Licence Professionelle Ingenieurie Acoustique et Vibratoire

Mécanique : Mécanique des solides

http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95

Jean-Michel Génevaux, Jean-Pierre Dalmont

5 janvier 2012

Table des matières

1 Méthode **5**

2 dictionnaire **9**

3 Examens des années précédentes **11**
3.1 Janvier 2012 11

4 La mécanique des milieux continus **13**
4.1 Un vitrail de cathédrale, un fluide qui s'ignore ? 13
4.2 Les cinématiques d'un volume représentatif 14
4.2.1 Pour un solide 14
4.2.2 Pour un fluide 15
4.3 Les états de déformation d'un volume représentatif 15
4.3.1 Pour un solide 15
4.3.2 Pour un fluide 18
4.4 Les états de contrainte d'un volume représentatif 19

5 La mécanique des solides **21**
5.1 L'outil de base franco-français : le torseur 21
5.2 La mécanique des solides indéformables 22
5.3 L'élasticité tridimensionnelle linéaire isotrope 22
5.4 L'élasticité unidimensionnelle linéaire isotrope pour poutres droites, alias "la résistance des matériaux" ou "théorie des poutres" 23
5.4.1 Sollicitation simple : traction-compression 26
5.4.2 Sollicitation simple : flexion pure 31
5.4.3 Sollicitation simple : torsion 39
5.4.4 Sollicitation simple : cisaillement 43
5.4.5 Sollicitation composée : flexion simple 43
5.4.6 Sollicitations composées : la totale ! 50

Chapitre 1

Méthode

L'objectif de cet enseignement est de familiariser l'étudiant de licence professionnelle Ingéniérie Acoustique et Vibratoire à la mécanique. Elle sera ici statique pour les solides et statique ou en régime permanent pour les fluides. D'autres modules vous parleront de dynamique vibratoire dans les solides ou dans les fluides.

Ce polycopié est commun aux étudiants en formation classique et ceux en formation par alternance.

calculer les vibrations d'un corps solide indéformable à un seul degré de liberté, et d'étendre cette connaissance au cas de système ayant un nombre fini de degrés de liberté.

Ce cours pour les étudiants en alternance sera basé sur des nombreux exercices appelés *brevets* testant une compétence particulière. Ils sont rassemblés dans un document appelé *banque de brevet*.

Le parcours de formation peut être résumé dans une branche d'un arbre des connaissances (figures 1.1). A chaque item, est associé un brevet.

Chaque séance d'enseignement se déroulera comme suit :

- les 10 premières minutes sont consacrées à une lecture silencieuse du polycopié de cours,
- l'enseignant répond ensuite aux éventuelles questions afin d'éclaircir des points du cours,
- en-dehors de la présence de l'enseignant, pendant 1 heure, les étudiants par groupes de 4, travaillent alors en autonomie sur les brevets correspondants aux parties de cours déjà lues. Une enveloppe "joker" par brevet est à disposition des étudiants qui tentent un brevet qui n'a été obtenu encore par aucun d'entre eux.
- l'enseignant revient ensuite pour aider les étudiants.
- en fin de chaque séquence, pour les brevets nouvellement acquis par le groupe, un étudiant-référent est proposé. La liste des référents des brevets est disponible sous : *http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95* rubrique "tableau des référents".

Pour chaque brevet, les brevets obtenus précédemment seront appelés *parents*, les brevets suivants seront appelés *descendants*. L'ordre dans lequel chaque étudiant obtient des brevets est appelé *blason*. L'ensemble des liens entre les brevets, construit à partir des blasons de chaque individu, est appelé *arbre des connaissances* (voir fr.wikipedia.org/wiki/Arbre de connaissances).

