faut ajouter un second membre à l'équation de conservation de la masse

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \rho_0\, \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \rho_0 q_u(\mathbf{r}, t)$$

et une force au second membre de l'équation d'Euler représentera une source ponctuelle oscillante

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla p(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$$

Comme précédemment, en calculant $\nabla \cdot \{\text{Eq. d' Euler}\} - \partial/\partial t \{\text{Eq. cons. masse}\}$, on obtient l'**équation des ondes** inhomogène dont le second membre représente les sources de l'acoustique

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) - \rho_0 \frac{\partial q_u(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

qui s'interprètent respectivement comme une distribution de dipôles et de monopôles. De même, pour l'équation de Helmholtz inhomogène

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) - j\omega\rho_0 q_u(\mathbf{r})$$

3 – INTENSITE ET PUISSANCE ACOUSTIQUE

3.1 – Intensité acoustique

L'intensité acoustique peut se définir comme le *vecteur transport d'énergie* de l'onde sonore. C'est l'équation de conservation de l'énergie qui permet de la définir. Bien que l'intensité acoustique soit une *quantité du second ordre,* il a été démontré que pour un fluide **au repos** elle pouvait s'exprimer à partir des grandeurs linéarisées de l'acoustique (du premier ordre). Dans ces conditions l'équation de conservation de l'énergie n'est pas une relation indépendante : elle se déduit des équations acoustiques de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (Euler)

$$\mathbf{u}\cdot\{\text{éq d' Euler}\}=\rho_0\,\mathbf{u}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla p=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}^2\right)+\nabla\cdot(p\,\mathbf{u})-p\,\nabla\cdot\mathbf{u}=0$$

L'équation de conservation de la masse fournit la relation $\nabla\cdot\mathbf{u}=-\dfrac{1}{\rho_0 c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}$ qui est utilisée dans l'équation précédente pour donner l'**équation de conservation de l'énergie** dans la zone qui n'est pas occupée par les sources

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}^2+\frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c^2}\right]}_{E(t)}+\nabla\cdot\underbrace{(p\,\mathbf{u})}_{\mathbf{i}(t)}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial E(t)}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{i}(t)=0$$

$E(t)$ est la densité d'énergie totale instantanée, somme de la densité *d'énergie cinétique* $\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}^2(t)$ et de la densité d'*énergie potentielle* $\frac{1}{2}p^2(t)/\rho_0 c^2$. $\mathbf{i}(t)=p(t)\,\mathbf{u}(t)$ est l'*intensité acoustique instantanée*.

Pour une onde **unidimentionnelle** $\partial E(t)/\partial t+\partial\, i(t)/\partial x=0$ et $i(t)=p(t)\,u(t)$.

Les valeurs moyenne dans le temps sont plus couramment utilisées que les valeurs instantanées

$$\left\langle\frac{\partial E(t)}{\partial t}\right\rangle=\frac{\rho_0}{2}\left\langle\frac{\partial\mathbf{u}^2(t)}{\partial t}\right\rangle+\frac{1}{2\rho_0 c^2}\left\langle\frac{\partial p^2(t)}{\partial t}\right\rangle=\rho_0\underbrace{\left\langle\mathbf{u}(t)\frac{\partial\mathbf{u}(t)}{\partial t}\right\rangle}_{0}+\frac{1}{\rho_0 c^2}\underbrace{\left\langle p(t)\frac{\partial p(t)}{\partial t}\right\rangle}_{0}=0$$

donc

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{I}=0}$$

Avec la pression et la vitesse particulaire complexes, $p(t)=\mathrm{Re}\{p\,e^{j\omega t}\}$ et $\mathbf{u}(t)=\mathrm{Re}\{\mathbf{u}\,e^{j\omega t}\}$ l'intensité moyenne est (voir Annexe)

$$\boxed{\mathbf{I}=\langle p(t)\,\mathbf{u}(t)\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{p\,\mathbf{u}^*\}}$$

et les densités d'énergie **potentielle** et **cinétique**

$$V = \frac{\langle p^2(t)\rangle}{4\rho_0 c^2} = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c^2} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{\rho_0}{2}\langle \mathbf{u}^2(t)\rangle = \frac{\rho_0}{4}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^*$$

et la densité d'énergie **totale**

$$D = V + T$$

3.2 – Exemples

a) **Onde plane progressive**

$$p(x) = A\,e^{-jkx}, \quad u(x) = \frac{j}{\rho_0 ck}\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{A}{\rho_0 c}e^{-jkx}$$

$$I(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{p(x)u^*(x)\} = \frac{|A^2|}{2\rho_0 c} = \frac{|p(x)|^2}{2\rho_0 c} = \frac{1}{2}\rho_0 c|u(x)|^2 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{I(x) = c\,D(x)}$$

b) **Onde sphérique monopolaire**

$$p(r) = A\frac{e^{-jkr}}{r}, \quad u_r(r) = \frac{A}{\rho_0 c}\frac{e^{-jkr}}{r}\left(1 - \frac{j}{kr}\right)$$

$$I_r(r) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{p(r)u_r^*(r)\} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{j}{kr}\right)\right\} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c\,r^2}$$

$$2cV = \frac{\langle p^2(r,t)\rangle}{\rho_0 c} = \frac{1}{2}\frac{|p(r)|^2}{\rho_0 c} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c\,r^2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{I_r(r) = \frac{|p(r)|^2}{2\rho_0 c} = 2cV}$$

$$\rho_0 c\langle u_r^2(r)\rangle = \frac{1}{2}\rho_0 c|u_r(r)|^2 = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c\,r^2}\left(1 - \frac{j}{kr}\right)\left(1 + \frac{j}{kr}\right) = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c\,r^2}\left(1 + \frac{1}{k^2 r^2}\right)$$

c) **Onde stationnaire**

$$p(x) = A\left(e^{-jkx} + e^{jkx}\right) = 2A\cos kx, \quad u(x) = \frac{A}{\rho_0 c}\left(e^{-jkx} - e^{jkx}\right) = -j\frac{A}{\rho_0 c}\sin kx$$

$$I(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{p(x)u^*(x)\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{j4\frac{|A|^2}{\rho_0 c}\cos kx\sin kx\right\} = 0 \qquad \boxed{I(x) = 0}$$

$$V(x) = \frac{|p(x)|^2}{4\rho_0 c^2} = \frac{|A|^2}{\rho_0 c^2}\cos^2 kx \qquad \text{et} \qquad T(x) = \rho_0\frac{|u(x)|^2}{4} = \frac{|A|^2}{\rho_0 c^2}\sin^2 kx$$

La densité d'énergie totale $D(x) = V(x) + T(x) = \dfrac{|A|^2}{\rho_0 c^2}$ est constante

d) **Onde quasi stationnaire**

$$p(x) = A\left(e^{-jkx} + R\,e^{jkx}\right),\ u(x) = \frac{A}{\rho_0 c}\left(e^{-jkx} - R\,e^{jkx}\right)$$

$$I(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{p(x)u^*(x)\right\} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c}\mathrm{Re}\left\{1 - |R|^2 + R\,e^{j2kx} - R\,e^{-j2kx}\right\}$$

$$= \frac{|A|^2}{2\rho_0 c}\mathrm{Re}\left\{1 - |R|^2 + jR\sin 2kx\right\} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c}\underbrace{\left[1 - |R|^2\right]}_{\alpha\ \text{coefficient d'absorption}}$$

$$V(x) = \frac{|p(x)|^2}{4\rho_0 c^2} = \frac{|A|^2}{4\rho_0 c^2}\left[1 + |R|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left\{R\,e^{j2kx}\right\}\right]$$

$$T(x) = \rho_0\frac{|u(x)|^2}{4} = \frac{|A|^2}{4\rho_0 c^2}\left[1 + |R|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{R\,e^{j2kx}\right\}\right]$$

$$D(x) = V(x) + T(x) = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c^2}\left[1 + |R|^2\right]$$

A partir de l'intensité et de la densité d'énergie totale, il est possible de déterminer le coefficient d'absorption

$$\alpha = 1 - |R|^2 = \frac{2\dfrac{I}{cD}}{1 + \dfrac{I}{cD}}$$

<u>Remarques générales</u>

Dans l'onde plane progressive et l'onde sphérique (produite par une source monopolaire) il existe une relation directe entre le module de l'intensité acoustique et la pression quadratique

$$\boxed{|I| = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c} = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c}}$$

Cette relation n'est pas vérifiée pour d'autres types d'ondes provenant de sources plus complexes (dipôles, multipôles, …) ou dans des champs créés par une source monopolaire et ses réflexions sur une paroi rigide.

3.3 – Puissance acoustique

La puissance acoustique d'une source est le flux total du vecteur intensité acoustique sur une surface fermée entourant la source :

$$\boxed{W = \oiint_S \mathbf{I}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \oiint_S I_n\,dS}$$

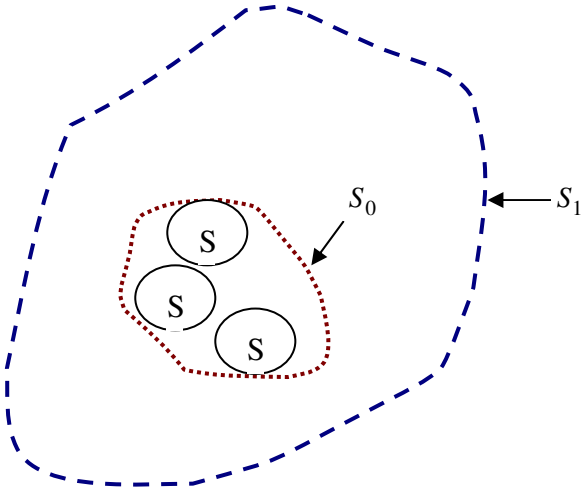
Exemple : source monopolaire et surface sphérique

$$I_n = I_r = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c}$$

$$W = \oiint_S I_n dS = \oiint_S \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} dS = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} S = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} 4\pi r^2$$

puisque $\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c r^2}$, $W = \frac{2\pi |A|^2}{\rho_0 c}$ indépendant de r

Plus généralement



Puissance à travers la surface S_0

$$W_0 = \oiint_{S_0} \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_{V_0} \nabla \cdot \mathbf{I} dV$$

Puissance à travers la surface S_1

$$W_1 = \oiint_{S_1} \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ dS = \iiint_{V_1} \nabla \cdot \mathbf{I}\ dV$$

$$= \underbrace{\iiint_{V_0} \nabla \cdot \mathbf{I}\ dV}_{W_0} + \underbrace{\iiint_{V_{V_1} - V_0} \nabla \cdot \mathbf{I}\ dV}_{\to 0}$$

donc $\boxed{W_1 = W_0}$

Remarque

La puissance acoustique obtenue en intégrant la composante normale de l'intensité acoustique sur une enveloppe de mesure entourant les sources est indépendante de la forme, de la position et de la surface de cette enveloppe.

Annexe

Représentation de l'intensité et des valeurs quadratiques moyennes

Les signaux du monde physique sont réels. La notation complexe est une solution pratique pour représenter à la fois l'amplitude et la phase. Elle permet surtout de simplifier considérablement les calculs quand un signal subit des transformations linéaires successives qui affectent son amplitude et sa phase. C'est le cas en particulier des dérivations et différentiations qui modifient l'amplitude proportionnellement à la fréquence et déphasent de $\pi/2$ à chaque fréquence. Pour les opérations non-linéaires comme le produit moyen de deux signaux, il faut prendre des précautions particulières.

Par exemple, l'intensité acoustique "active" se définit comme le produit moyen des signaux réels de pression et de vitesse qui s'écrivent en utilisant la notation complexe

$$p(t) = \mathrm{Re}\{p\, e^{j\omega t}\} \text{ et } \mathbf{u}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{u}\, e^{j\omega t}\},$$

avec p et $\mathbf{u}$ les variables complexes, donc

$$\mathbf{I} = \langle p(t)\mathbf{u}(t)\rangle = \langle \mathrm{Re}\{p\, e^{j\omega t}\}\mathrm{Re}\{\mathbf{u}\, e^{j\omega t}\}\rangle .$$

La partie réelle d'un nombre complexe a peut également s'écrire $\mathrm{Re}\{a\} = \frac{1}{2}(a + a^*)$, d'où

$$\mathbf{I} = \frac{1}{4}\langle (p\, e^{j\omega t} + p^* e^{-j\omega t})(\mathbf{u}\, e^{j\omega t} + \mathbf{u}^* e^{-j\omega t})\rangle = \frac{1}{4}\langle p\mathbf{u}\, e^{j2\omega t} + p\mathbf{u}^* + p^*\mathbf{u} + p^*\mathbf{u}^* e^{-j2\omega t}\rangle$$

La signification des crochets une moyenne sur une durée T du signal $\langle a(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{\theta}^{\theta+T} a(t)dt$.

Pour les signaux harmoniques, cette durée correspond à une période. Dans l'expression de l'intensité, les seuls composantes dépendant du temps sont les fonctions exponentielles complexes en $2\omega t$. Intégrées sur une période ces fonctions s'annulent $\langle e^{j2\omega t}\rangle = \langle e^{-j2\omega t}\rangle = 0$, et il reste

$$\mathbf{I} = \frac{1}{4}(p\mathbf{u}^* + p^*\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{p\mathbf{u}^*\}$$

Ainsi le produit moyen de deux signaux réels correspond à une demi-fois la partie réelle du produit conjugué de leurs amplitudes complexes

$$\mathbf{I} = \langle p(t)\mathbf{u}(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{p\mathbf{u}^*\}$$

La valeur quadratique moyenne d'un signal (c'est à dire le carré de sa valeur efficace) se déduit de ce résultat

$$p_{eff}^2 = \langle p^2(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{p\,p^*\} = \frac{1}{2}|p|^2$$

(pour un signal représenté par un vecteur comme la vitesse particulaire, le produit est un produit scalaire).

V - NOTIONS D'ACOUSTIQUE PHYSIOLOGIQUE ET D'ACOUSTIQUE DES SALLES

1. INTRODUCTON A LA PHYSIOACOUSTIQUE

1.1 - Description du système auditif
1.2 - L'aire auditive
1.3 - Fatigue auditive et audiométrie
1.4 - Sonométrie

2. NOTIONS D'ACOUSTIQUE DES SALLES

2.1 - Champ direct et champ réverbéré
2.2 - Transparence acoustique

ANNEXE A : *Courbes de pondération A et C pour sonomètres*

ANNEXE B : *Bandes de fréquence des filtres tiers d'octave*

ANNEXE C : *Echelle des bruits en dB*

1 – INTRODUCTION A LA PHYSIOACOUSTIQUE [1]

1.1 – Description du système auditif

1) Oreille externe (capte les ondes sonores)
2) Oreille moyenne (adaptation d'impédance)
3) Oreille interne (perçoit les sons)

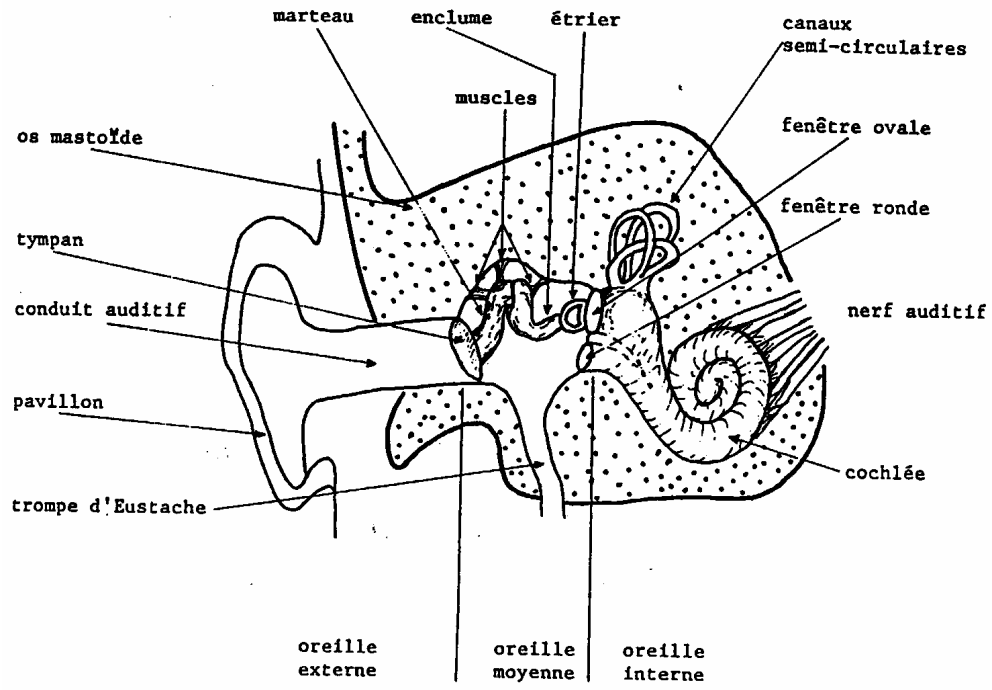


Figure 5.1 – Système auditif

1.1.1 - Oreille externe

Le conduit auditif fait une première partie d'adaptation d'impédance. Sur le tympan la pression est 20 à 30 dB plus forte qu'à l'entrée du pavillon. Ce conduit se termine à l'extérieur par le pavillon (directionnel).

1.1.2 - Oreille moyenne

C'est une cavité remplie d'air séparée de l'extérieur par le tympan et de l'oreille interne par la fenêtre ronde et la fenêtre ovale.

Le tympan :
C'est une membrane qui est maintenue par des muscles. Sa fréquence de résonance se situe vers 1400 Hz, mais elle est très amortie. Au seul de l'audition, son amplitude est extrêmement petite, de l'ordre de 0,1 amstrom à 1000 Hz. Cette amplitude est inversement proportionnelle à la fréquence. Si on excite l'oreille avec deux fréquences f_1 et f_2, on pourra entendre également la somme et la différence de ces fréquences car le tympan est

[1] D'après Eléments d'Acoustique par Michel Bochud, CEGEP La Pocatière, Quebec.

un résonateur légèrement dissymétrique. Les sons très intenses peuvent être entendus avec leurs harmoniques : l'oreille est un système non linéaire.

La trompe d'Eustache
Elle assure l'égalité des pressions sur les deux faces du tympan en faisant communiquer l'oreille moyenne avec le larynx. Ce conduit est normalement fermé pour éviter des interférences de la respiration et de la parole. Il s'ouvre à la déglutition et au bâillement.

Les osselets
La vibration du tympan est transmise à la fenêtre ovale par l'intermédiaire de trois osselets : le marteau, l'enclume et l'étrier. C'est un adaptateur d'impédance en passant de l'air (430 kg/m^2 s) au liquide de l'oreille interne (150 000 kg/m^2 s). L'amplitude du mouvement de l'étrier est assez proche de celle du tympan (la moitié) et la surface de la fenêtre ovale est 30 fois plus petite. On crée ainsi une amplification de la pression de l'ordre de 60, soit environ 35 dB. Une telle amplification correspond à une adaptation d'impédance idéale.

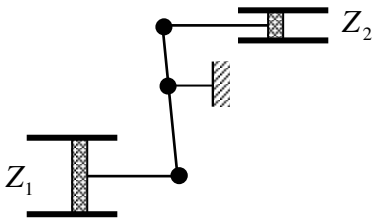


Figure 5.2 – Equivalent mécanique de la chaîne des osselets.

Les muscles
Ils jouent un rôle important de protection. Les muscles de l'étrier et du marteau peuvent se contracter, soit volontairement, soit sous l'action d'un réflexe (sons aigus). Un bruit violent déclenche la décontraction de ces muscles et diminue ainsi la transmission sonore. On comprend le danger des bruits impulsifs qui apparaissent si rapidement que ces muscles n'ont pas le temps d'agir. Leur efficacité diminue dans de doses bruit trop importantes. Le silence détend ces muscles et abaisse le seuil d'audition.

1.1.3 - Oreille interne

Les canaux semi-circulaires sont l'origine de l'équilibre et ne font pas partie du système auditif.

La cochlée
C'est l'organe principal de l'audition. La cochlée ou limaçon est un tube conique de 3 cm de long et enroulé en spirale sur 3,5 tours. Une coupe transversale de la cochlée montre qu'elle est divisée en 3 parties par 2 membranes soit la membrane de Reissner et la membrane basilaire. Ces 3 parties sont:

1) la rampe vestibulaire qui communique avec la fenêtre ovale,
2) le canal cochléaire,
3) la rampe tympanique qui communique avec la fenêtre ronde.