Pour vous guider lors de votre formation, le plan de formation, les blasons des

autres étudiants et l'arbre des connaissances vous seront accessibles :

- si vous ne réussissez pas à obtenir un brevet, vous pouvez demander de l'aide à l'enseignant (il est là pour cela), à l'étudiant référent de ce brevet (cela lui fera plaisir et lui fera assimiler encore mieux le concept),... ou en désespoir de cause tenter un brevet parent de celui-ci.
- si vous réussissez à obtenir un brevet, pour choisir le brevet fils à tenter, vous pouvez suivre le déroulement du polycopié ou vous repérer dans l'arbre des connaissances du groupe.

Nous vous souhaitons une bonne collaboration entre vous. Au delà des nombreuses questions scientifiques, n'hésitez pas à nous faire part de vos remarques et suggestions pour améliorer cette méthode de travail.

Jean-Michel Génevaux, Jean-Pierre Dalmont
jmgenev@univ-lemans.fr,
jean-pierre.dalmont@univ-lemans.fr

Attention ! Ne tentez pas d'obtenir les brevets de la banque de brevets dans l'ordre de leur numérotation.

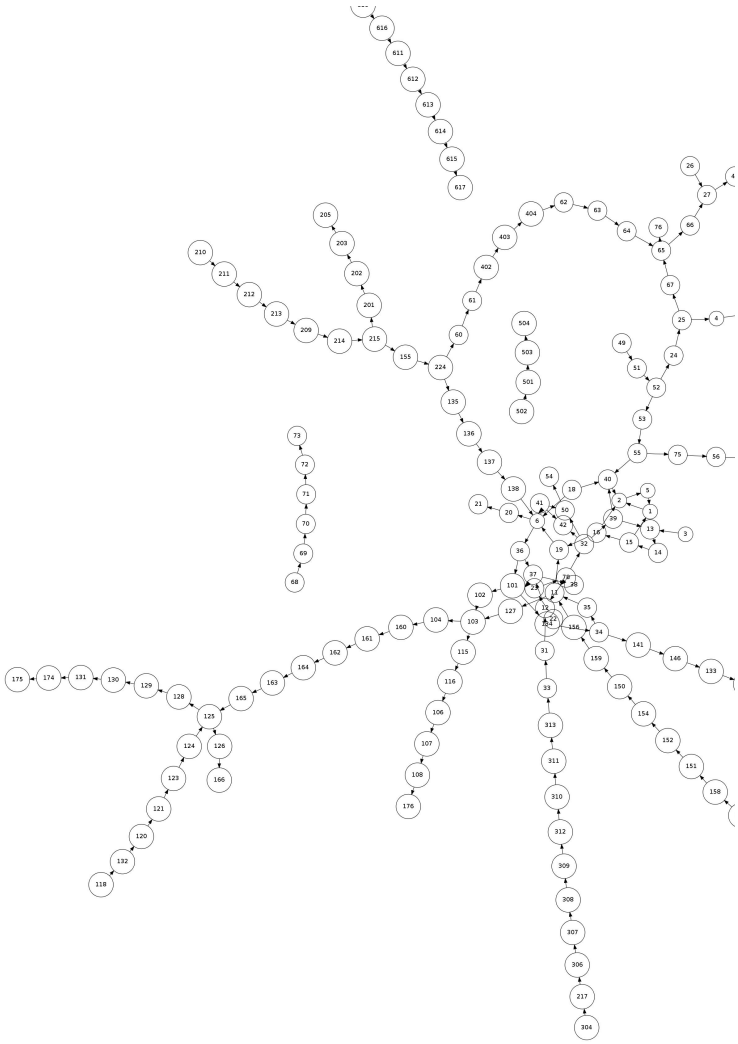


FIGURE 1.1 – L'arbre des connaissances et la branche de mécanique.