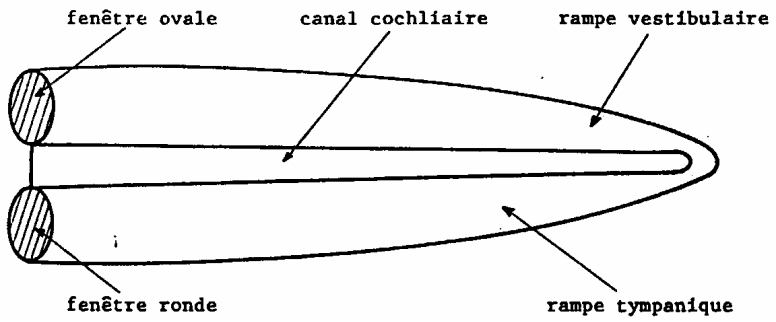


Figure 5.3 – Cochlée

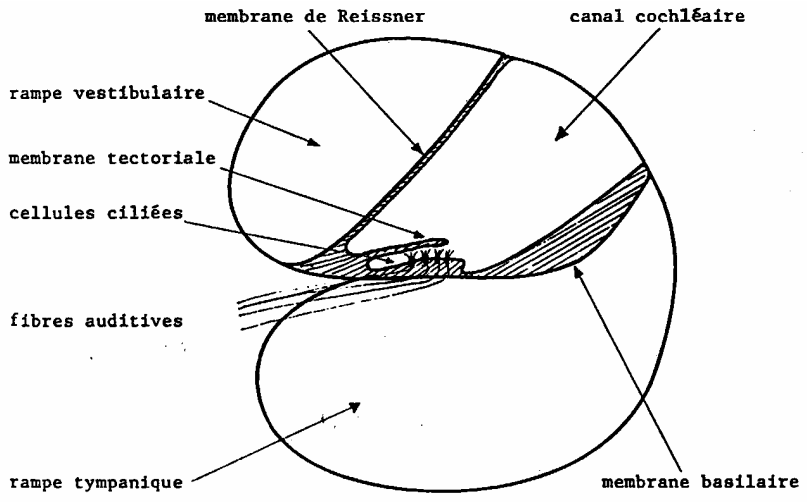
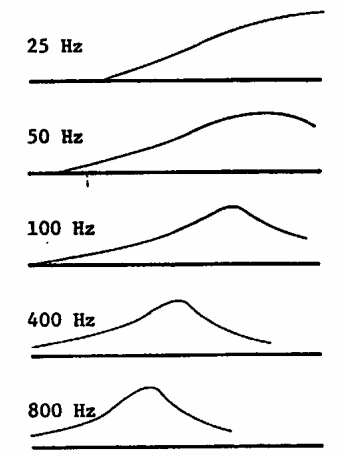


Figure 5.4 – Coupe de la cochlée

La membrane basilaire porte les cellules ciliées qui forment l'organe de Corti et de ces cellules (20.000) partent les fibres nerveuses auditives.

La pression transmise par l'étrier à la fenêtre ovale dans la rampe vestibulaire (*voir Figure 5.1*) est retransmise par la membrane de Reissner au canal cochléaire. De là, elle est retransmise à la rampe tympanique et sort finalement par la fenêtre ronde (soupape).



Il se forme des ondes stationnaires telles que la membrane basilaire vibre avec un maximum dépendant de la fréquence. Plus la fréquence augmente, plus le maximum de vibration se déplace vers l'entrée du limaçon.

On comprend que les lésions de la cochlée soient en relation avec la fréquence des bruits destructeurs (300 Hz à 4000 Hz dans l'industrie)

Le nerf auditif

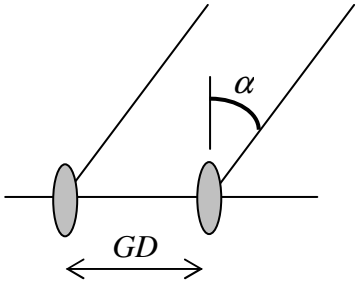
Il comprend 20. 000 fibres de quelques microns. Il y a 2 types de fibres: les fibres afférentes (oreille-cerveau) et les fibres efférentes (cerveau-oreille). Des micro-électrodes ont été placées sur ce nerf et le signal amplifié actionne un haut-parleur en produisant un signal sonore proportionnel à la fréquence, l'intensité et le timbre de la phrase.

Le signal sur le nerf n'est qu'une suite de pics (spikes) (tout ou rien) et c'est la fréquence de ces pics qui varie en fonction de l'intensité du son. L'analyse de tous ce pics (30 000 000 par seconde) se fait dans le cerveau.

Ecoute binaurale

Le fait d'avoir deux oreilles n'augmente que relativement peu notre sensibilité. Cependant, l'écoute binaurale joue un grand rôle dans notre aptitude à localiser une source. Deux mécanismes entrent en jeu:

1) la différence d'intensité des sons perçus peut aider,
2) mais surtout, nous détectons assez bien la différence de phase entre les deux oreilles.



On peut détecter un délai entre les deux oreilles de $(GD \sin\alpha)/c = 3\times10^{-4}$ s, où GD est la distance entre l'oreille droite et gauche, α l'angle d'incidence et c la vitesse du son.

On peut améliorer la directivité en augmentant artificiellement la distance entre les oreilles (tubes terminés par des pavillons artificiels).

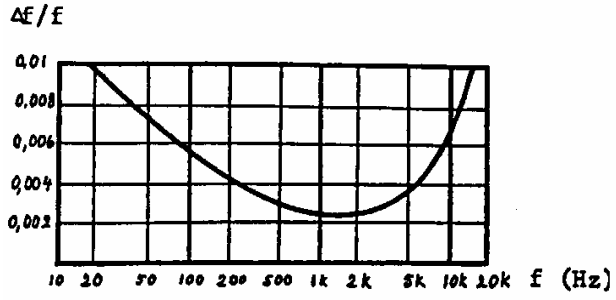
1.2 – L'aire auditive

1.2.1 – La tonie

C'est la hauteur de son perçue. Elle correspond à des fréquences allant de 16 Hz à 20. 000 Hz (début et fin de la perception sonore).

Seuil différentiel de la tonie

C'est notre aptitude à différencier des sons de fréquences proches ($\Delta f / f$). Il est remarquable que cette aptitude soit optimale dans la région de 500 à 2000 Hz qui correspond aux fréquences de la parole. On peut ainsi discerner 2000 sons distincts.



(Par battement on peut aller beaucoup plus loin que le seuil différentiel de la tonie). Pour que la hauteur du son soit perçue il faut un minimum de temps, soit de 1/40 è 1/100 de seconde dépendant de la fréquence.

Figure 5.4 - Seuil différentiel de la tonie

1.2.2 – La sonie

Comme la tonie, la **sonie** est une grandeur subjective. On cherche cependant à normaliser des mesures qui correspondent le mieux possible à la gêne et on obtient par ces mesures, des grandeurs objectives.

L'aire auditive
C'est la région de fonctionnement normal de l'oreille qui est délimitée par deux seuils:

1) Le **seuil d'audition** qui est le minimum d'intensité perçue en fonction de la fréquence (0 dB à 1000 Hz)
2) Le seuil de la douleur qui est le maximum d'intensité perçue en fonction de la fréquence ($\cong 130$ dB).

Seuil différentiel de la sonie
C'est notre aptitude à différencier des sons d'intensité différence. Il est tel que $\Delta W / W \approx cte$ où W est l'intensité du son. La sensibilité de l'oreille suit donc environ une courbe logarithmique par rapport à l'excitation (d'où l'utilisation du décibel). Si l'on considère que 1 dB correspond environ à ce seuil, alors on peut distinguer 130 sons d'intensités différentes et 26. 000 sons d'intensités et fréquences différentes.

Courbe isosonique : le phone
Une ligne isosonique est l'ensemble des sons purs qui produisent la même sensation d'intensité. On fait varier la fréquence en gardant la même sensation sonique. L'organisation internationale des standards (ISO) a normalisé ces courbes. "Lignes isosoniques normales pour des sons purs écoutés en champ libre" (Recommandation ISO R 226).

Le phone qui est sans dimension caractérise une courbe isosonique et correspond à la valeur du niveau d'intensité en dB à 1000 Hz. On obtient ainsi une échelle en phone égale à la mesure physique pour 1000 Hz. Les lignes isosoniques sont déterminées statistiquement à l'aide d'un grand nombre d'auditeurs.

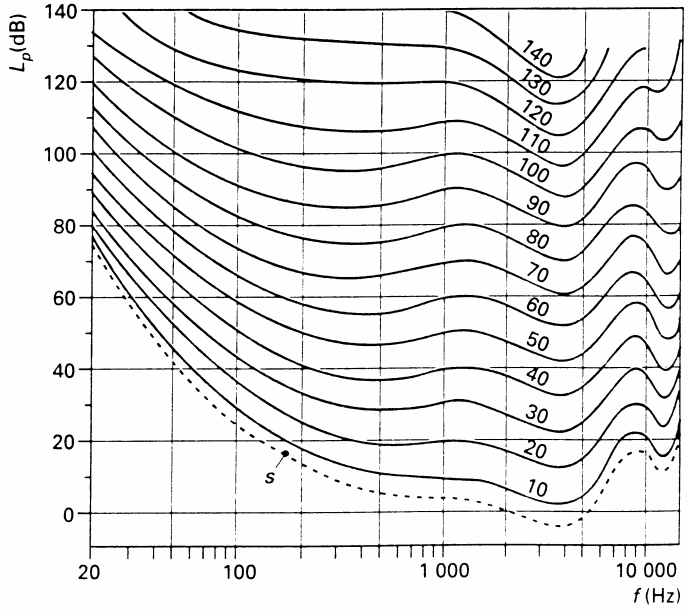


Figure 5.5 - Courbes d'égale sensation de l'oreille (Courbes d'isononie) : Chaque courbe correspond à une valeur en phone *qui équivaut à 1000 Hz à la même valeur en dB (*`s` *correspond au seuil de l'audition).*

Décibel en pondération A

L'oreille humaine, qui va percevoir, apprécier ou détecter un bruit, n'a pas la même sensibilité quelle que soit la fréquence. En particulier, elle entend moins bien les fréquences graves que les fréquences aiguës.

Puisqu'il est très difficile de construire un appareil ayant une sensibilité correspondante aux lignes isosoniques, on a normalisé des courbes de filtrage reproduisant en gros les courbes isosoniques passant par 40, 70, et 100 dB à 1000 Hz (Pondération A, B et C). Par exemple la courbe A (la plus utilisée) correspond à une atténuation équivalente à la courbe à 40 sones.

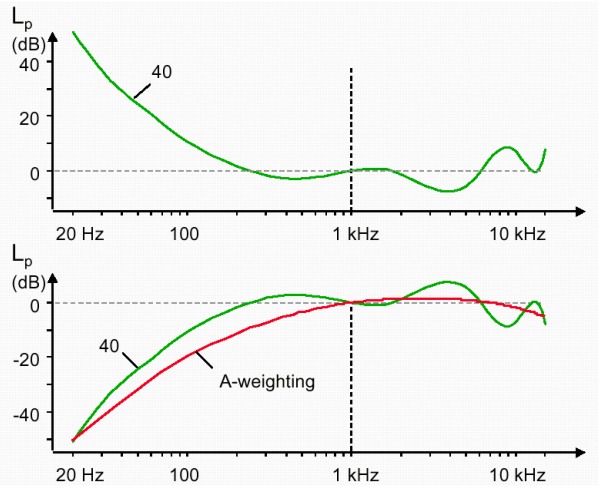
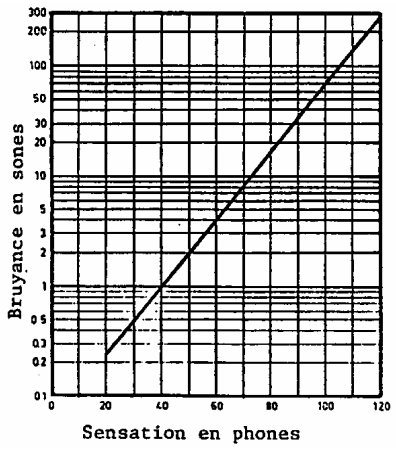


Figure 5.6 – Filtre de pondération A construit à partir de la courbe d'iso-sonie à 40 phones.

Les valeurs normalisées de l'atténuation introduite par la pondération A sont données dans le tableau 1 pour les filtres d'octave et en Annexe A pour les filtres de 1/3-octave.

Tableau 1 – atténuation définissant la pondération A. Chaque valeur de fréquence désigne un filtre d'octave.

F (Hz)	125	250	500	1000	2000	4000
Atténuation (dB)	-16	-9	-3	0	+1	+1



Le sone

C'est une échelle linéaire qui est telle que les sensations s'additionnent. Si un son donne une sensation de n_1 sones et un autre une sensation de n_2 sones, la sensation des deux ensemble sera de $(n_1 + n_2)$ sones. C'est une échelle de bruyance. Le sone est relié au phone par la relation:

$$Sones = 2^{(Phones\ -\ 40)/10}$$

Figure 5.7 - Equivalence phones-sones tracée à 1000 Hz

1.2.3 – Effet de masque

On fait entendre deux sons différents dont l'un est plus fort que l'autre. Le son plus faible est masqué devant l'autre.

En général un son masque facilement ceux dont la fréquence est supérieure. Des sons très bas peuvent être très masquants (par exemple à 10 Hz). Cela est important en insonorisation. On fait disparaître une source de bruit (masquante) et c'est d'autres composantes différentes qui apparaissent ne faisant que déplacer la gêne. Cet effet est d'autant plus fort que la fréquence masquée est proche des la fréquence masquante.

Les indice de sonie de Stevens ou de Zwicker[1] prennent en compte l'effet de masque pour l'évaluation de la gêne d'un son complexe.

1.3 – Fatigue auditive et audiométrie

Après cessation d'un son pur, il y a une perte de sensibilité à cette fréquence qui dure un temps dépendant de l'amplitude et de la durée de ce son. Cette perte de sensibilité recouvre toutes les fréquences si le son est suffisamment fort et s'il dure longtemps. Il faut plus d'une journée pour récupérer si l'on est exposé à un son de 110 dB pendant 15 min (bruit blanc).

Si le bruit est trop fort il n'y a jamais récupération totale. Au delà du seuil de danger il y a une perte auditive permanente. Dans les courbes d'évaluation du bruit (Figure 5.8) on voit les zones de danger, de non danger et intermédiaire.

On distingue en général deux cas importants selon que l'on s'intéresse à la gêne produite par le bruit et donc à la réaction des collectivités (norme ISO R 1996) ou au risque de perte d'audition (norme ISO R 1999).

1.3.1 - Courbe d'évaluation du bruit NR

Cet indice est lié au risque de perte d'audition. Il s'obtient de la façon suivante : une analyse du bruit au poste de travail d'un opérateur est faite par bandes d'octave de 31 Hz à 8000 Hz. Le spectre est reproduit sur le réseau de courbes d'évaluation du bruit et l'indice NR correspond à la courbe NR la plus élevée qui touche un point du spectre. On rajoute enfin une correction de +5 à la valeur ainsi trouvée si le bruit comporte des impulsions. Dans l'exemple de la Figure 5.8, le résultat est NR 85.

Les zones de danger sont définies pour une exposition pendant une durée de 8 h par jour.

1.3.2 - Exposition à des bruits de niveaux variables

L'évaluation du bruit n'est pas simple si le niveau du bruit fluctue constamment. (L'employé peut se déplacer ce qui revient au même). On est donc amené à rechercher une loi qui donne le niveau équivalent continu correspondant au niveau fluctuant. Ce niveau

[1] E. Zwicker, H. Fastl, *Psychoacoustics* (2nd ed.), Springer-Verlag, 1999.

'L_{eq}' peut être utilisé pour une journée normale de travail de 8 h. On peut également utiliser une notion dérivée: la dose de bruit hebdomadaire.

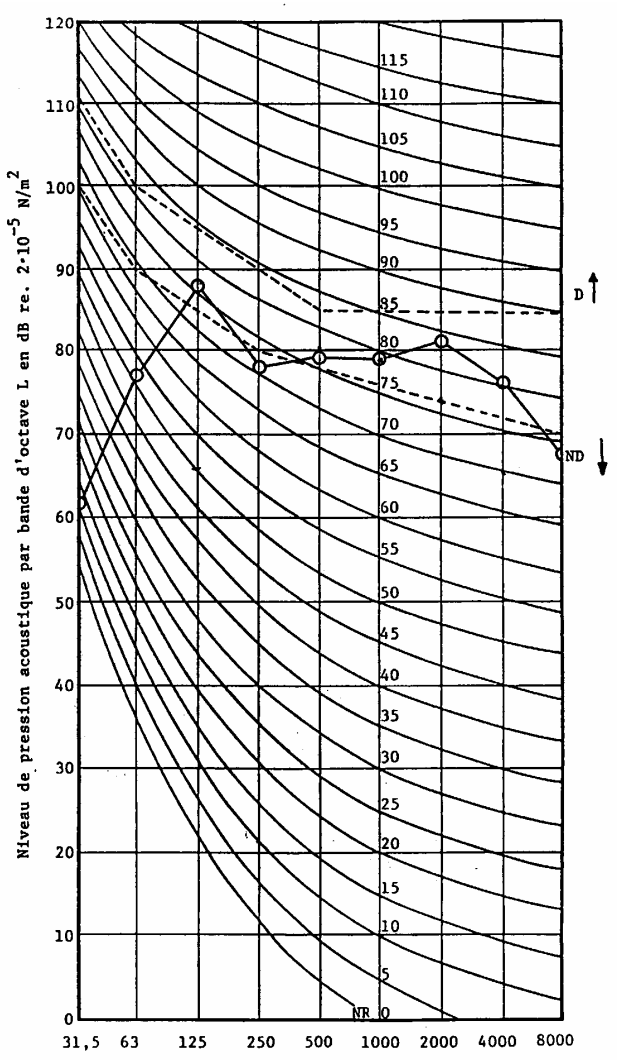


Figure 5.8 - Courbes NR d'évaluation du bruit

1.3.3 - Audiométrie

Elle permet l'étude de l'audition des individus.

Il existe des techniques objectives qui donnent un résultat indépendant de la participation du sujet (par exemple en utilisant des micro-électrodes dans l'oreille moyenne). Les méthodes subjectives plus simples, demandent la participation active du sujet.

La méthode la plus courante consiste à mesure le seuil d'audition pour des sons purs (en général de 500 à 8000 Hz).

Cette mesure peut être faite soit en conduction aérienne soit en conduction osseuse. La courbe "conduction osseuse" nous donne l'état de l'appareil auditif à l'exception des oreilles externe et moyenne. Par conséquence, la différence entre les courbes "conduction osseuse" et "conduction aérienne" nous donne l'état de l'oreille externe et moyenne (transmission).

On peut donc déceler des troubles soit de transmission, soit de perception (ou les deux).

Les **pertes d'audition** peuvent être dues à l'age mais également à une exposition excessive au bruit. Elles apparaissent en priorité dans la gamme 4000 à 6000 Hz. Une exposition à un fort niveau sonore peut produire une perte de sensibilité auditive temporaire. Ce problème est assimilé à de la fatigue auditive et se manifeste par une sensation de bourdonnement dans l'oreille après que l'exposition au bruit ait cessé. Si le bruit est trop intense ou l'exposition répétée, la sensibilité n'est pas totalement récupérée.

La gamme la plus importante pour la compréhension de la parole se situe entre 500 et 2000 Hz.

Pour une bonne protection contre les risques de perte auditive, il est important d'établir un modèle qui relie les paramètres physiques de l'exposition au bruit et les dommages liées au bruit. Ce modèle est extrêmement difficile à établir car il dépend de très nombreux paramètres. La norme ISO 1999 ne contient qu'une petite quantité d'information en relation avec ce modèle.

Suite à une exposition au bruit on note une élévation du seuil d'autant plus forte que l'intensité et le temps d'exposition sont forts. La récupération peut être dans certains cas très longue. (Plus de 2 jours pour une exposition d'un son de 2000 Hz à 130 dB pendant 2 min.).

L'ISO définit la **perte d'acuité auditive** par la moyenne des mesures en dB pour 500, 1000 et 2000 Hz. On considère que l'audition est nettement altérée si cette moyenne dépasse 25 dB. Notons qu'en général cette perte s'accentue dans les fréquences supérieures. On peut remarquer qu'il y a une perte normale d'acuité en fonction de l'âge.

1.4 – Sonométrie[2]

On chercher à modifier la réponse en fréquence d'un appareil pour qu'il s'approche le plus possible du niveau subjectif.

1.4.1 - Décibel

La large étendue dynamique des sons et la loi logarithmique de la sensation auditive conduit à utiliser une échelle logarithmique pour la mesure : le **décibel**

Niveau d'intensité acoustique (*logarithme base 10*)

$$L_{\mathrm{I}} = 10 \log \frac{I}{I_{\mathrm{ref}}} \quad [\mathrm{dB}]$$

I intensité acoustique en $\mathrm{W/m^2}$

$I_{\mathrm{ref}} = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2} = 1\ \mathrm{pW/m^2}$: **intensité de référence**

Niveau de pression acoustique

[2] P.V. Brüel, J. Pope, H.K. Zaveri, *Encyclopedia of Acoustics (M.J. Crocker, éditeur)*, Wiley, 1998.
C. Azaïs, J-P. Guilhot, P. Josserand, M. Wild, Acoustique industrielle, *Techniques de l'Ingénieur*, 1995.
Brüel & Kjaer Technical Documentation, 1999.

$$L_p = 10 \log \frac{p_{eff}^2}{p_{ref}^2} = 20 \log \frac{p_{eff}}{p_{ref}} \quad [\text{dB}]$$

p_{eff} pression acoustique efficace en Pa

$p_{ref} = 2\,10^{-12}$ Pa $= 20$ µPa : **pression de référence**

Remarques importantes

1) Le décibel se définit toujours comme un **rapport d'énergie** : ainsi pour la pression, le rapport des pressions quadratiques est employé.

2) La pression de référence dépend donc de l'impédance caractéristique du milieu

$$I_{ref} = \frac{p_{ref}^2}{(\rho_0 c)_{ref}}$$

$(\rho_0 c)_{ref} = 400$ kg m^{-2} s^{-1} : impédance de référence pour l'air

3) La relation entre niveau d'intensité acoustique et niveau de pression, pour une onde plane où $I = p_{eff}^2 / \rho_0 c$, dépend de l'impédance caractéristique effective (donc de la température ambiante et de la pression atmosphérique)

$$L_I = 10 \log \frac{I}{I_{ref}} = 10 \log \frac{p_{eff}^2}{\rho_0 c\, I_{ref}} = 10 \log \frac{p_{eff}^2}{p_{ref}^2} + 10 \log \frac{p_{ref}^2}{\rho_0 c\, I_{ref}}$$

$$L_I = L_p - 10 \log \frac{\rho_0 c}{400}$$

Si $\theta = 22$ °C et $P_0 = 1013\ 10^5$ Pa, alors $\rho_0 c \cong 412$ kg m^{-2} s^{-1} et $10 \log(\rho_0 c / 400) = 0{,}13$ dB. En pratique, cette différence est négligée.

1.4.2 - Filtres de pondération

L'oreille humaine, qui va percevoir, apprécier ou détecter un bruit, n'a pas la même sensibilité quelle que soit la fréquence. En particulier, elle entend moins bien les fréquences graves que les fréquences aiguës.

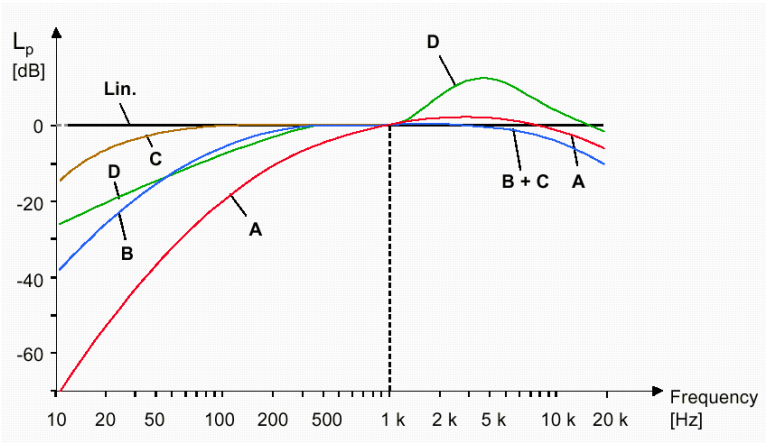


Figure 5.9 - Courbes de pondération A, B, C, D et Lin

Les courbes de filtrage reproduisant en gros les courbes isosoniques passant par 40, 70, et 100 dB à 1000 Hz (Pondération A, B et C) on été normalisées. Une courbe "D" a été rajoutée en particulier pour la mesure de la nuisance des avions.

1.4.3 - Filtres utilisés en sonomètrie

On utilise en acoustique des filtres passe-bande à largeur de bande relative constante. Les bandes passantes de différents filtres sont juxtaposées pour couvrir sans trous l'ensemble du spectre audible.

Chaque filtre est caractérisé par les valeurs extrêmes de sa bande passante f_2 et f_1 et une valeur correspondant à la fréquence centrale f_c qui le désigne.

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \text{Constante}$$

$\Delta f = f_2 - f_1$ largeur de bande du filtre

f_c fréquence centrale du filtre

$$f_c = \sqrt{f_1 f_2}$$

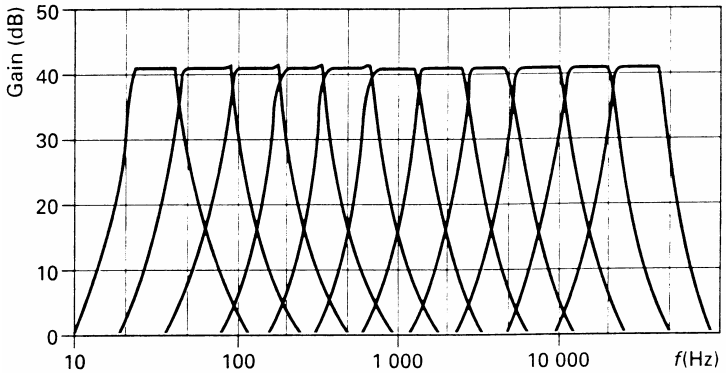


Figure 5.10 - Filtres passe-bande d'une octave utilisés en sonomètrie selon IEC 255-1966, DIN 45651-45652 et ANSI S1-11-1966

Filtres utilisés en acoustique : filtres d'**octave** et de **tiers d'octave**

Filtres de bandes d'octave

$$f_2 = 2f_1 \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{f_c}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 f_c$$

$$f_2 = \sqrt{2} f_c \approx 1{,}414 f_c$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{f_2 - f_1}{f_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \quad (71\%)$$

Filtres de bandes de tiers d'octave

$$f_2 = \sqrt[3]{2}\, f_1 \quad (= 1{,}26 f_1) \qquad \Rightarrow \qquad f_1 = \frac{f_c}{\sqrt[6]{2}} \approx 0{,}891 f_c$$

$$f_2 = \sqrt[6]{2}\, f_c \approx 1{,}122 f_c$$

$$\frac{\Delta f}{f_c} = \frac{f_2 - f_1}{f_c} = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[6]{2}} = 0{,}232 \quad (23\%)$$

Remarque : La bande de référence est centrée sur 1000 Hz. Les fréquences centrales de tiers d'octave se calculeraient en théorie par:

$$f_m = 1000\, 2^{m/3} \qquad m \text{ entier}$$

mais la norme ISO 266 précise que l'on doit utiliser la formule approximative

$$f_n = 10^{n/10} \qquad n \text{ entier positif}$$

De toutes façons, ces valeurs sont arrondies pour fournir les valeurs nominales de l'Annexe B. La norme NF S31-009 sur les sonomètres donne un tableau comparatif avec les valeurs exactes et nominales : elles sont très proches.

Les valeurs des fréquences centrales nominales et des fréquences de coupure sont données en Annexe B

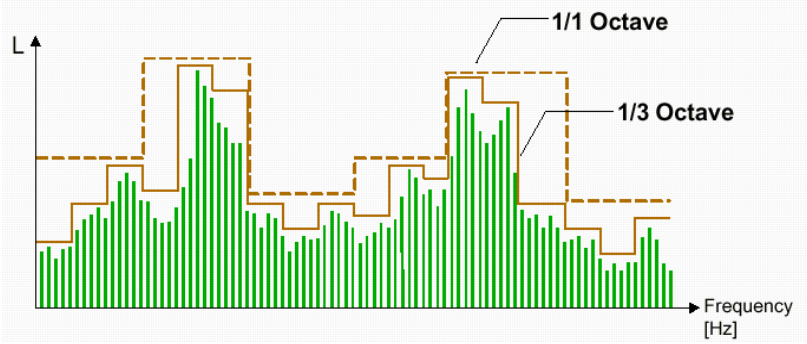


Figure 5.10 – Spectre par bandes d'octave, de tiers d'octave et de 1/15 d'octave (raies vertes).

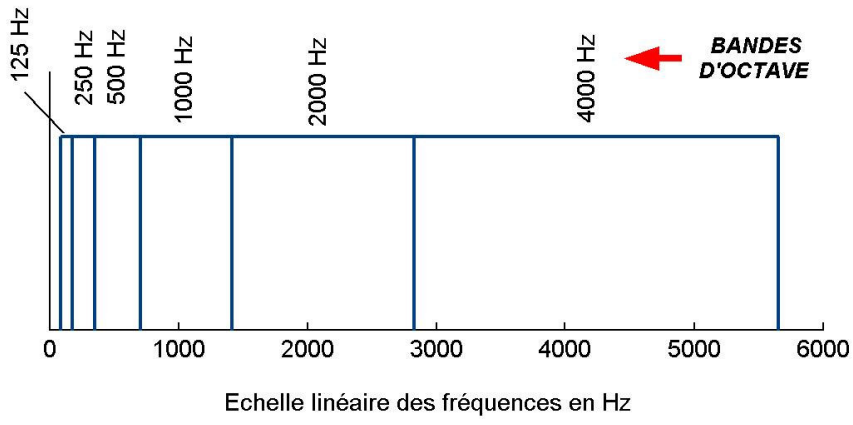


Figure 5.11 – Représentation des bandes d'octave sur une échelle linéaire de fréquences.

Bruit blanc et bruit rose

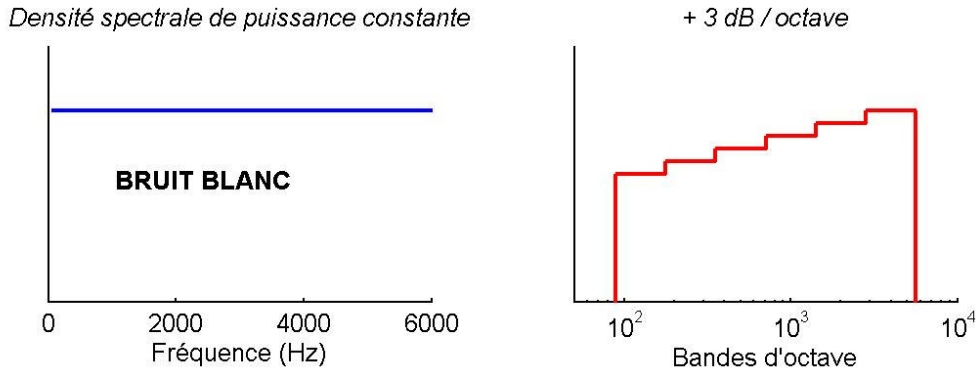


Figure 5.12 – Représentation du bruit blanc en bande de fréquence à Δf constant et à $\Delta f / f$ constant (bandes d'octave).

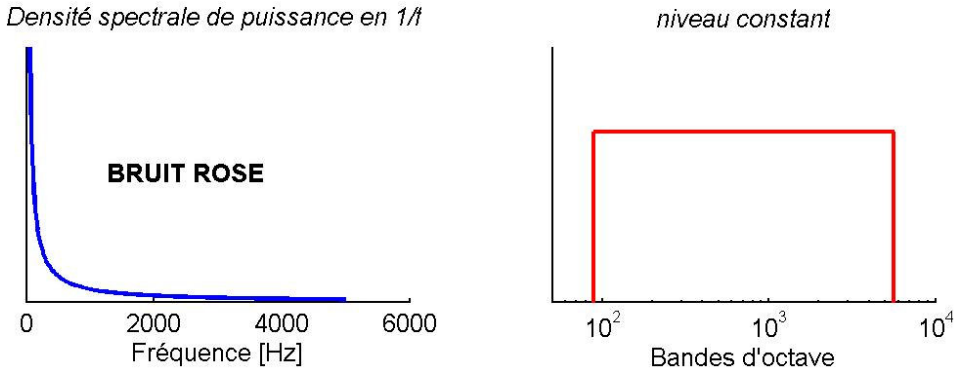


Figure 5.13 – Représentation du bruit rose en bande de fréquence à Δf constant et à $\Delta f / f$ constant (bandes d'octave).

Le **bruit blanc** a une densité spectrale de puissance constante en fonction de la fréquence. Comme les bandes d'octave double de largeur quand leur fréquence centrale double, la puissance dans chaque bande augmente de 3 dB

Pour avoir une puissance constante dans chaque bande de tiers d'octave, les acousticiens ont inventé le **bruit rose**. Sa densité spectrale de puissance est proportionnelle à $1/f$.

Bande spectrale à $\Delta f = \text{Cte}$ (spectre bande fine obtenu par FFT)

- la densité de puissance spectrale du **bruit blanc** est constante
- le densité de puissance spectrale du **bruit rose** décroît en $1/f$

Bande spectrale à $\Delta f / f = \text{Cte}$ (filtres d'octave ou de tiers d'octave)

- la puissance du **bruit blanc** croît de 3 dB par octave
- la puissance du **bruit rose** est constante

1.5 – Qualité acoustique et psychoacoustique

Le dBA n'est pas toujours suffisant pour quantifier la gêne occasionnée par un bruit. Ce moyen d'évaluation prend peu en compte la perception subjective de ce bruit par l'homme (seulement en affaiblissant les fréquences graves peu perçues par l'oreille). Des indicateurs basés sur la **psychoacoustique** sont de plus en plus utilisés**.** Ces principaux paramètres qui ont été définis afin de mieux rendre compte la part subjective du jugement de la **qualité sonore** d'un bruit par l'être humain sont décrits dans le tableau ci-dessous.

paramètre	description
Sonie *Loudness*	Intensité sonore réellement perçue par l'oreille humaine
Acuité *Sharpness*	Indique l'équilibre spectral entre les fréquences basses et les hautes fréquences
Rugosité *Roughness*	La rugosité est liée à la modulation d'amplitude des sons
Amplitude des fluctuations *Fluctuation strength*	Comme la rugosité ce paramètre est lié à la modulation d'amplitude des sons pour des fréquences de modulation différentes
Sensation de hauteur tonale *Pitch strend*	Permet de traduire l'importance de hauteur (fréquence) dans un signal complexe

2 – APPLICATIONS DE L'ACOUSTIQUE DES SALLES

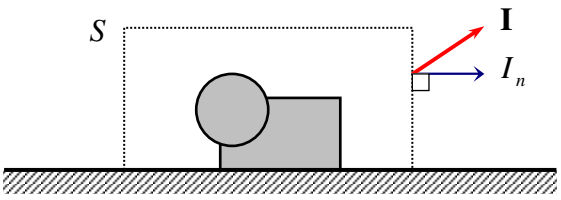
2.1 – Champ direct et champ réverbéré

2.1.1 - Puissance acoustique d'une source

La puissance acoustique W d'une source est le flux total de puissance qui traverse une surface (de mesure) S qui l'enferme complètement. La densité (par unité de surface) de ce flux est la composante normale I_n du vecteur **intensité acoustique** $\vec{I}$ (en W/m^2). Ainsi

$$W = \overline{I_n}\, S \qquad [\mathrm{W}]$$

où $\overline{I_n}$ est la valeur moyenne sur toute la surface de mesure S de la composante normale du vecteur intensité acoustique. Souvent la source (une machine) est posée sur un sol rigide et la surface S est celle de l'enveloppe de mesure qui se ferme sur le sol (les ondes sont supposées être totalement réfléchies par le sol).



La composante normale I_n peut être mesurée à l'aide d'un intensimètre à deux microphones sur N points répartis sur la surface de mesure S

$$\overline{I_n} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(I_n)_i \qquad [\mathrm{W/m^2}]$$

Cette méthode de détermination de la puissance acoustique est codifiée par la norme ISO 9614. En prenant un certain nombre de précautions (distance suffisante de la source, environnement peu réfléchissant, absence d'autres sources de bruit), il est possible de considérer que

$$I_n \approx \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c}$$

avec $\langle p^2 \rangle$ la pression quadratique (pression acoustique efficace au carré : $\langle p^2 \rangle = p_{eff}^2$) et $\rho_0 c$ l'impédance caractéristique de l'air. C'est cette approximation qui est employée dans les normes ISO 3744 à 3746.

2.1.2 - Relations entre pression et puissance acoustiques d'une source

Dans le cas d'une source monopolaire (c'est à dire avec un rayonnement omnidirectionnel) qui est placée en champ libre, il existe une relation entre la puissance acoustique et la pression quadratique du champ direct qui décroît avec le carré de la distance d

champ libre $$\frac{\langle p_D^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{W}{4\pi d^2}$$

Si la source est posée sur un sol rigide, elle rayonne seulement dans un demi-espace (dans un angle solide de 2π au lieu de 4π pour le cas précédent), donc

posée sur un sol rigide $$\frac{\langle p_D^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{W}{2\pi d^2} = \frac{WQ}{4\pi d^2} \qquad \text{avec} \quad Q = 2$$

Cette relation se généralise :

$$\boxed{\frac{\langle p_D^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{WQ}{4\pi d^2}}$$

position de la source	rayonnement	angle solide	**Q**
champ libre	espace complet	4π	1
posée sur le sol	demi-espace	2π	2
posée à l'intersection du sol et d'un mur	quart d'espace	π	4
posée dans un coin (intersection du sol et de deux murs)	huitième d'espace	$\frac{\pi}{2}$	8

2.1.3 – Champ réverbéré

Un **champ acoustique diffus** peut se représenter comme une superposition d'ondes planes qui arrivent en un point avec toutes les incidences.

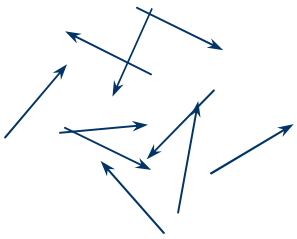




Figure – Direction des ondes planes dans un champ diffus et salle réverbérante

Dans le **champ diffus** produit par les réflexions multiples des ondes sur les parois d'une salle, le modèle de l'acoustique des salles fournit une autre relation entre la pression quadratique moyenne du champ réverbéré $\langle p_R^2 \rangle / \rho_0 c$ et la puissance acoustique W de la source qui le produit :

$$\boxed{\frac{\langle p_R^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{4W}{R}}$$

avec R la **constante de salle** $R = \dfrac{\overline{\alpha}\, S_p}{1-\overline{\alpha}}$

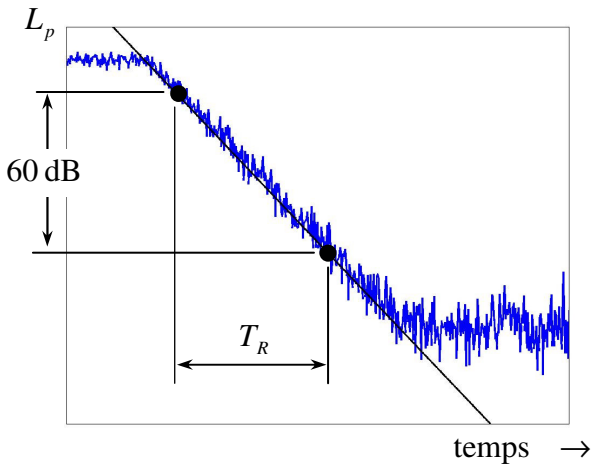
$\overline{\alpha}$ est le **coefficient d'absorption moyen** des parois qui se calcule par $\overline{\alpha} = \dfrac{\sum_i \alpha_i S_i}{S_p}$ où α_i est le coefficient d'absorption de chaque surface élémentaire S_i. $S_p = \sum_i S_i$ est la surface totale (murs, plancher, plafond). On désigne souvent par

$$A = \overline{\alpha} S_p$$

l'aire d'absorption totale de la salle. Pour une salle de volume V, l'aire d'absorption A est liée au temps de réverbération T_R par la **formule de Sabine**

$$T = \frac{24}{c\,(\log e)}\frac{V}{A} \quad \text{soit} \quad \boxed{T_R = \frac{0{,}16\,V}{A}} \quad [\text{s}]$$

Le temps de réverbération T_R est le temps mis pour que le niveau de pression du champ diffus diminue de 60 dB après que l'émission de la source a cessé brusquement.



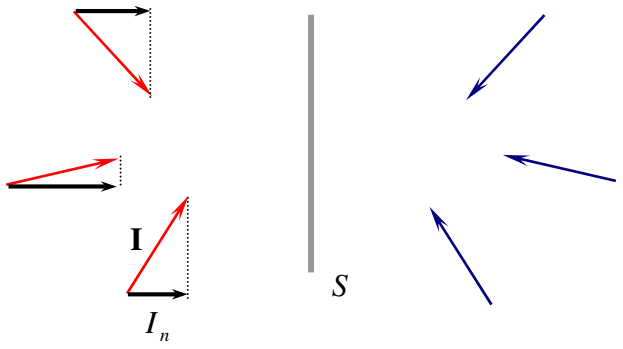
Quand une source est placée dans une salle, le champ acoustique est la somme d'un champ direct et d'un champ réverbéré. Ainsi la pression quadratique totale mesurée à une distance d de la source est

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{\langle p_D^2 \rangle}{\rho_0 c} + \frac{\langle p_R^2 \rangle}{\rho_0 c} = W\left[\frac{Q}{4\pi d^2} + \frac{4}{R}\right]$$

Un champ acoustique diffus possède une intensité acoustique résultante nulle. Cependant, il est possible d'exprimer le flux du *champ diffus incident sur une paroi* : l'intensité

normale à cette paroi qui la traverse dans un sens est le **quart** de la pression quadratique du champ diffus

$$I_n = \frac{1}{4}\frac{\langle p_R^2 \rangle}{\rho_0 c}$$



Intensité du champ diffus incident sur une paroi (rouge) et sa composante normale

Expressions en dB

le niveau de puissance acoustique $L_W = 10 \log \frac{W}{W_0}$ [dB] avec $W_0 = 10^{-12}$ W

le niveau d'intensité acoustique $L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}$ [dB] avec $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

le niveau de pression acoustique $L_p = 10 \log \frac{\langle p^2 \rangle / \rho_0 c}{I_0} = 20 \log \frac{p_{eff}}{p_0}$ [dB]

avec $p_0 = 2 \times 10^{-5}$ Pa

Les formules précédentes peuvent s'exprimer en décibels :

le niveau de puissance acoustique en fonction du niveau moyen d'intensité sur une surface de mesure S

$$L_W = L_{\bar{I}} + 10 \log S$$

le niveau de pression dans un local à une distance d d'une source

$$L_p = L_W + 10 \log \left[\frac{Q}{4\pi d^2} + \frac{4}{R} \right]$$

2.2 – Transparence acoustique

2.2.1 - Définitions

Le **facteur de perte de transmission** d'une paroi se définit par le rapport

$$\tau = \frac{W_{\text{tran}}}{W_{\text{inc}}} \qquad \begin{array}{ll} W_{\text{tran}} & \text{puissance transmise par la paroi de surface } S_p \\ W_{\text{inc}} & \text{puissance des ondes incidentes sur la paroi} \end{array}$$

Il est d'usage de l'exprimer en dB sous la forme de l'**indice d'affaiblissement** acoustique :

$$R = 10 \log \frac{1}{\tau} = L_{W_{\text{inc}}} - L_{W_{\text{tran}}}$$

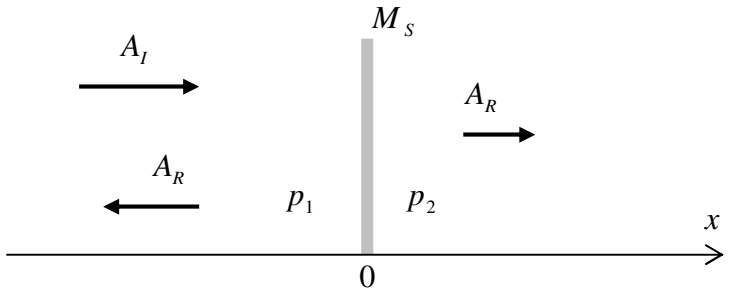
$$\begin{array}{ll} L_{W_{\text{inc}}} = 10 \log \left[W_{\text{inc}} / 10^{-12} \right] & \text{niveau de puissance incidente} \\ L_{W_{\text{tran}}} = 10 \log \left[W_{\text{tran}} / 10^{-12} \right] & \text{niveau de puissance transmise} \end{array}$$

Le facteur de perte de transmission **moyen** d'une paroi composée de **plusieurs éléments** de surface S_i et de facteur de perte individuel τ_i se calcule par

$$\tau = \frac{\sum_i \tau_i \, S_i}{\sum_i S_i}$$

2.2.2 - Indice d'affaiblissement en incidence normale d'une paroi (loi de masse)

Nous considérons tout d'abord la transmission du son à travers une paroi simple dont les effets d'inertie sont seuls pris en compte. La paroi est supposée infinie.