Chapitre 2

dictionnaire

Il peut vous être utile de connaître les termes spécifiques à la mécanique en anglais. Voici donc une sélection de termes.

acéré	spiky
appuyé simplement	simply supported
coalescer	to coalesce
encastré	clamped
être à divergence nulle	to be divergence-less
isotherme	isothermal
l'abaque	the chart
la bobine	the coil
la dispersion	the scatter
la fréquence de pompage	the pump frequency
la fréquence de sonde	the imaging frequency
la fréquence supérieure	the overtone
la fuite	the leakage
la ligne nodale	the nodal line
la manche, la pochette, l'alésage	the sleeve
la poutre	the beam
la pulsation	the angular frequency
la rainure	the groove
la rugosité	the ruggedness
la variable muette	the dummy variable
le flux entrant	the inward flow
le flux sortant	the outward flow
le jeu	the clearance
le module d'Young	the modulus of elasticity
le ventre de vibration	the antinode
les conditions aux limite	the boundary conditions
libre	free edge
se contracter	to shrink
serré	tight
tendu	taut

Chapitre 3

Examens des années précédentes

3.1 Janvier 2012

Un réservoir cylindrique 0 à base circulaire de rayon $r_1 = 0.3$ m d'épaisseur de paroi e_0, est rempli partiellement d'eau (voir figure 3.1) de masse volumique $\rho = 1000$ kg.m^{-3}. L'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ est dans la direction $-\vec{y}$. A une distance h_1 de la surface libre, est positionnée au point C une vanne de vidange. La vanne 2 est constituée d'un cylindre à base circulaire de rayon $r_2 = 0.01$ m de longueur $l_2 = 5$ m. Elle est en acier et pourra être considérée comme déformable avec un module de Young $E = 2.110^{11}$ Pa et un coefficient de Poisson $\nu = 0.28$. Pour assurer l'étanchéité, l'extrémité du cylindre 2 est conique avec un 1/2 angle au sommet $\alpha = \pi/4$. Le positionnement dans la direction $\vec{x}$ de la pièce 2 est assurée par une cale 3 d'épaisseurs variables, qui prend appuis sur la bâti 0.

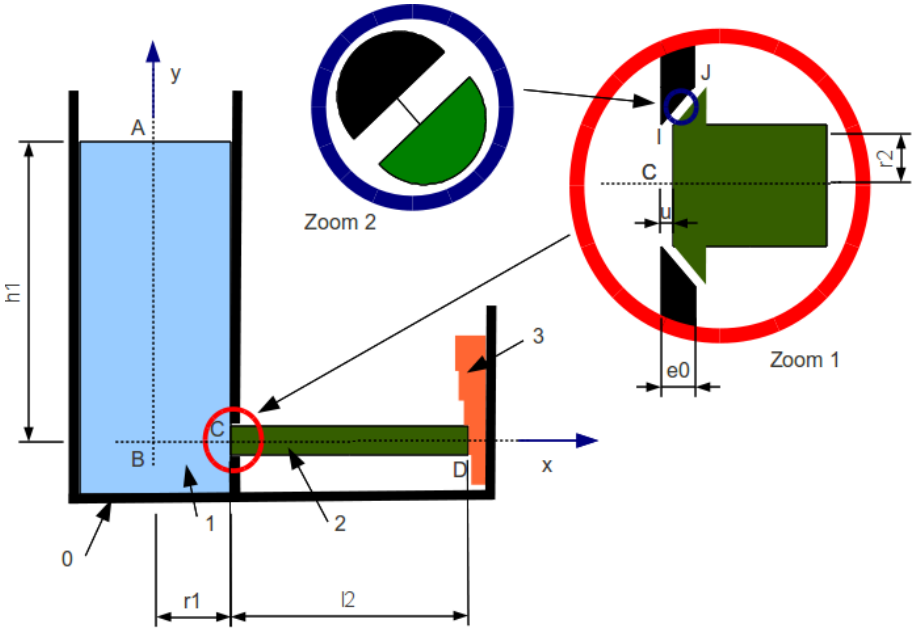


FIGURE 3.1 – Un réservoir et sa vanne de vidange.