Pression acoustique et vitesse particulaire dans l'espace semi-infini $x < 0$

$$p_1(x) = A_I \, e^{-jkx} + A_R \, e^{jkx}, \qquad u_1(x) = \frac{A_I}{\rho_0 c} e^{-jkx} - \frac{A_R}{\rho_0 c} e^{jkx},$$

Pression acoustique et vitesse particulaire dans l'espace semi-infini $x > 0$

$$p_2(x) = A_T \, e^{-jkx}, \qquad u_2(x) = \frac{A_T}{\rho_0 c} e^{-jkx},$$

Equation dynamique de la paroi de masse surfacique M_S en ne considérant que les effets d'inertie

$$M_S \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta p$$

v : vitesse vibratoire de la paroi
Δp : force par unité de surface appliquée à la paroi $\Delta p = p_1(0^-) - p_2(0^+)$

En variable complexe, l'équation dynamique est

$$p_1(0^-) - p_2(0^+) = j\omega v M_S$$

La détermination de l'indice d'affaiblissement acoustique est basée sur le principe de **continuité des vitesses** au niveau de la paroi

$$\boxed{u_1(0^-) = v = u_2(0^+)}$$

Le **facteur de transmission** de l'onde que s'exprime comme le rapport de la puissance acoustique transmise et de la puissance acoustique de l'onde plane incidente peut aussi s'écrire sous la forme

$$\tau = \frac{W_{trans}}{W_{inc}} = \frac{|A_T|^2}{|A_I|^2}$$

et l'indice d'affaiblissement

$$R = 10\log\frac{1}{\tau} = 10\log\frac{|A_I|^2}{|A_T|^2}$$

Nous cherchons donc à obtenir à l'aide des équations dynamique et de continuité une expression de l'amplitude de l'onde transmise A_T en fonction de l'amplitude de l'onde incidente A_I. L'équation dynamique s'écrit

$$A_I + A_R - A_T = j\omega v M_S$$

La relation de continuité conduit à deux équations

$$u_1(0^-) = u_2(0^+) \quad \Rightarrow \quad A_I - A_R = A_T$$
$$v = u_2(0^+) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{A_T}{\rho_0 c}$$

En utilisant l'expression de A_R et de la vitesse vibratoire de la paroi dans l'équation dynamique

$$A_T = \frac{2\rho_0 c}{2\rho_0 c + j\omega M_S} A_I$$

et le facteur de transmission

$$\tau = \frac{W_{trans}}{W_{inc}} = \frac{|A_T|^2}{|A_I|^2} = \frac{4(\rho_0 c)^2}{4(\rho_0 c)^2 + (\omega M_S)^2}$$

L'indice d'affaiblissement de la paroi est

$$R = 10\log\frac{1}{\tau} = 10\log\left[1+\frac{\omega^2 M_S^2}{4(\rho_0 c)^2}\right]$$

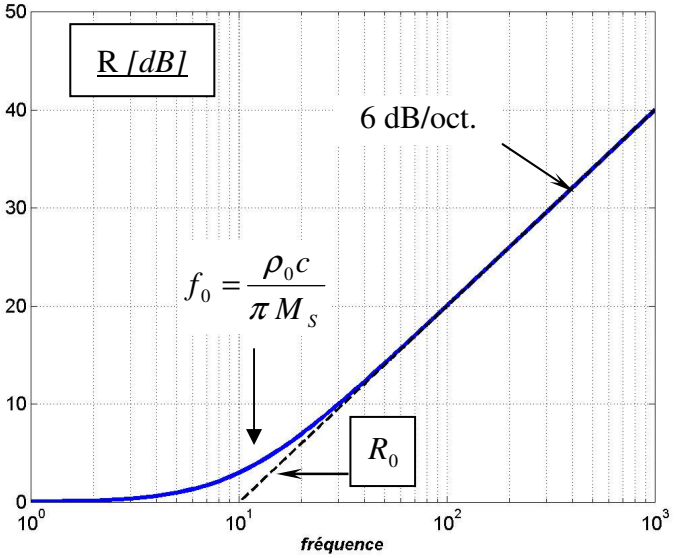


Figure 5.11 – Indice d'affaiblissement d'une paroi simple en incidence normale

Dans la majorité des cas usuels (masse surfacique, gamme de fréquence), il est possible de considérer que le second terme et bien plus grand que 1 : $\omega M_S >> 2\rho_0 c$

$$R_0 \approx 20\log\left[\frac{\omega M_S}{2\rho_0 c}\right]$$

Cette approximation est connue sous le nom de **loi de masse** car seuls les effets d'inertie sont pris en compte (les effets élastiques de la plaque sont négligés). Malgré sa simplicité, elle fournit une bonne estimation du comportement des parois infinies et même finies.

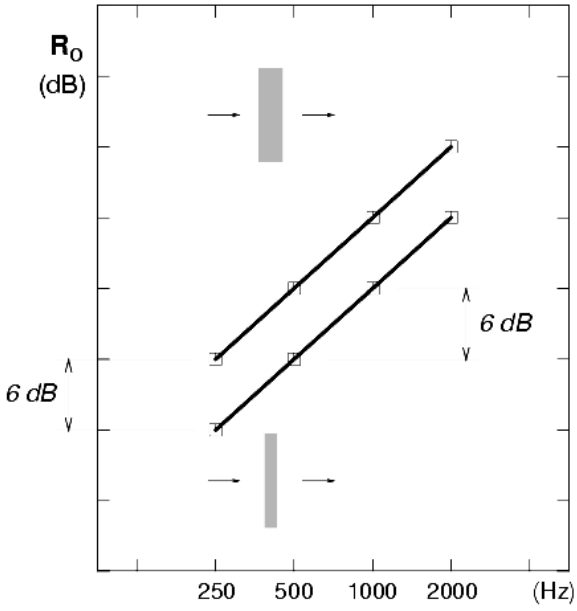


Figure 5.12 - Indice d'affaiblissement d'une paroi infinie sous incidence normale selon la loi de masse.

La figure montre que l'atténuation augmente de **6 dB avec le doublement de la masse** par unité de surface, mais également de **6 dB chaque fois que la fréquence est doublée** (6 dB/octave). Il sera donc difficile d'empêcher la transmission des basses fréquences.

2.2.3 – Incidence oblique et coïncidence

La loi de masse a été établie pour une incidence normale en considérant un front d'onde parallèle à la paroi infinie. La pression a partout la même phase sur la paroi qui vibre donc comme un piston plan infini. Quand la direction de propagation de l'onde présente un angle θ par rapport à la normale de la paroi, la pression sur la paroi présente une périodicité spatiale. Cette périodicité se retrouve dans la vitesse particulaire normale qui, par le principe de continuité des vitesses, impose le mouvement de la paroi : on parle alors de **vibration en mode forcé**.

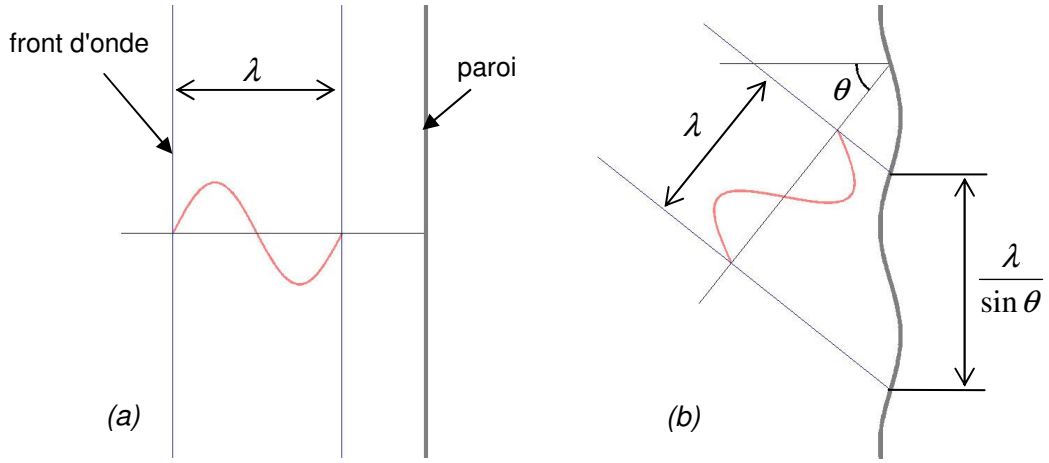


Figure 5.13 – Excitation d'une paroi par une onde acoustique avec une incidence normale (a) et une incidence présentant un angle θ par rapport à la normale (b).

L'onde de flexion générée par le champ acoustique projeté sur la paroi ne correspond pas à une onde de flexion naturelle que se propage dans la paroi quand elle vibre sous une excitation mécanique. L'onde de flexion naturelle dans une paroi, que l'on assimile à une plaque mince, possède une célérité c_f qui dépend de la fréquence, contrairement à l'onde acoustique où c est constant. Ainsi, le nombre d'onde de flexion $k_f = \omega / c_f$ est proportionnel à la racine carrée de la fréquence comme le montre la figure ci-dessous. Les deux courbes se croisent quand les nombres d'onde sont égaux $k_f = k$ (les longueurs d'onde dans l'air et dans la structure sont identiques) : c'est la **fréquence critique** f_c.

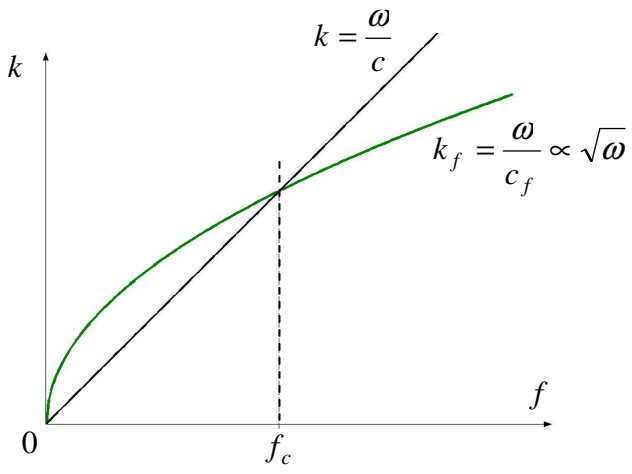


Figure 5.14 – Nombre d'onde acoustique dans l'air et nombre d'onde de flexion naturel dans la paroi en fonction de la fréquence.

Pour que l'onde de flexion forcée produite par une onde acoustique avec une incidence θ sur la paroi (Figure 5.13 b) puisse correspondre à une onde de flexion naturelle il faut que

$$\frac{\lambda}{\sin\theta} = \lambda_f \quad \text{c'est à dire que} \quad k_f = \frac{2\pi}{\lambda_f} = \frac{2\pi \sin\theta}{\lambda} = k \sin\theta$$

Cette correspondance ne pourra se produire que quand $k > k_f$, c'est à dire au dessus de la fréquence critique f_c :

- à chaque angle θ correspond une **fréquence de coïncidence** (quand $k = k_f \sin\theta$)
- à chaque fréquence supérieure à la fréquence critique correspond un **angle de coïncidence** (quand $k = k_f \sin\theta$)

L'indice d'affaiblissement pour une incidence θ est

$$R(\theta) = 10\log\frac{1}{\tau(\theta)} = 10\log\left[1 + \left(\frac{\omega M_S \cos\theta}{2\rho_0 c}\right)^2 \left(1 - \frac{f^2}{f_{\text{coïn}}^2}\right)^2\right]$$

A la fréquence de coïncidence $f_{\text{coïn}}$, les ondes de flexion naturelles produites par l'onde incidente se propagent librement dans la paroi. Le rayonnement de l'autre coté conduit à un indice d'affaiblissement nul (toutefois en l'absence de dissipation dans la paroi car en pratique c'est le seul paramètre qui conduira à $R(\theta) > 0$ dB alors qu'il n'a pratiquement pas d'influence ailleurs).

Ces phénomènes sont illustrés sur la Figure 5.15 où on identifie bien les fréquences de coïncidence : La fréquence de coïncidence la plus basse correspond à la **fréquence critique** f_c (fréquence pour laquelle la longueur d'onde de flexion dans le panneau correspond à la longueur d'onde dans l'air).

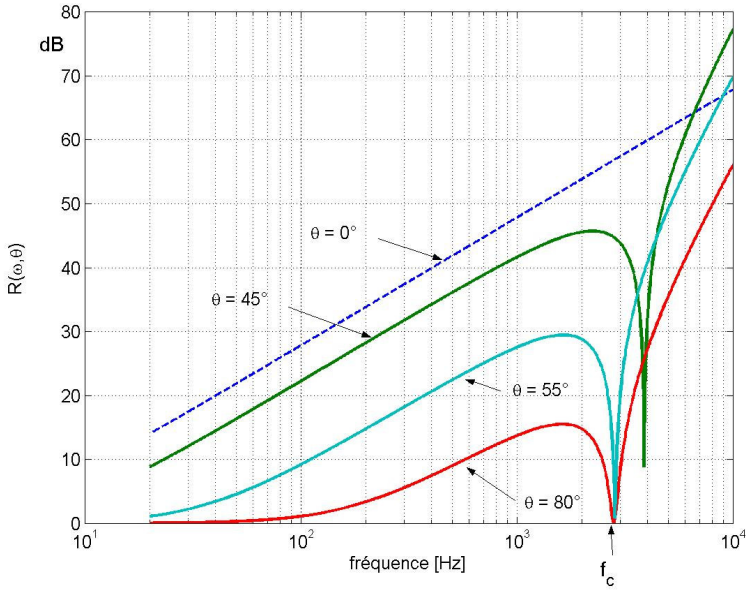


Figure 5.15 – Indice d'affaiblissement pour différents angles d'incidence de l'onde sur la paroi : on remarque les fréquences de coïncidence au-dessus de la fréquence critique.

En dessous de la fréquence de coïncidence (quand $f << f_{coïn}$) on obtient l'approximation

$$R(\theta) \approx 20\log\left[\frac{\omega M_S \cos\theta}{2\rho_0 c}\right] = R_0 + 20\log(\cos\theta)$$

qui montre que la loi de masse est réduite de $20\log(\cos\theta)$ (valeur négative).

2.2.4 - Indice d'affaiblissement en champ diffus

Un indice d'affaiblissement en **champ diffus** est défini en prenant en compte tous les angles d'incidences, c'est à dire que les directions d'incidence des ondes planes sont réparties sur un hémisphère. Le coefficient de transmission $\tau(\theta)$ intégré sur ce domaine conduit à la relation suivante (voir [Fahy[3] 1985], par exemple) :

$$R_{diff} \approx R_0 - 10\log(0{,}23\, R_0) \qquad \text{[dB]} \qquad \text{quand} \quad f < f_c\,.$$

En pratique, on observe une déficience en incidences rasantes (surtout pour les panneaux de petites dimensions) et il est préférable de réaliser une intégration pour toutes les incidences possibles entre 0° et 78°. Pour les fréquences inférieures à $f_c/2$, l'approximation suivante est employée de préférence à la précédente

$$R_d = R_0 - 5 \qquad \text{[dB]}$$

A la fréquence critique f_c, l'isolement passe par un minimum qui dépend de la dissipation interne de la paroi et croit ensuite avec une pente de 9 dB par octave. Le facteur de perte interne de la paroi a seulement une influence à la fréquence critique.

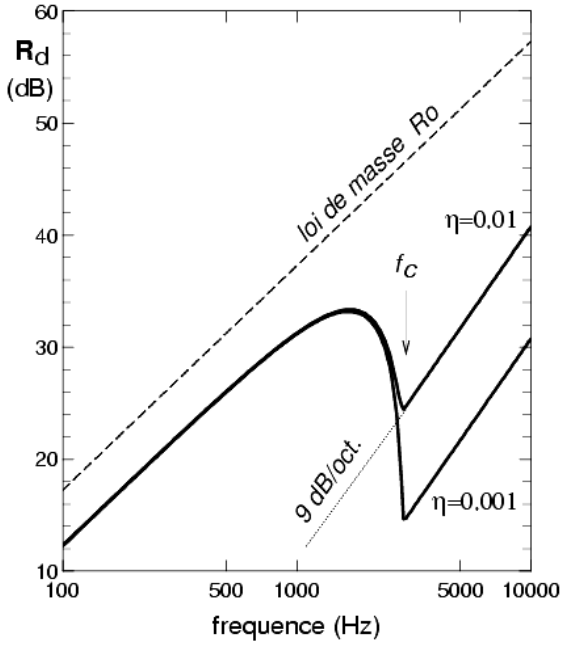


Figure 5.16 - Indice d'affaiblissement en champ diffus pour une paroi infinie et deux valeurs du facteur de perte (1% et 0,1%)

[3] F.J. Fahy, (1985), *Sound and Structural Vibration,* (Academic Press).

La formule approchée qui est utilisée pour calculer l'indice d'affaiblissement en champ diffus est (voir par exemple [Fahy 1985])

$$R_d = R_0 + 10\log\left[0{,}316\left(1-\frac{f^2}{f_c^2}\right)^2 + \frac{2\eta}{\pi}\right], \qquad \text{pour } f \le f_c$$

$$R_d = R_0 + 10\log\left[\frac{2\eta}{\pi}\frac{f}{f_c}\right], \qquad \text{pour } f \ge f_c$$

En dehors de la masse par unité de surface nécessaire pour déterminer la loi de masse R_0, l'indice d'affaiblissement acoustique en champ diffus R_d demande la connaissance du facteur de perte η du matériau et de la **fréquence critique** de la paroi

$$f_c = \frac{c^2}{2\pi}\sqrt{\frac{M_S}{D}},$$

avec $M_S = \rho_m\, h$ et $D = \dfrac{E\,h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ on obtient

$$f_c = \frac{c^2}{2\pi\, h}\sqrt{\frac{12\rho_m\left(1-\nu^2\right)}{E}},$$

où
- ρ_m masse volumique du matériau (kg/m^3),
- h épaisseur de la paroi (m),
- ν coefficient de Poisson,
- E module de Young (N/m^2),
- D rigidité de flexion,
- c célérité du son dans l'air ($c = 331$ m/s à 20°C).

ANNEXE A

Courbes de pondération A et C pour sonomètres

n° de bande	1/3 octave fréquence centrale [Hz]	pondération A [dB]	Pondération C [dB]
10	10	-70,4	-14,3
11	12,5	-63,4	-11,2
12	16	-56,7	-8,5
13	20	-50,5	-6,2
14	25	-44,7	-4,4
15	31,5	-39,4	-3,0
16	40	-34,6	-2,0
17	50	-30,2	-1,3
18	63	-26,2	-0,8
19	80	-22,5	-0,5
20	100	-19,1	-0,3
21	125	-16,1	-0,2
22	160	-13,4	-0,1
23	200	-10,9	0
24	250	-8,6	0
25	315	-6,6	0
26	400	-4,8	0
27	500	-3,2	0
28	630	-1,9	0
29	800	-0,8	0
30	1000	0	0
31	1250	+0,6	0
32	1600	+1,0	-0,1
33	2000	+1,2	-0,2
34	2500	+1,3	-0,3
35	3150	+1,2	-0,5
36	4000	+1,0	-0,8
37	5000	+0,5	-1,3
38	6300	-0,1	-2,0
39	8000	-1,1	-3,0
40	10000	-2,5	-4,4
41	12500	-4,3	-6,2
42	16000	-6,6	-8,5
43	20000	-9,3	-11,2

Equations pour les filtres de pondération A, B et C[4]

$$W_A = W_C + 20\log\left(\frac{A f^2}{\sqrt{\left(f^2 + f_1^2\right)\left(f^2 + f_2^2\right)}}\right)$$

$$A = 1.249936$$
$$f_1 = 107.65265\,\text{Hz}$$
$$f_2 = 737.8223\,\text{Hz}$$

[4] d'après R.W. Krug, "Sound level meters" (Ch. 105), Encyclopedia of Acoustics (M.J. Crocker, Editeur), Wiley, 1998.

$$W_B = W_C + 20\log\left(\frac{B\,f}{\sqrt{f^2 + f_3^2}}\right) \qquad B = 1.012482 \quad f_3 = 158.48932\,\text{Hz}$$

$$W_C = 20\log\left(\frac{C\,f^2\,f_4^2}{\left(f^2 + f_4^2\right)\left(f^2 + f_5^2\right)}\right) \qquad C = 1.007152 \quad f_4 = 12194.217\,Hz \quad f_5 = 20.598997\,Hz$$

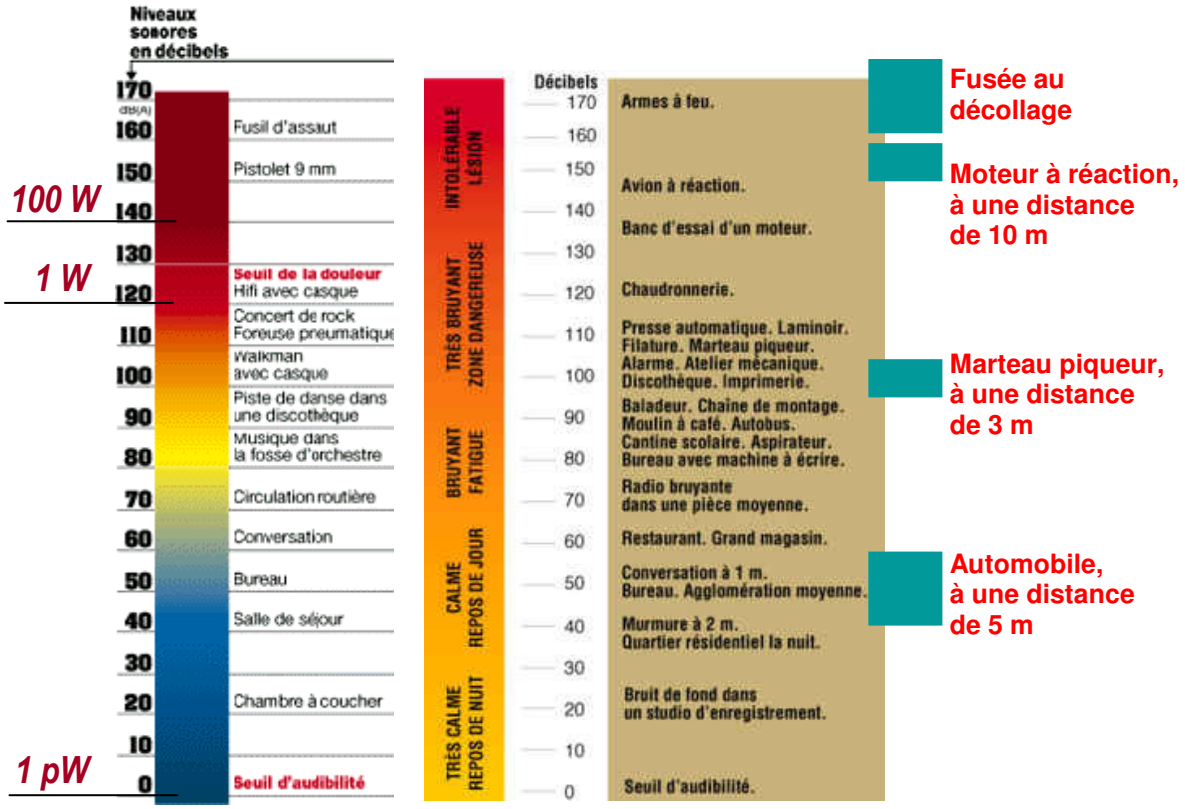
ANNEXE B

Bandes de fréquence des filtres tiers d'octave

n° de bande	Octave fréquence centrale [Hz]	1/3 octave fréquence centrale [Hz]	fréquence de coupure f_1 [Hz]	fréquence de coupure f_2 [Hz]
11		12,5	11	14
12	16	16	14	18
13		20	18	22
14		25	22	28
15	31,5	31,5	28	35
16		40	35	44
17		50	44	57
18	63	63	57	71
19		80	71	88
20		100	89,1	113
21	125	125	113	141
22		160	141	176
23		200	176	225
24	250	250	225	283
25		315	283	353
26		400	353	440
27	500	500	440	565
28		630	565	707
29		800	707	880
30	1000	1000	880	1130
31		1250	1130	1414
32		1600	1414	1760
33	2000	2000	1760	2250
34		2500	2250	2825
35		3150	2825	3530
36	4000	4000	3530	4400
37		5000	4400	5650
38		6300	5650	7070
39	8000	8000	7070	8800
40		10000	8800	11300
41		12500	11300	14140
42	16000	16000	14140	17600
43		20000	17600	22500

ANNEXE C

Echelle des bruits en dB



VI - MESURES ACOUSTIQUES

1. CHAINE DE MESURE ACOUSTIQUE

   1.1 - Microphone de mesure
   1.2 - Sonomètre
   1.3 - Intensimètre

2. DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DES MATERIAUX ABSORBANTS

   2.1 – Méthode du tube de Kundt à ondes stationnaires
   2.2 – Méthode en tube à deux microphones
   2.3 – Méthode en incidence oblique avec deux microphones
   2.4 – Méthode normalisée en salle réverbérante (ISO 354)
   2.5 – Méthode de la cabine alpha (procédure Renault 32 00013)

3. MESURE DE LA TRANSPARENCE ACOUSTIQUE

   3.1 - Méthode normalisée avec deux salles réverbérantes
   3.2 - Méthode intensimétrique (une seule salle réverbérante)
   3.3 - Mesures comparatives en petite cabine (PSA D45 5038)

4. DETERMINATION DE LA PUISSANCE ACOUSTIQUE

   4.1 – Mesures en salles réverbérantes (ISO 3741-3743)
   4.2 – Mesures en salles plus ou moins absorbantes (ISO 3744-3747)
   4.3 – Mesures intensimétriques (ISO 9614)

ANNEXE : Imagerie acoustique

1 – CHAINE DE MESURE ACOUSTIQUE

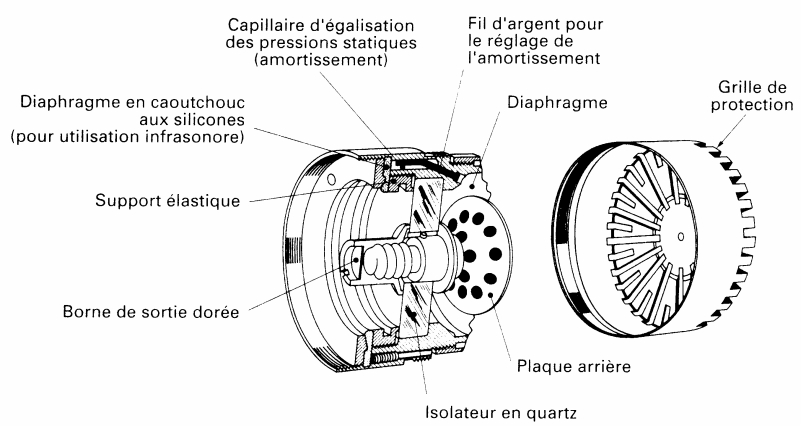
1.1 – Microphone de mesure

Le microphone à condensateur est aujourd'hui accepté comme le capteur standard pour toutes les mesures acoustiques. Ce choix est du à ses propriétés :

1. Stabilité élevée par rapport aux conditions d'environnement,
2. Réponse en fréquence plate sur une grande gamme,
3. Faible distorsion,
4. Très bas bruit interne,
5. Large étendue dynamique,
6. Sensibilité élevée.

1.1.1 – Principe du microphone à condensateur

Le microphone se compose d'un diaphragme métallique mince placé à très faible distance d'une plaque arrière rigide. Ceci forme un condensateur dont le diélectrique est l'air et dont la capacité est rendue variable par le mouvement de la membrane (diaphragme) excitée par la pression des ondes sonores.



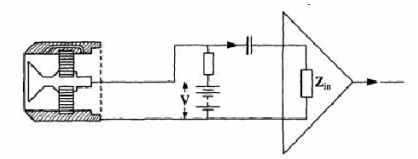
La pression à l'intérieur du microphone doit donc être gardée constante. La cavité derrière la membrane est fermée. Elle ne communique avec l'extérieure que par un petit conduit pour l'égalisation des pressions statiques. Ce tube a une impédance acoustique très élevée comparée à l'impédance du volume interne. Ainsi, seules aux fréquences très basses, un court-circuit acoustique se produit, permettant à la pression statique à l'intérieur du microphone d'égaler la pression extérieure pour éviter une déformation de la membrane au repos.

1.1.2 - Types de microphones à condensateur

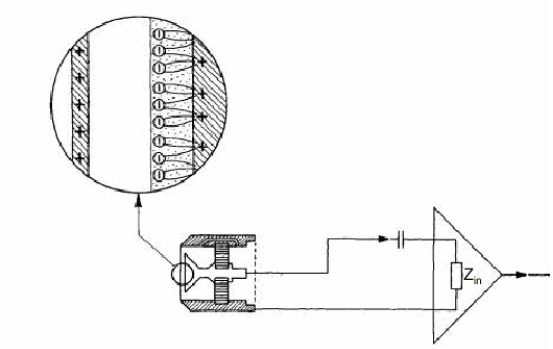
Deux types existent :

- ***Microphone à condensateur polarisé***
  Pour recueillir des variations de charge dues aux variations de capacité créées par les fluctuations de la distance entre armatures du condensateur formé par la membrane et la plaque arrière, il faut créer une charge électrique. Ceci est obtenu en polarisant la capacité à l'aide d'un courant continu dont la valeur standard est de 200 V.

- ***Microphone à condensateur pré-polarisé***
  Au lieu de fournir une charge constante sur la plaque arrière du microphone du condensateur à l'aide d'une tension de polarisation, elle est obtenue en plaçant un matériau conservant une charge permanente (électret) sur la plaque arrière.



Capsule polarisée par une tension continue V = 200V



Capsule pré-polarisée par un matériau électret

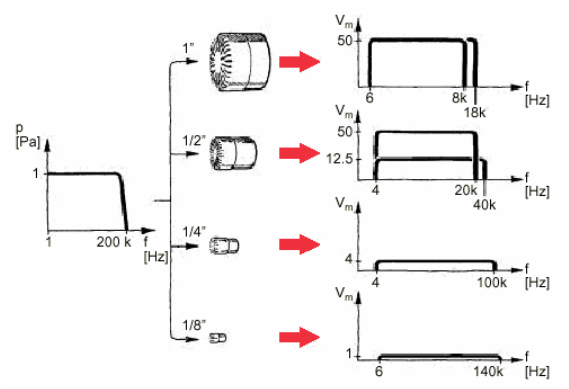
1.1.3 – Caractéristiques [1]

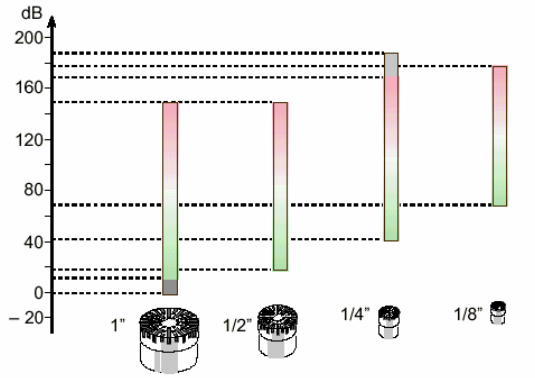
Des microphones sont conçus dans différentes tailles (1 ", 1/2 ", 1/4 ", et 1/8"). De la taille dépend essentiellement la sensibilité et la limite haute fréquence. Les meilleurs compromis sont obtenus par les microphones de un demi et un quart de pouce qui sont aujourd'hui les plus couramment employés.
Les caractéristiques les plus importantes à comparer sont sensibilité, gamme de fréquence, gamme dynamique, et caractéristiques directionnelles.

Gamme de fréquence et gamme dynamique

Ces caractéristiques dépendent du diamètre. Quand il diminue, la fréquence de résonance de la membrane augmente et permet un élargissement de la bande de fréquence utilisable. La sensibilité diminue mais peut être compensée en partie par une réduction de la distance membrane-armature fixe.

[1] *Microphone Handbook,* Brüel & Kjaer Technical Documentation, 1996.



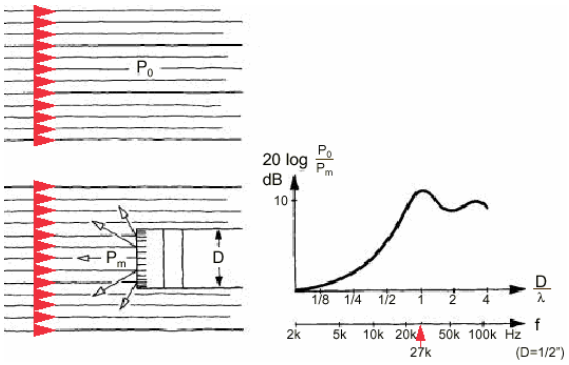


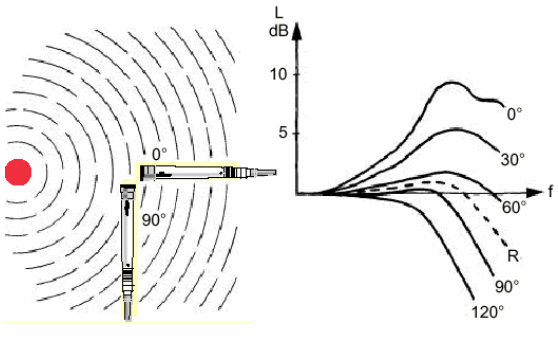
Caractéristiques directionnelles en hautes fréquences

Le microphone ne répondra pas également au son venant avec différents angles d'incidence. A basse fréquence, le microphone est presque parfaitement omnidirectionnel. Les effets de directivité apparaissent donc dans les hautes fréquences, quand les dimensions du corps du microphone et de son préamplificateur deviennent du même ordre de grandeur que la longueur d'onde.

Réponse de champ libre

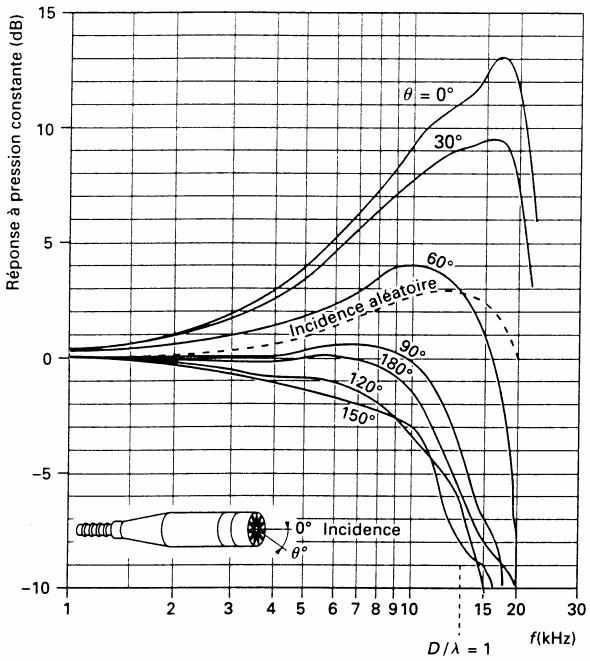
Quand un microphone est placé dans un champ acoustique, il modifie le champ. En champ libre où le son vient seulement d'une direction, la pression acoustique devant la membrane est augmentée par des réflexions locales et le microphone mesure une pression acoustique trop élevée. Cette augmentation de " sensibilité " dépend de fréquence pour laquelle la longueur d'onde est égale au diamètre du microphone $D/\lambda = 1$.





Pour un microphone d'un demi-pouce, la Figure montre que l'augmentation commence à 2 kHz avec un maximum approximativement de 10 dB à 27 kHz.

L'augmentation la plus importante est obtenue quand le champ acoustique vient de direction perpendiculaire au diaphragme (défini comme l'incidence 0°). A tous autres angles, l'augmentation sera moins prononcée. La courbe marquée R représente l'incidence aléatoire, et correspond à une réponse moyenne calculée pour un bruit arrivant avec une probabilité égale de toutes les directions.



Les **courbes de correction** pour les champs libres représentées sont typiques, car elles dépendent non seulement du diamètre du microphone mais également dans une certaine mesure de la conception de la grille de protection du microphone, et aussi du corps du préamplificateur. Dans un champ acoustique où le son vient principalement d'une direction, une correction de champ libre peut être appliquée (à condition de connaître ces courbes de correction en fonction de l'angle d'incidence).

Réponse en pression

La réponse en pression d'un microphone est mesurée en exposant le microphone à une pression acoustique connue dans une cavité.

1.1.3 – Conditionneur de signal

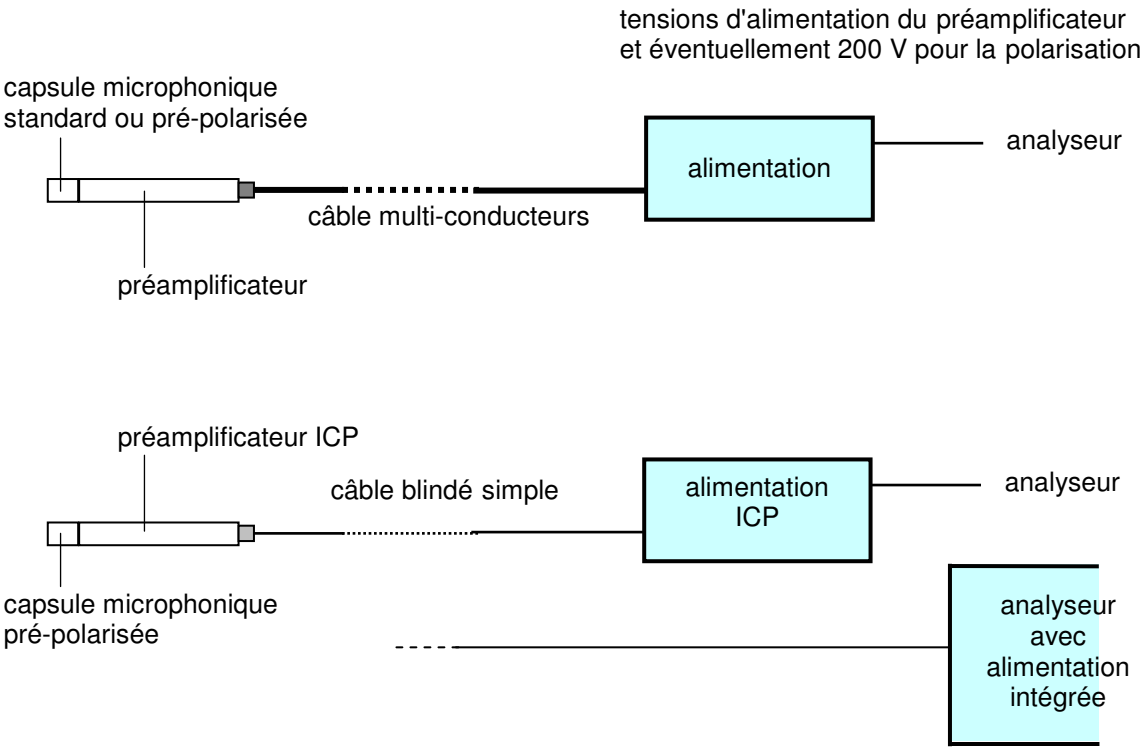
Microphones et préamplificateurs

Le microphone à condensateur convertit les variations de pression acoustiques en signal électrique qui est ensuite traité par un préamplificateur (dont le gain est souvent unitaire). Le préamplificateur doit toujours être connecté très près du microphone car son but principal est de convertir l'impédance très élevée du microphone en basse impédance nécessaire pour l'utilisation de câbles longs. Le préamplificateur est contenu dans un tube de diamètre identique à celui de la capsule qui se visse directement sur lui.

Alimentation

Son rôle essentiel est de fournir les tensions nécessaires à l'alimentation du préamplificateur. L'alimentation fournit également la tension de polarisation (200 V continu) pour les microphones à condensateur qui ne sont pas pré-polarisés.

Dans le cas des microphones pré-polarisés à effet électret, il est possible d'utiliser des préamplificateurs au standard ICP qui ont seulement besoin d'une alimentation à courant constant par l'intermédiaire d'un câble blindé à un seul conducteur. Le signal de sortie module en tension l'alimentation.



1.2 – Sonomètre

Les sonomètres permettent des mesures de niveau sonore en utilisant le signal issu d'un microphone. On distingue deux types de moyennage :

1) moyennage exponentiel (sonomètres "classiques")
2) moyennage linéaire (sonomètres intégrateurs),

Les classes de précision sont définies par les normes de la CEI (Commission Electronique Internationale) et correspondent aux tolérances permises.

- Sonomètres "classique" : CEI 651 (NF EN 60651)
- Sonomètres intégrateurs : CEI 804 (NF EN 60804)

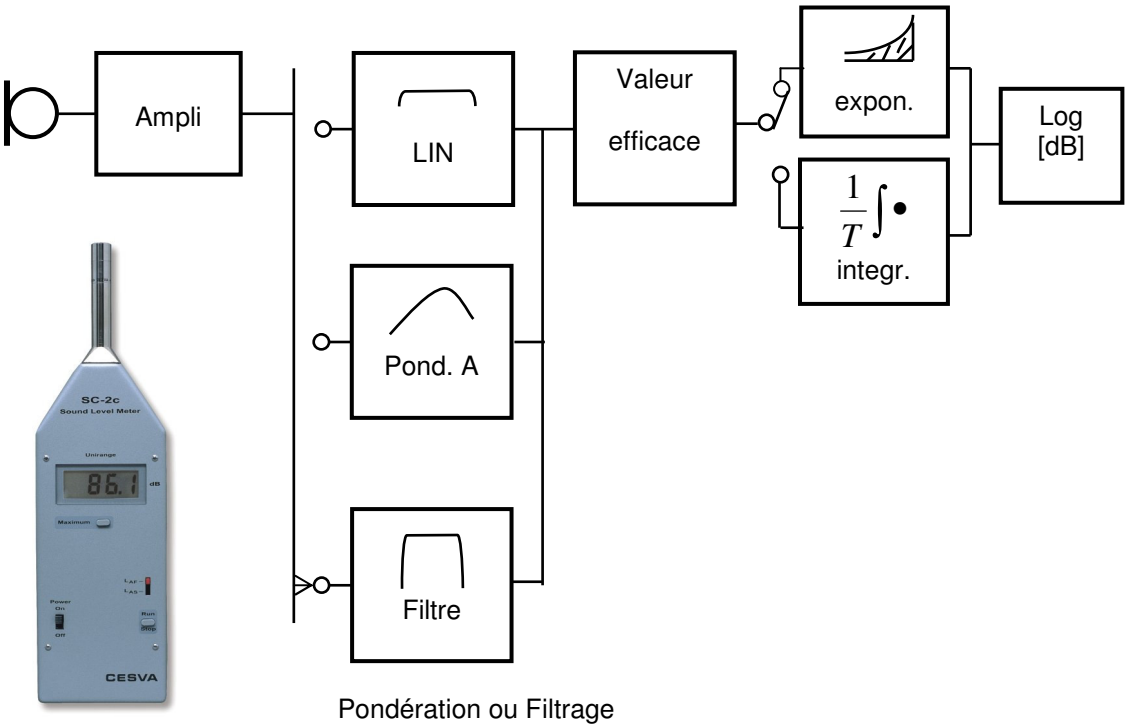
CLASSES : 0 1 2 3

⟶ Précision décroissante

1.2.1 – Chaîne de mesure

- Filtre de pondération et par bandes d'octave et de 1/3 d'octave (voir plus loin). LIN (linéaire) ou courbes de pondération A, B ou C

- Estimateur de la valeur quadratique $p^2(t)$



Pondération ou Filtrage

- Calculateur de la valeur efficace
  - Intégration exponentielle: la moyenne est constamment réactualisée : elle est calculée par une pondération temporelle exponentielle $h(t)$

$$p_{eff}(t) = \sqrt{\frac{1}{T_e}\int_{t-T_e}^{t} p^2(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

    Deux constantes de temps sont employées :
    - Rapid (fast) 0.125 s
    - Lent (slow) 1s.

  - Intégration linéaire durant une durée choisie T

$$p_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T p^2(t)dt}$$

1.2.2 – Niveau de pression équivalent

Le niveau de pression acoustique L_p permet de caractériser des bruits stables dans le temps. Dans le cas où le bruit étudié est fluctuant; il peut être caractérisé par un niveau de pression continu équivalent, L_{eq}, mesurable à l'aide d'un sonomètre intégrateur. Par définition, L_{eq} désigne la valeur du niveau de pression acoustique d'un bruit stable qui, au cours d'une période spécifique T, correspond à la même pression acoustique quadratique moyenne qu'un bruit considéré dont le niveau varie en fonction du temps. Il est défini par

$$L_{eq} = 10\log\left(\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\frac{p^2(t)}{p_{ref}^2}dt\right)$$

où L_{eq} est le niveau de pression acoustique continu équivalent en décibels, déterminé pour un intervalle de temps T, qui commence à t_1 et se termine à t_2.
$p(t)$ est la pression acoustique instantanée du signal acoustique.

1.2.3 – Calibrage des sonomètres



On utilise un **calibreur** constitué d'une source de bruit (pistonphone) créant un niveau sonore de niveau constant dans une petite cavité. La capsule microphonique est introduite dans la cavité pour calibrage.

1.3 – Intensimètre

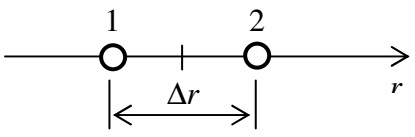
Dans la Partie 4, il a été montré que l'**intensité acoustique**, qui représente la puissance transportée par l'onde sonore, était un vecteur qui peut s'exprimer comme le produit moyenné dans le temps entre la pression acoustique et la vitesse particulaire. L'équation ci-dessous est associée à une composante de ce vecteur dans la direction r

$$I_r = \langle p(t)\, u_r(t) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{ p\, u_r^{\,*} \}$$

(notation complexe à droite)
La principale difficulté est la mesure de la vitesse particulaire. La solution qui a été adoptée utilise la relation d'Euler pour exprimer la **vitesse particulaire** à partir du **gradient de pression**

$$\rho_0 \frac{\partial u_r(t)}{\partial t} + \frac{\partial p(t)}{\partial r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_r(t) = -\frac{1}{\rho_0} \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial p(\tau)}{\partial r}\, d\tau$$

et d'approcher le gradient de pression par une différence finie entre les signaux de deux microphones distants de Δr



$$\frac{\partial p}{\partial r} \approx \frac{p_2 - p_1}{\Delta r}$$

$$p \approx \frac{p_2 + p_1}{2}$$

En utilisant la notation complexe, la relation d'Euler devient

$$j\omega \rho_0 u_r + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_r = \frac{j}{\omega \rho_0} \frac{\partial p}{\partial r}$$

Avec les approximations précédentes, on peut montrer que

$$I_r = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{p\,u_r^*\} \cong \frac{\mathrm{Im}\{p_1 p_2^*\}}{2\omega\,\rho_0\,\Delta r}$$

ce qui conduit souvent à exprimer la forme spectrale de l'intensité acoustique à partir de la densité spectrale de puissance (interspectre) entre les deux signaux microphoniques

$$I_r(\omega) \cong \frac{1}{\rho_0\,\Delta r}\,\frac{\mathrm{Im}\{G_{21}(\omega)\}}{\omega}$$

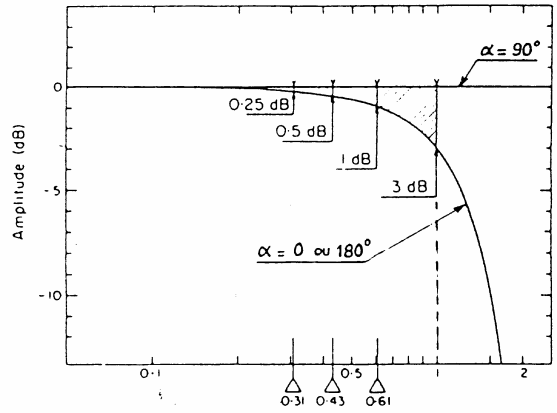
L'intensité approchée peut donc s'obtenir facilement en prenant la partie imaginaire de l'interspectre calculé par un analyseur dont deux microphones sont reliés aux deux entrées. Une sonde intensimétrique est représentée ci-dessous : les deux microphones sont montés face à face, séparés par une entretoise pleine en bakélite.



Sonde intensimétrique à deux microphones

Pour assurer la validité de cette mesure **deux précautions essentielles** doivent être prises :

- la gamme de fréquence doit être limitée telle que $\lambda/4 < \Delta r$ ($\lambda = c/f$). En pratique, un écartement Δr de 12 mm correspond à une fréquence limite de 8 kHz (atténuation de 3 dB) et plusieurs entretoises sont généralement disponibles pour adapter au mieux des besoins la gamme d'analyse.



- les deux voies de mesure doivent être appariées en phase (précision de l'ordre du 0,1° dans les basses fréquences). En pratique, l'**erreur de phase** résiduelle conduit à une **limite basse fréquence** pour un écartement donné.

2 – CARACTERISTIQUES DES MATERIAUX ABSORBANTS

2.1 – Méthode du tube de Kundt

A partir de l'expression de la pression quadratique de l'onde quasi-stationnaire dans un tube

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} = \frac{|p|^2}{2\rho_0 c} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c}\left[1 + |R(0)|^2 + 2|R(0)|\cos(2kx + \varphi)\right]$$

il est possible d'écrire les valeurs maximales et minimales ($\cos(2kx + \varphi) = \pm 1$)

$$\left.\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c}\right|_{\max} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c}\left(1 + |R(0)|\right)^2 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c}\right|_{\min} = \frac{|A|^2}{2\rho_0 c}\left(1 - |R(0)|\right)^2$$

Leur rapport est le carré du Taux d'Onde Stationnaire (TOS) et conduit à la relation suivante

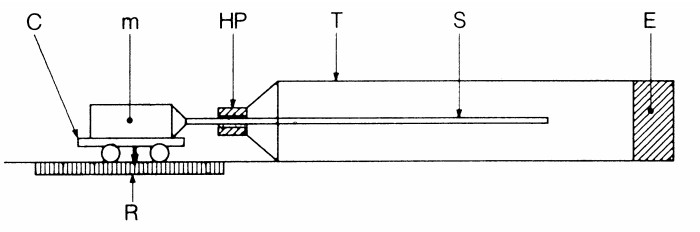
$$\mathrm{TOS}^2 = \frac{\left.\langle p^2 \rangle / \rho_0 c\right|_{\max}}{\left.\langle p^2 \rangle / \rho_0 c\right|_{\min}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TOS} = \frac{p_{eff\,\max}}{p_{eff\,\min}} = \frac{1 + |R(0)|}{1 - |R(0)|}$$

qui permet d'obtenir le module du coefficient de réflexion en incidence normale

$$|R(0)| = \frac{\mathrm{TOS} - 1}{\mathrm{TOS} + 1}$$

La phase φ peut se déduire de la distance d entre la surface de l'échantillon et le premier minimum ($\cos(2kx + \varphi) = -1$, avec $x = -d$)

$$\varphi = 2kd - \pi = 2\pi\left(\frac{2fd}{c} - \frac{1}{2}\right)$$



m microphone
C chariot
E échantillon
HP haut-parleur
R règle
S sonde
T tube

Mesure du coefficient d'absorption à l'aide d'un tube à ondes stationnaires.

Remarque :
La méthode du tube de Kundt considère une propagation des ondes plane. En conséquence, la plus haute fréquence utile devra être inférieure à la fréquence du premier mode transversal

$$f_{\max} < 0{,}5\frac{c}{D}, \qquad D \text{ diamètre du tube}$$

Le tube devra aussi avoir une longueur supérieure à $3\lambda/4$ pour la fréquence la plus basse.

Un autre facteur à prendre en compte est l'atténuation de l'onde sonore $A \approx 0{,}2\sqrt{f}/cD$ (en dB/m) due à la propagation dans le tube. Dans les basses fréquences, la distance plus

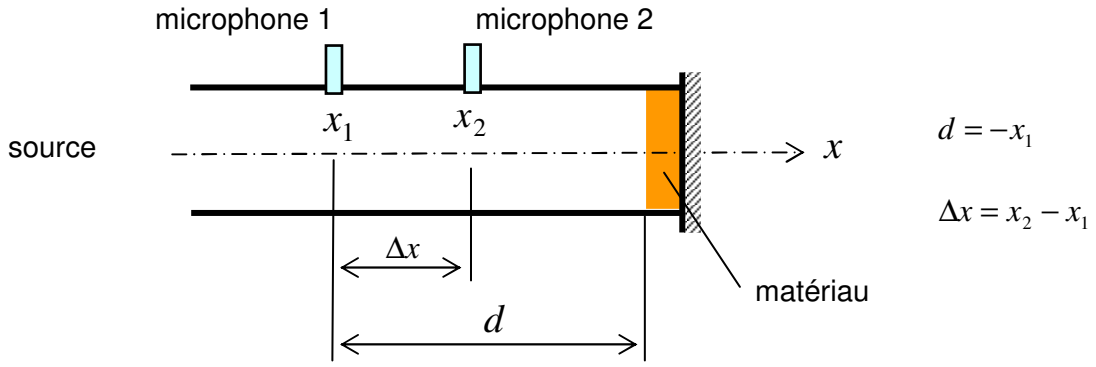
importante entre minima et maxima conduit à choisir un diamètre D plus important. En pratique, deux diamètres de tube sont employés pour couvrir la gamme utile.

2.2 – Méthode du tube à deux microphones

En présence d'un matériau absorbant à une extrémité, la pression dans l'onde quasi-stationnaire s'écrit

$$p(x,\omega) = A\left(e^{-jkx} + R(0)\,e^{jkx}\right)$$

R est le coefficient de réflexion



La fonction de transfert entre les deux microphones placé en x_1 et x_2

$$H_{12}(\omega) = \frac{p_2(\omega)}{p_1(\omega)} = \frac{A\,(e^{-jkx_2} + R(0)\,e^{jkx_2})}{A\,(e^{-jkx_1} + R(0)\,e^{jkx_1})}$$

permet d'exprimer le coefficient de réflexion sur la surface du matériau

$$R(0) = \frac{H_{12}(\omega)e^{-jkx_1} - e^{-jkx_2}}{e^{jkx_2} - H_{12}(\omega)e^{jkx_1}}$$

en factorisant $e^{-jkx_1} = e^{jkd}$

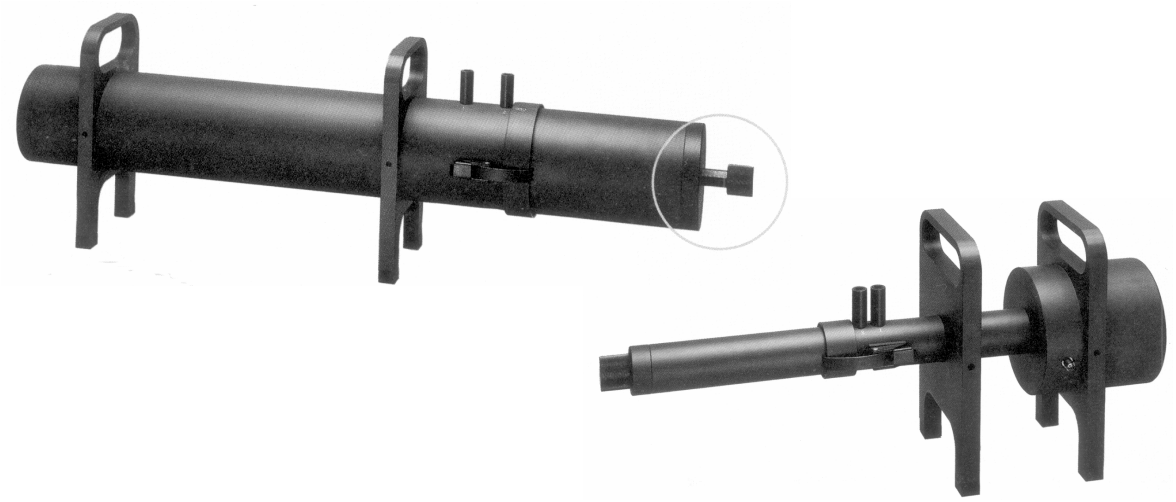
$$R(0) = \frac{e^{jkd}}{e^{-jkd}}\,\frac{H_{12}(\omega) - e^{-jk(x_2-x_1)}}{e^{jk(x_2-x_1)} - H_{12}(\omega)}$$

Le coefficient de réflexion complexe s'obtient par

$$R(0) = e^{j2kd}\,\frac{H_{12}(\omega) - e^{-jk\Delta x}}{e^{jk\Delta x} - H_{12}(\omega)}$$

La phase dépend de la précision avec laquelle est connue la distance d entre le microphone 1 et la surface du matériau. Le coefficient d'absorption $\alpha(0)$ en incidence normale et l'impédance de surface du matériau sont également obtenus

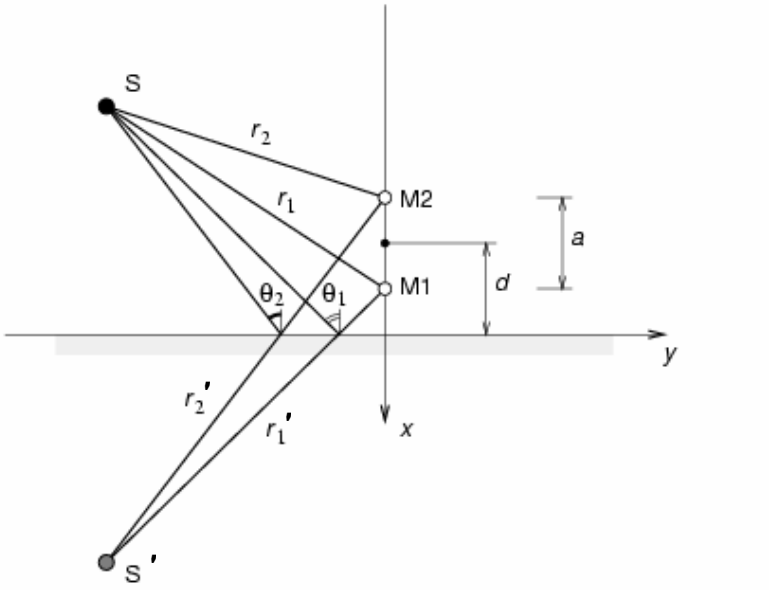
$$\alpha(0) = 1 - |R(0)|^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{Z_n}{\rho_0 c} = \frac{1+R(0)}{1-R(0)}$$



Tube pour la caractérisation des matériaux acoustiques en basses fréquences (100 Hz - 1600 Hz : en haut) et en hautes fréquences (500 Hz – 6300 Hz : en bas)

2.3 – Méthode en incidence oblique avec deux microphones

Cette mesure à pour but d'obtenir l'impédance sous incidence oblique des matériaux qui ne peuvent être assimilés à des matériaux à réaction locales dont l'impédance de surface est indépendante de l'angle d'incidence de l'onde. La méthode est très semblable à celle du tube à deux microphones et le dispositif expérimental est représenté par la figure ci-dessous.



Dispositif à deux microphones pour mesurer l'impédance des matériaux sous incidence oblique.

La source monopolaire S émet une onde sphérique au dessus d'un matériau acoustique. Pour sa réflexion le modèle approchée d'une source image S' rayonnant également une onde sphérique est employé. Les pressions captées par les microphones M1 et M2

$$p_1 = p_0\left(\frac{e^{-jkr_1}}{r_1} + R(\theta_1)\frac{e^{-jkr_1'}}{r_1'}\right) = p_0[\alpha_1 + R(\theta_1)\beta_1],$$
$$p_2 = p_0\left(\frac{e^{-jkr_2}}{r_2} + R(\theta_2)\frac{e^{-jkr_2'}}{r_2'}\right) = p_0[\alpha_2 + R(\theta_2)\beta_2].$$

Les angles θ_1 et θ_2 sont peu différents et permettent d'écrire

$$R(\theta) \cong R(\theta_1) \cong R(\theta_2)$$

La fonction de transfert mesurée $H_{21}(\omega) = \frac{p_2(\omega)}{p_1(\omega)}$ s'exprime en fonction des pressions par

$$H_{21} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\alpha_2 + R(\theta)\ \beta_2}{\alpha_1 + R(\theta)\ \beta_1},$$

et permet d'obtenir le coefficient de réflexion sous incidence oblique

$$R(\theta) = \frac{H_{21}\ \alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 - H_{21}\ \beta_1},$$

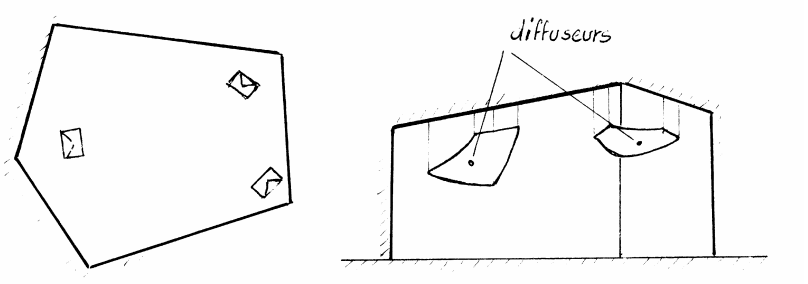
puis l'impédance de surface correspondante

$$Z_n(\theta) \ = \ \frac{\rho c}{\cos\theta} \ \ \frac{1+R(\theta)}{1-R(\theta)}.$$

Pour éviter l'influence des réflexions parasites sur les autres parois du local, la mesure est généralement faite avec un signal transitoire de courte durée.

2.4 – Méthode normalisée en salle réverbérante (ISO 354)

Des salles spéciales très réfléchissantes sont utilisées pour mesurer le coefficient d'absorption en **champ diffus**. Leur géométrie est choisie pour étaler leurs fréquences propres dans les basses fréquences : les parois parallèles sont évitées et des rapports 2,3,5 ou $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$.

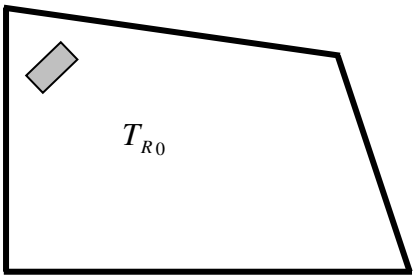


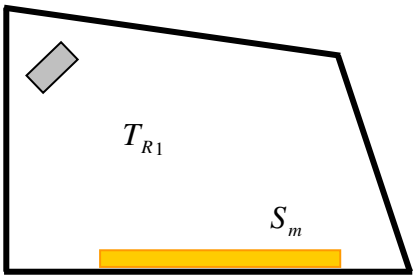
Le mesurage de l'absorption acoustique en salle réverbérante (ISO 354) est basé sur la mesure du temps de réverbération T_R et l'utilisation de la **formule de Sabine**

$$T_R = \frac{0{,}16\,V}{\overline{\alpha}\,S}$$

T_R temps de réverbération en [s]
V volume de la salle en [m^3]
S surface totale des parois en [m^2]
$\overline{\alpha}$ coefficient d'absorption moyen

Le mesurage de l'absorption acoustique dans une salle réverbérante selon la norme ISO 354 est une méthode qui compare le temps de réverbération de la salle vide avec celui obtenu après que l'on ait disposé une surface S_m de plus de 10 m^2 de matériau acoustique. La norme précise que la salle réverbérante doit avoir un volume supérieur à 180 m^3 et un coefficient d'absorption moyen résiduel $\alpha_0 < 0{,}06$.





$$T_{R0} = \frac{0{,}16\,V}{\overline{\alpha}_0\,S}$$

$$T_{R1} = \frac{0{,}16\,V}{\overline{\alpha}_0\,(S - S_m) + \overline{\alpha}\,S_m} = \frac{0{,}16\,V}{\overline{\alpha}_0\,S + S_m\,(\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_0)}$$

d'où $$\frac{1}{T_{R1}} = \frac{1}{T_{R0}} + \frac{S_m\,(\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_0)}{0{,}16\,V}$$

Le **coefficient d'absorption** du matériau peut s'exprimer par

$$\overline{\alpha} = \frac{0{,}16\,V}{S_m}\left(\frac{1}{T_{R1}} - \frac{1}{T_{R0}}\right) + \overline{\alpha}_0$$

Pour un objet absorbant (fauteuil de salle de concert par exemple), l'aire d'absorption $A = \overline{\alpha}\,S_m$ est seule déterminée

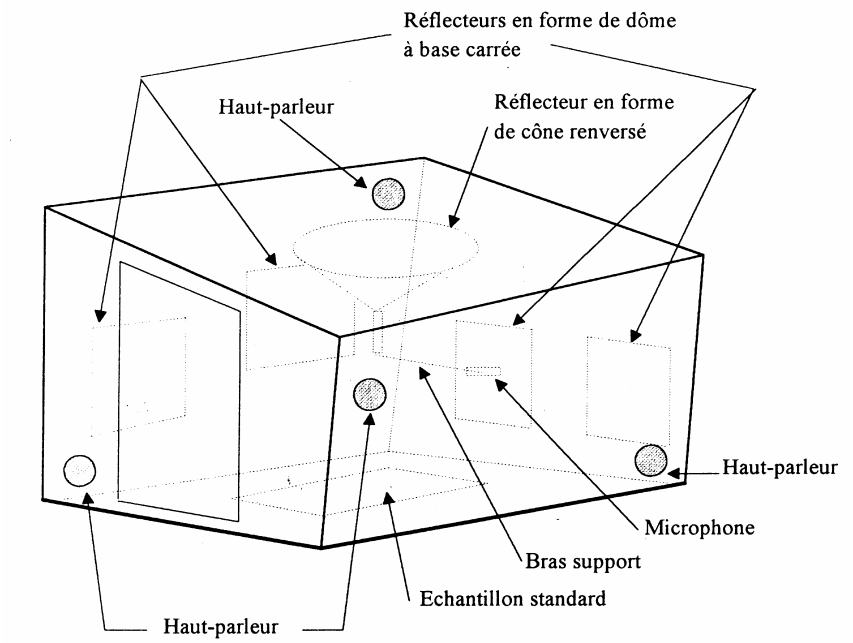
$$A \cong 0{,}16\,V\left(\frac{1}{T_{R1}} - \frac{1}{T_{R0}}\right)$$

2.5 – **Méthode de la cabine alpha** (procédure Renault 32 00013)

Cette cabine a une géométrie bien définie (procédure d'essai Renault 32 00 013). C'est une réduction d'un tiers des dimensions des salles réverbérantes utilisées pour la norme ISO

354. Les parois sont en acier. L'échantillon standard ou la pièce à essayer est placé sur le plancher de la cabine.

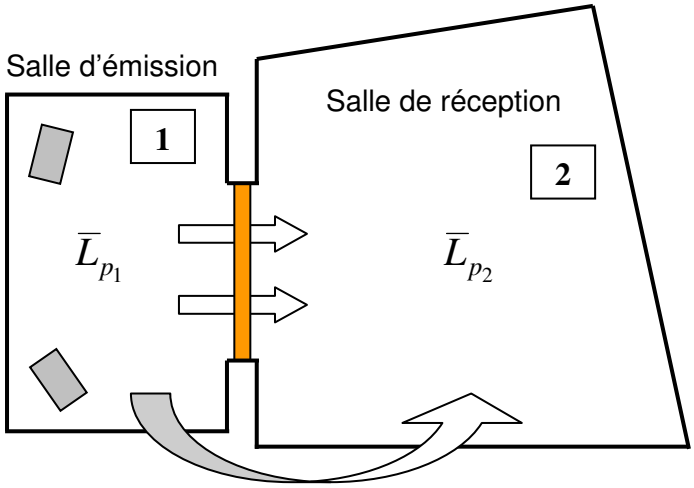
Pour créer un champ sonore le plus diffus possible, plusieurs haut-parleurs sont utilisés ainsi que des réflecteurs. Le temps de réverbération est mesuré entre 400 et 8000 Hz et le coefficient d'absorption est déterminé par la méthode décrite précédemment (double mesure).



L'interêt principal de ce moyen d'essai est d'être beaucoup moins couteux (et encombrant) qu'une salle réverbérante satisfaisant les critères de la norme ISO 354. Cependant, les faibles dimensions de la cabine ne permettront pas un champ diffus (ou même homogène) dans les basses fréquences. Il est souvent avancé comme argument que les dimensions sont plus proches de celles d'un habitacle ou d'un compartiment moteur et que la méthode conduirait à des coefficients d'absoption plus proches de la réalité. En réalité, les résultats variront fortement d'un habitacle à un autre. Le comportement modal est prépondérant et le modèle de champ diffus de Sabine n'a plus de sens.

3 - MESURE DE LA TRANSPARENCE ACOUSTIQUE

3.1 – Méthode normalisée avec deux salles réverbérantes (ISO 140)



Transmissions latérales

La puissance acoustique des ondes incidentes sur la paroi est obtenue à partir de la théorie au champ diffus *(l'intensité incidente correspond au quart de la pression quadratique en champ diffus dans la salle d'émission 2)*

$$W_{\text{inc}} = \bar{I}_{\text{inc}}\ S_p = \frac{1}{4}\frac{\overline{\langle p_1^2 \rangle}}{\rho_0 c} S_p \qquad S_p \text{ surface de la paroi}$$

La puissance transmise dans la salle de réception utilise la relation entre la puissance W d'une source et la pression

$$\frac{\overline{\langle p_2^2 \rangle}}{\rho_0 c} = W\left[\frac{Q}{4\pi r^2} + \frac{4(1-\overline{\alpha})}{A}\right]$$

r distance à la source de facteur de directivité Q et de puissance W
$\overline{\alpha}$ coefficient d'absorption moyen des parois du local de réception
$A = \overline{\alpha}\, S$ aire d'absorption de la salle de réception

Comme la salle de réception est très réverbérante *($\overline{\alpha}$ est faible)*

$$\frac{4(1-\overline{\alpha})}{A} \approx \frac{4}{A}$$

et les mesures se font dans la zone où le champ diffus domine

$$W_{\text{tran}} = \frac{\overline{\langle p_2^2 \rangle}}{\rho_0 c}\frac{A}{4}$$

ainsi le facteur de transmission peut s'exprimer par

$$\tau = \frac{W_{\text{tran}}}{W_{\text{inc}}} = \frac{\overline{\langle p_2^2 \rangle}}{\rho_0 c}\frac{A}{4} \Bigg/ \frac{\overline{\langle p_1^2 \rangle}}{\rho_0 c}\frac{S_p}{4}$$

et l'indice d'affaiblissement acoustique par

$$R = L_{W_{\text{inc}}} - L_{W_{\text{tran}}} = \overline{L}_{p_1} - \overline{L}_{p_2} + 10\log\frac{S_p}{A}$$

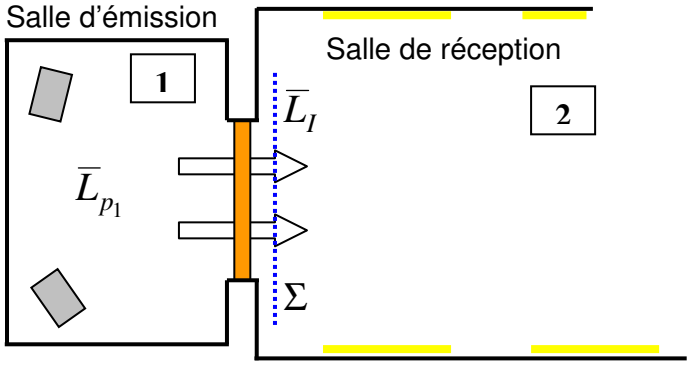
Cette méthode demande des équipements importants (volumes des salles de l'ordre de 200 m^3). Les salles doivent être désolidarisées pour éviter les transmissions vibratoires latérales.

3.2 – Méthode intensimétrique

Une seule salle d'émission réverbérante est utilisée pour créer le champ diffus incident. La puissance transmise est mesurée par intensimétrie sur une surface de mesure Σ située devant la paroi (de surface S_p)

$$W_{\text{tran}} = \bar{I}_n \, \Sigma$$

avec $\bar{I}_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(I_n)_i$ l'intensité moyenne mesurée sur Σ en N points

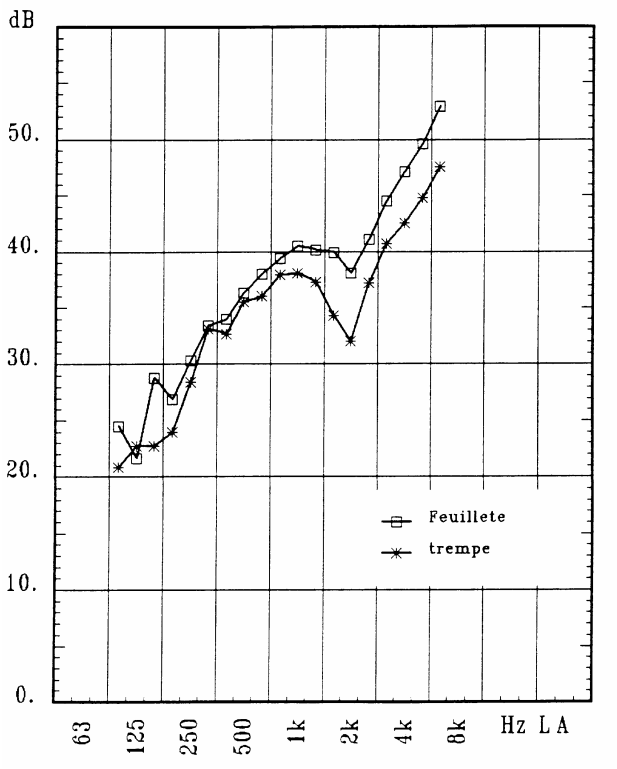


Le facteur de pertes de transmission

$$\tau = \frac{W_{\text{tran}}}{W_{\text{inc}}} = \bar{I}_n \, \Sigma \Bigg/ \frac{\overline{\langle p_1^2 \rangle}}{\rho_0 c}\frac{S_p}{4}$$

et l'indice d'affaiblissement

$$R = L_{W_{\text{inc}}} - L_{W_{\text{tran}}} = \overline{L}_{p_1} - \overline{L}_I + 10\log\frac{S_p}{\Sigma} - 6$$



Indices d'affaiblissement de vitrages de 8 mm en verre trempé et en verre feuilleté mesurés par la méthode intensimétrique
(0,84 x 0,84, montage par joint à clé en caoutchouc)

3.3 – Mesures comparatives en petite cabine

Cette méthode pour caractériser la transparence acoustique des parois est utilisée dans le domaine de l'automobile (*méthode d'essai PSA D45 5038 ou 1463*).

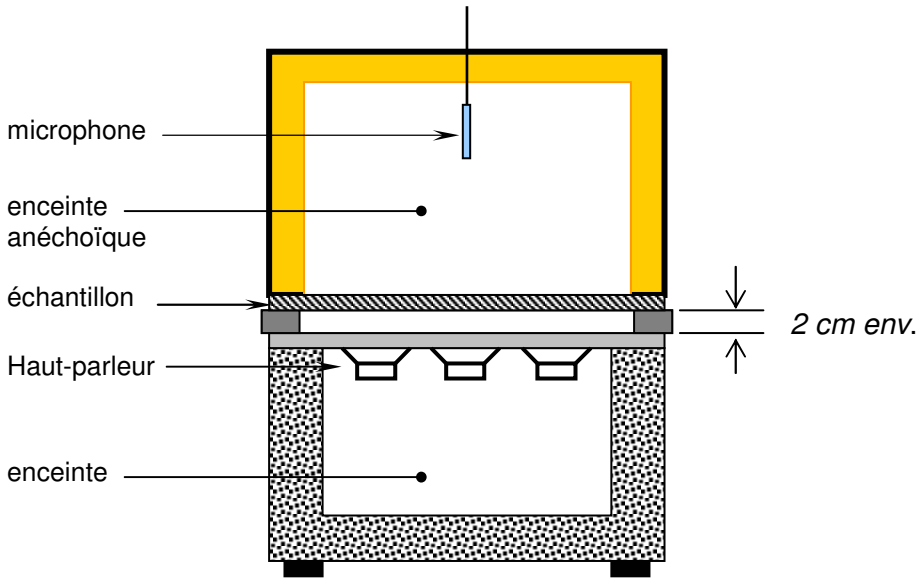


Figure – Schéma de principe du dispositif d'essai nommé "petite cabine".



Figure – Petite cabine avec vue du porte-échantillons..

L'échantillon de matériau à tester est excité par une onde acoustique produite par des haut-parleurs disposés à environ 2 cm. La mesure du niveau sonore se fait par un microphone placé dans l'enceinte anéchoïque supérieure. Le matériau est caractérisé par rapport à un **échantillon de référence** (plaque d'acier de 1 cm d'épaisseur par exemple, dont l'indice d'affaiblissement est connu).

Remarque

Le résultat obtenu n'est pas l'indice d'affaiblissement acoustique, car le champ incident ne correspond pas à un champ diffus (la composante normale semble prépondérante, surtout dans les basses fréquences), et la puissance acoustique transmise n'est pas directement mesurée. Cependant, des résultats obtenus dans des conditions identiques peuvent êtres comparés entre eux.

4 - DETERMINATION DE LA PUISSANCE ACOUSTIQUE

Il existe principalement 3 groupes principaux de méthodes qui sont représentés dans les normes :

- l'utilisation des **salles réverbérantes** et du modèle de Sabine qui définit la relation entre la pression mesurée dans le champ diffus, la puissance acoustique de la source et la caractéristique d'absorption de la salle,

  ISO 3741, 3742, 3743 : $W = \dfrac{\overline{\langle p_R^2 \rangle}}{\rho_0 c} \dfrac{R}{4}$

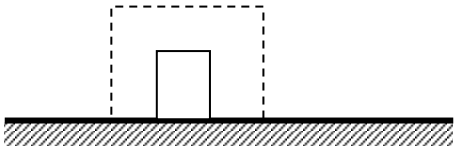
- l'utilisation de l'**intégrale du flux** en faisant l'hypothèse d'une relation entre l'intensité acoustique normale et la **pression quadratique** sur l'enveloppe de mesure,

  ISO 3744, 3745, 3746 : $W \approx \oiint_S \dfrac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} dS$

- l'utilisation de l'**intégrale du flux** avec mesure directe de l'**intensité acoustique** normale.

  ISO 9614-1 et 2 : $W = \oiint_S I_n \, dS$

<u>Remarques</u> :
La puissance acoustique doit toujours être déterminée sur une enveloppe de mesure fermée. Souvent l'enveloppe est fermée sur une surface rigide (*aucun flux ne la traverse*)



Les normes utilisant des mesures de pression acoustique pour déterminer la puissance des sources considèrent que $I_n \approx \langle p^2 \rangle / \rho_0 c$

$\langle p^2 \rangle = p_{eff}^2$ *: pression quadratique ou pression efficace au carré*

$\rho_0 c$ *: impédance caractéristique de l'air.*

Cette approximation, employée dans les normes **ISO 3744** à **3746**, se trouve vérifiée dans le cas d'une petite source entourée d'une surface hémisphérique et en l'absence de sources perturbatrices. En effet, la pression quadratique (grandeur scalaire) ne permet pas de faire le bilan du flux entrant et du flux sortant pour annuler la contribution d'une source parasite extérieure :

$$\oiint_\Sigma \frac{\langle p_{ext}^2 \rangle}{\rho_0 c} d\Sigma \neq 0 \quad \textbf{et} \quad \oiint_\Sigma \left[\underbrace{\frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c}}_{\substack{\text{source} \\ \text{intérieure}}} + \underbrace{\frac{\langle p_{ext}^2 \rangle}{\rho_0 c}}_{\substack{\text{source} \\ \text{extérieure}}} \right] d\Sigma \quad >> \quad W$$

4.1 – Mesures en salles réverbérantes (ISO 3741-3743)

La détermination de la puissance acoustique en salle réverbérante est basée sur la relation qui existe en champ diffus entre le niveau de pression et la puissance acoustique

$$\frac{\overline{\langle p_R^2 \rangle}}{\rho_0 c} = \frac{4W}{R}$$

Comme la constante R d'une salle réverbérante correspond sensiblement à son aire d'absorption A, on la détermine simplement à partir de la formule de Sabine, d'où l'expression de la puissance acoustique de la source

$$W = \frac{\overline{\langle p_R^2 \rangle}}{\rho_0 c}\frac{A}{4} = \frac{\overline{\langle p_R^2 \rangle}}{\rho_0 c}\frac{0{,}04\,V}{T_R}$$

qui peut s'exprimer aussi en décibel par

$$L_W = \overline{L}_p + 10\log\frac{A}{A_0} - 6 \qquad [\text{dB}]$$

ou

$$L_W = \overline{L}_p - 10\log\frac{T_R}{T_0} + 10\log\frac{V}{V_0} - 14 \qquad [\text{dB}]$$

avec A_0 l'aire de référence de 1 m^2, T_0 le temps de réverbération de référence de 1 s, V_0 le volume de référence de 1 m^3. $\overline{L}_p$ correspond au niveau de pression moyen mesuré en plusieurs points distants entre eux et des parois d'au moins $\lambda/2$ (un bras tournant peut aussi être employé).

Cependant, des écarts systématiques ont été observés dans les basses fréquences entre les puissances acoustiques déterminées en champ libre (salle anéchoïque) et celles déterminées en salle réverbérante. Ces dernières sont sous-estimées. L'explication qui en est donnée est que la densité d'énergie est plus importante près des parois. Pour compenser cet effet, un terme correctif est ajouté (**correction de Waterhouse**)

$$L'_W = L_W + 10\log\left(1 + \frac{\lambda S}{8V}\right)$$

avec S la surface totale des parois et V le volume de la salle. On remarque que ce terme correctif ajoute 3 dB à la puissance acoustique mesurée quand la demi-longueur d'onde acoustique est équivalente au libre parcours moyen de la salle.

4.2 – Mesures en salles plus ou moins absorbantes (ISO 3744-3747)

La mesure du flux total sur une surface fermée, approchée par la pression quadratique,

$$W \approx \oiint_S \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} dS$$

est réalisée

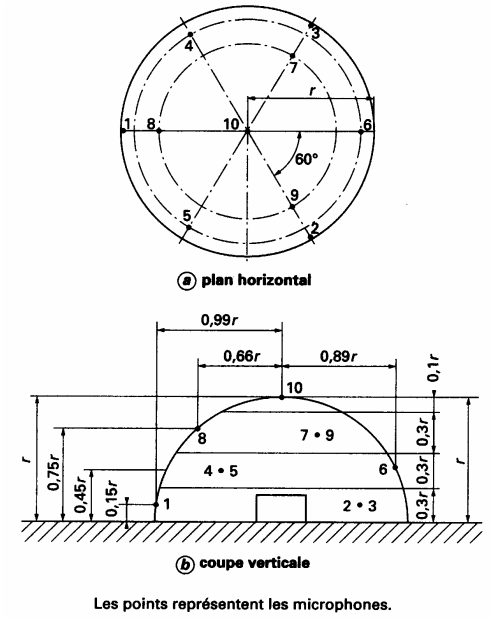
- en plein air ou dans des grands locaux (ISO 3744),
- en salle anéchoïque ou semi-anéchoïque (ISO 3745),
- dans un environnement d'essai quelconque (ISO 3746).

La surface de mesure est discrétisée

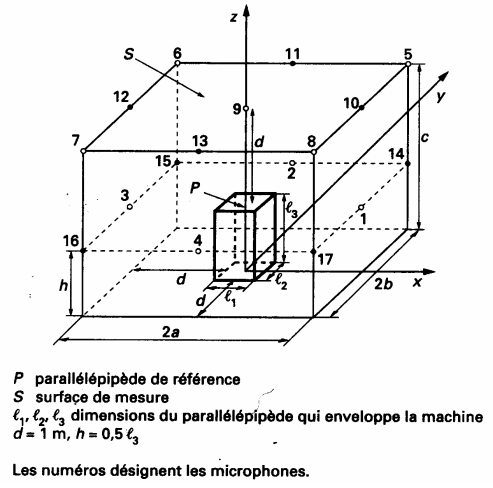
$$L_W = \overline{L}_p + 10\log\frac{S}{S_0}$$

avec $S_0 = 1\,\mathrm{m}^2$ et le niveau de pression moyen sur N points de mesure

$$\overline{L}_p = 10\log\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 10^{\frac{Lp_i}{10}}\right)$$



Surface hémisphérique pour une mesure en salle anéchoïque (ISO 3745)

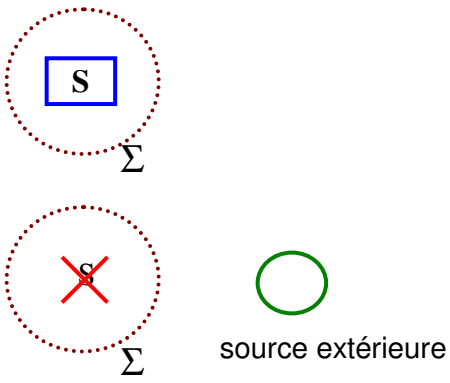


Surface parallélépipèdique pour une mesure selon ISO 3746

4.3 – Mesures intensimétriques (ISO 9614)

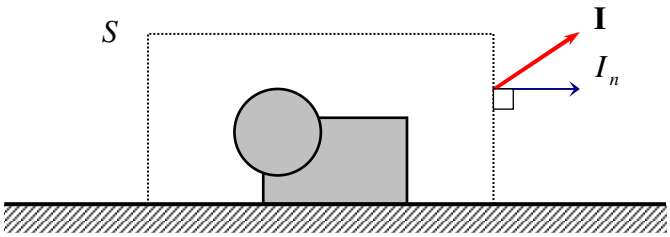
Si la source est située à l'extérieur de la surface fermée sur laquelle est mesurée la puissance acoustique, le bilan du flux sur la surface est nul (th. de Gauss)

$$\oiint_{\Sigma} I_n \, d\Sigma = \begin{cases} W \\ 0 \end{cases}$$



La puissance acoustique est estimée sur une enveloppe de mesure discrétisée

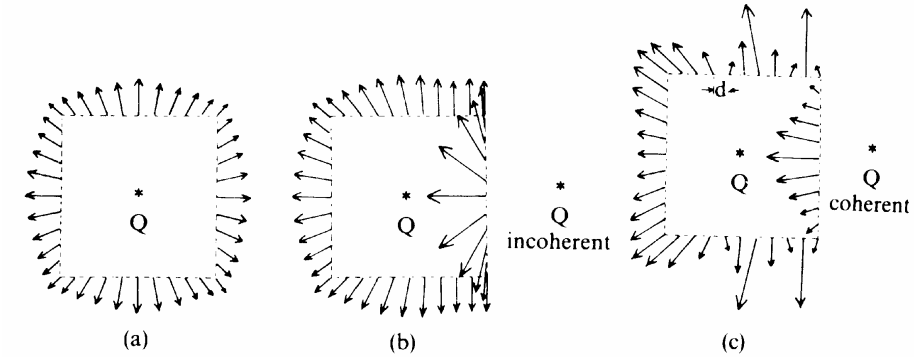
$$W = \overline{I_n}\, S$$



La composante normale I_n peut être mesurée à l'aide d'un **intensimètre** à deux microphones (norme ISO 9614-1 et 2) sur N points répartis sur la surface de mesure S

$$\overline{I_n} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(I_n)_i \qquad [\mathrm{W/m^2}]$$

La discrétisation doit être suffisante pour prendre en compte les fluctuations spatiales apportées par une source extérieure (b).



Dans le cas où les deux sources sont **cohérentes** (c), les interférences augmentent ces fluctuations. Le bilan des flux entrants et sortants ne s'équilibre pas parfaitement pour la source extérieure et conduit à des incertitudes (valeurs négatives pour certaines fréquences).

NORMES ISO 9614

Détermination par intensimétrie des niveaux de puissance acoustique émis par les sources de bruit

$$L_W = L_{I_n} + 10\log S \qquad \text{avec} \quad L_{I_n} = 10\log\frac{\bar{I}_n}{10^{-12}} \quad [\mathrm{dB}]$$

Partie 1 : Mesurages par points

La norme définie des ***indicateurs*** calculés à partir des mesures :

F_1 indicateur de variabilité temporelle

C'est l'écart-type relatif $\varepsilon[I_n]$ de M mesures successives de l'intensité en un même point *représentatif* de la surface de mesure.

F_2 indicateur d'écart surfacique $F_2 = \overline{L}_p - \overline{L}_{|I_n|}$

Différence entre le niveau de pression moyen et le niveau du module $|I_n|$ moyen sur la surface de mesure.

F_3 indicateur de puissance élémentaire négative $F_2 = \overline{L}_p - \overline{L}_{I_n}$

Différence entre le niveau de pression moyen et le niveau d'intensité moyen sur la surface de mesure.

F_4 indicateur d'hétérogénéité du champ

Ecart-type relatif sur les mesures d'intensité acoustique en N points utilisées pour calculer la puissance.

La mesure doit satisfaire à des critères de qualification qui conduisent ensuite à la classe de précision

classe		écart-type	
1	Laboratoire	1 à 2 dB	selon les bandes de 1/3 octave
2	Expertise	2 à 3 dB	
3	Contrôle	4 dB(A)	pondéré A

Des critères permettent d'entreprendre des actions correctives pour atteindre une classe ou simplement qualifier les mesures

$F_1 > 0{,}6$	réduire la variabilité temporelle (environnement, durée du mesurage, …)
$F_2 > L_d$ ou $F_3 - F_2 > 3\,\text{dB}$	réduire l'influence des sources parasites (distance source-point de mesure, réflexions, …)
critère lié à F_4	augmenter le nombre de points N

<u>Partie 2 : Mesurage par balayage</u>

La sonde est déplacée en continu durant la mesure sur une partie de la surface de mesure. Des indicateurs semblables à F_2 et F_3 sont utilisés.

[ANNEXE] *Imagerie acoustique*

De nombreuses techniques de mesure sont actuellement disponibles pour permettre de réaliser une imagerie acoustique des sources industrielles, pour permettre à l'ingénieur de mieux comprendre les phénomènes de rayonnement et de couplage vibroacoustique. D'autres sont encore au stade du développement dans les laboratoires de recherche.

1. L'intensimétrie acoustique

La technique des deux microphones qui permet d'obtenir une composante du vecteur intensité acoustique est utilisée avec un ***robot*** pour déplacer la sonde. Le balayage devant une structure mécanique permet de visualiser la carte des puissances rayonnées pour localiser les zones à traiter (fuites acoustiques ou sources vibroacoustiques). Pour obtenir toutes les composantes du vecteur intensité et produire une vraie image vectorielle, une sonde à quatre ou six microphones doit être employée.

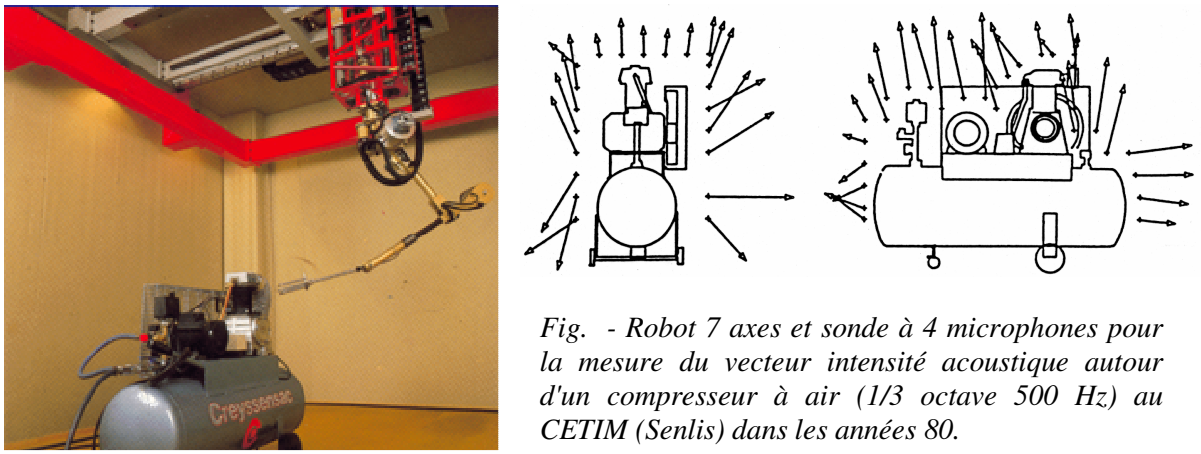


Fig. - Robot 7 axes et sonde à 4 microphones pour la mesure du vecteur intensité acoustique autour d'un compresseur à air (1/3 octave 500 Hz) au CETIM (Senlis) dans les années 80.

Cette méthode permet par exemple l'analyse du comportement vibroacoustique (transparence, rayonnement et fuite) d'une portière de véhicule. La ***nature vectorielle de l'intensité*** acoustique permet alors d'obtenir une ***image du rayonnement*** mais un maillage dense est nécessaire pour une bonne représentation. Beaucoup d'exemples illustrant cette technique sont donnés dans le livre de F. J. Fahy.

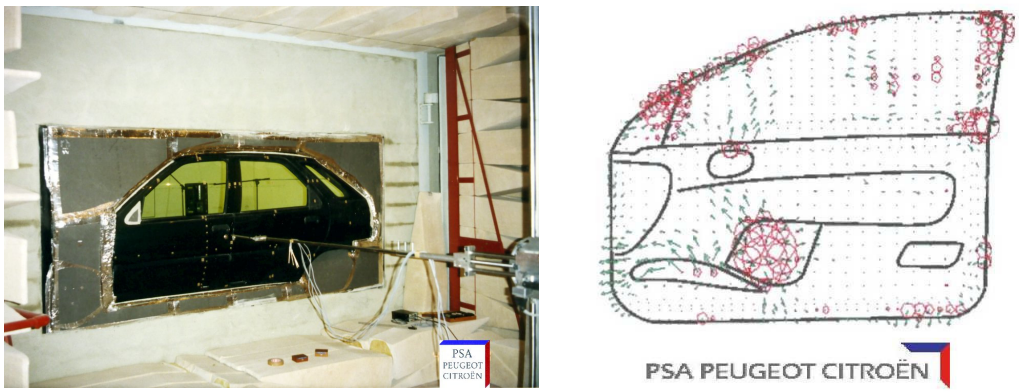


Fig. - Mesures intensimétriques pilotées par robot réalisées au CTTM du Mans en collaboration avec PSA pour l'optimisation d'une portière de véhicule (Doc. CTTM).

2. *Méthodes d'antennerie ou "beamforming"*





Fig. – Antennes additives linéaire (Doc. INRET) et en étoile (Doc. SNCF) pour l'analyse des sources mobiles.

Un réseau de microphones permet une acquisition simultanée du signal. Les déphasages des microphones sont ajustés pour compenser des différences de temps de parcours en fonction de la position supposée de la source (point de focalisation de l'antenne). En ajoutant les signaux de sortie des microphones avec des déphasages et des pondérations différentes on modifie la réponse de l'antenne. Cette technique a été beaucoup employée en acoustique sous-marine (beamforming ou formation de voies). Ses principales caractéristiques sont dictées par des considérations physiques simples : l'écartement entre capteur doit être inférieur à la demi-longueur d'onde de la fréquence la plus élevée et la résolution de l'antenne (ouverture du lobe principal) dépend de son envergure. Aussi ce sera le ***nombre maximal de microphones*** utilisable qui limitera les performances du système (en pratique de 16 à 64). Les lobes secondaires vont faire que la sensibilité de l'antenne ne sera pas nulle dans les directions autres que celle de son lobe principal. L'hypothèse d'un ***ensemble de sources monopolaires ponctuelles*** est généralement faite pour construire l'image de la source.

De nombreuses réalisations ont vu le jour, en particulier pour la caractérisation du bruit de jet ou pour isoler les sources de bruit sur les engins de transport terrestres. Une des applications les plus importantes est sans doute l'analyse des contributions acoustiques présentes dans le bruit de passage d'un véhicule (le suivi de la source s'effectue en faisant varier la distance du point de focalisation en fonction du temps pour accompagner un point sur le véhicule).

3. *Méthodes d'holographie acoustique*

Aucune hypothèse sur les sources n'est nécessaire pour l'holographie acoustique car c'est en fait une technique de ***reconstruction de champ acoustique***. Les sources peuvent être identifiées et décrites en reconstruisant le champ acoustique à la surface de l'objet. Cette technique, apparue au début des années 80, utilise uniquement des solutions générales de l'équation des ondes. De nombreuses variantes de ce principe dépendent du domaine de propagation :

a) dans le domaine extérieur sur des surfaces planes, cylindrique ou sphériques,
b) dans le domaine extérieur pour des géométries quelconques,
c) dans le domaine intérieur (habitacles).

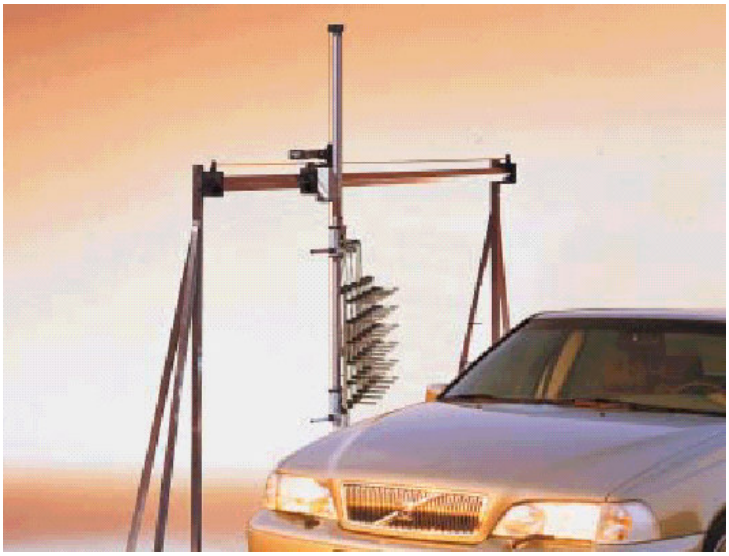
et de la nature du signal acoustique reçu par les microphones :

i) émission sonore stationnaire,
ii) émission sonore fluctuante (par exemple au cours de montées en vitesse),
iii) émission sonore de sources mobiles.

La méthode doit satisfaire à des conditions d'échantillonnage très strictes du champ de pression et de l'envergure de l'antenne dépend la résolution spatiale de l'analyse : ces contraintes conduisent à un ***nombre important de microphones*** (une centaine à un millier). Les différentes méthodes d'holographie acoustique sont décrites dans la partie suivante.

Jusqu'à aujourd'hui, les applications industrielles de l'holographie acoustique se sont surtout développées pour l'holographie en géométrie plane: une antenne plane dans le champ proche de la source permet de reconstruire un champ sur un plan tangent à l'objet à étudier. En espace libre à une fréquence f_0, un champ acoustique quelconque qui arrive sur un plan d'observation peut être représenté par la somme d'une infinité d'ondes planes. L'outil qui permet d'en faire la décomposition est la transformée de Fourier spatiale 2D (TFS2D) du champ de pression échantillonné par l'antenne de microphones. Les ondes élémentaires résultant de cette décomposition peuvent individuellement être propagées de part et d'autre du plan de l'antenne. Le champ sur le "plan source" est obtenu en faisant la synthèse de toutes les composantes rétro-propagées sur ce plan par transformés de Fourier spatiale inverse (invTFS2D). Malgré la relative simplicité de son principe, la technique d'holographie acoustique réclame des algorithmes de traitement sophistiqués.

Si l'émission sonore de l'objet à étudier est stationnaire, il ne sera pas nécessaire de faire l'acquisition simultanément sur tous les points du maillage. Un nombre réduit de microphones peut-être déplacé pour couvrir successivement la source, en conservant une référence de phase.



Le traitement pour les sources fixes dont l'émission sonore est fluctuante ou transitoire n'est pas fondamentalement différent de celui des sources stationnaires et s'effectue toujours dans le domaine spectral, mais les mesures doivent être réalisées simultanément sur une grande antenne de microphones.

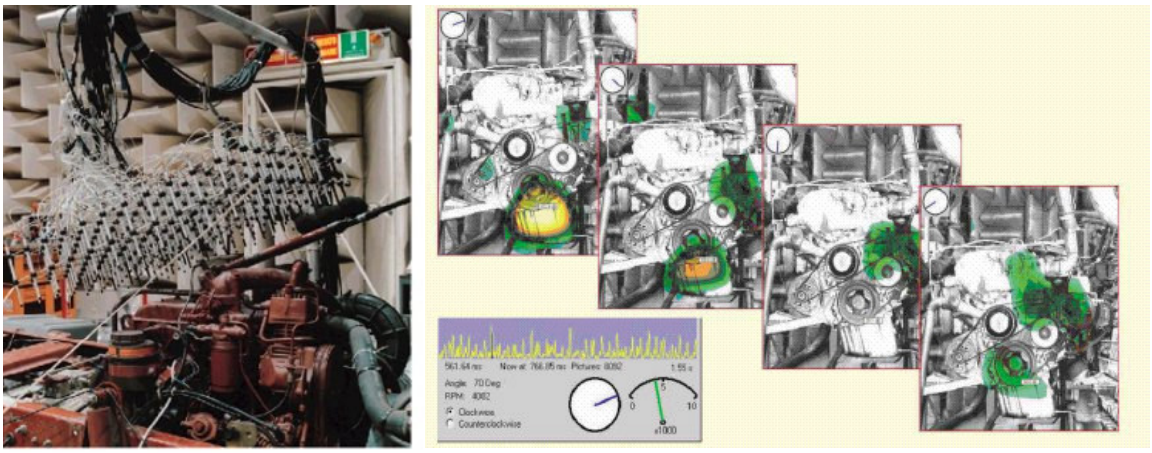


Fig. – Antenne acoustique pour une acquisition en parallèle des nombreuses voies nécessaires à la reconstruction des sources fluctuantes (Doc. BK) et reconstruction de l'intensité acoustique normale en 4 instants du cycle d'une transmission par courroie crantée à 4000 tr/mn.

Aujourd'hui, les systèmes d'analyse utilisent seulement une centaine de microphones pour des contraintes techniques et budgétaires, ce qui limite actuellement cette approche à de petites sources ou à de très basses fréquences.

Des recherches s'attachent actuellement à traiter la reconstruction du champ vibratoire sur des éléments mécaniques de formes quelconques à partir de microphones disposés autour de la source. Ces analyses qui utilisent le plus souvent des antennes planes disposées autour de l'objet, mais peuvent être aussi effectuées à l'aide d'une antenne cylindrique ou sphérique qui entoure la source. Cependant, malgré l'utilisation de méthodes de régularisation, le problème inverse est souvent délicat à résoudre, car le résultat est très sensible aux diverses imprécisions dans la réalisation des mesures et dans la caractérisation de la matrice de transfert source-antenne.

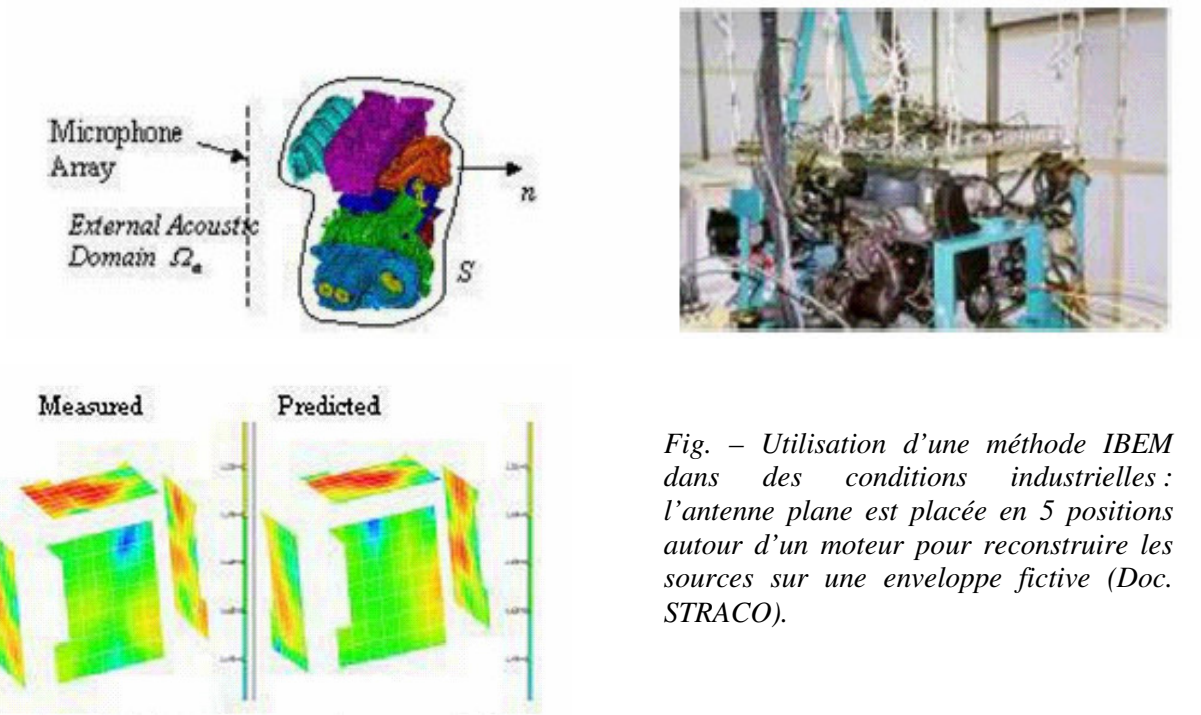


Fig. – Utilisation d'une méthode IBEM dans des conditions industrielles : l'antenne plane est placée en 5 positions autour d'un moteur pour reconstruire les sources sur une enveloppe fictive (Doc. STRACO).

Vous pouvez me contacter par e-mail à

jean-claude.pascal@univ-lemans.fr

pour me faire part des erreurs constatées sur ce document ou pour toutes suggestions. Merci d'avance.