1. Le réservoir est vide. La vanne 2 est fermée par le choix approprié de l'épaisseur de la cale 3. Dans ce cas, la distance u entre la surface intérieur de la paroi du réservoir 0 et la surface de la vanne 2 à l'extrémité de normale sortante $-\vec{x}$ est nulle. On considèrera que l'ajustement est parfait, et donc qu'il n'y a aucun effort de mise en contact de la pièce 2 sur la base conique du réservoir 0. Le réservoir est alors rempli d'eau tel que $h_1 = 3$ m. Quelle est la pression p_C au point C ?
2. Sous l'effet de cette pression, une force $\vec{F}$ est appliquée par l'eau sur la vanne 2 au point C. Donnez le module et la direction de cette force.
3. Si le poids de la vanne 2 est négligée par rapport à cette force $\vec{F}$, en isolant la vanne 2, faites le bilan des actions qui s'exercent sur cette vanne, puis donnez les actions de la pièce 3 sur la pièce 2.
4. Soit un point M à l'intérieur de la pièce 2. Montrez que un tenseur des contraintes de la forme,

$$\bar{\bar{\sigma}} = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \tag{3.1}$$

   vérifie les conditions aux limites sur la surface en contact avec l'eau et sur la surface latérale de rayon r_2. Quelle est la valeur de σ_{xx} ?
5. Donnez les valeurs de 9 composantes du tenseur des déformations au point M

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \left[\begin{array}{ccc} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \tag{3.2}$$

6. Ces déformations se cumulent tout le long du cylindre 2 entre le point C et le point D. Le point D peut être considéré comme immobile. Quelle est la valeur du déplacement u dans la direction $\vec{x}$ de l'extrémité C de la vanne 2 ?
7. Du fait de la valeur de u, une fuite apparaît entre les surfaces coniques du réservoir 0 et de la vanne 2. Si v_I est la vitesse moyenne dans la section passant par le point I et v_J celle dans la section passant par le point J, donnez le ratio $\frac{v_J}{v_I}$ en considérant que $e_0 = r_2$.
8. Si le fluide est considéré comme parfait, quel est le module de la vitesse v_J ?
9. Le débit de fuite q_v est-il proportionnel à h_1 ? à r_1 ?
10. Si le fluide est considéré comme visqueux, avec comme viscosité dynamique $\mu = 10^{-3}$ Pa.s, quel est le nombre de Reynolds Re dans le gap entre les surfaces coniques du bâti 0 et de la vanne 2 ?
11. Quel est le profil du champs de vitesse entre ces deux surfaces, c'est à dire le long de la ligne fine du zoom 2 ?
12. Si vous vouliez calculer les pertes de charge dans ce gap (ne pas le faire), considéreriez-vous des pertes de charges singulières ou régulières ? Justifiez votre choix.

Chapitre 4

La mécanique des milieux continus

4.1 Un vitrail de cathédrale, un fluide qui s'ignore ?

La mécanique est la science du mouvement. Elle est une branche de la physique, car elle décrit la matière à une échelle supérieure aux molécules, aux atomes : on parlera d'un volume élémentaire représentatif de matière continue. Si l'objectif est de décrire le mouvement, qui lui est mesurable (la déformation de votre joue), il faudra inventer des causes (la force exercée par le poing d'une brute épaisse fachée contre vous). Deux grandes familles de corps seront ici étudiées : les solides déformables (votre joue) et les fluides (le sang qui s'écoule de votre nez meurtri).

Si l'on considère un volume représentatif dans une base carthésienne (Fig. 4.1), ce sera un parrallélépipède de dimensions infiniments petites dx, dy et dz. Sur chacune des faces de ce parrallélépipède, seront exercées des contraintes notées dans ce cours σ, ayant la dimension d'une force divisée par une surface. En unités du système international, le Pascal (1 Pa=1 N/m^2) avec N le newton et m le mètre.

Ce qui différencie fondamentalement un solide élastique linéaire d'un fluide newtonnien,

- pour le solide, les contraintes sont proportionnelles aux déformations de ce parrallélépipède par rapport à un état initial dit "au repos",
- pour le fluide, les contraintes sont proportionnelles aux vitesses de déformations de ce parrallélépipède.

Volontairement, notre cours se limitera à ces deux modèles simplistes, et nous éviterons, sans doute pour votre plus grande joie, d'aborder la viscoélasticité, les

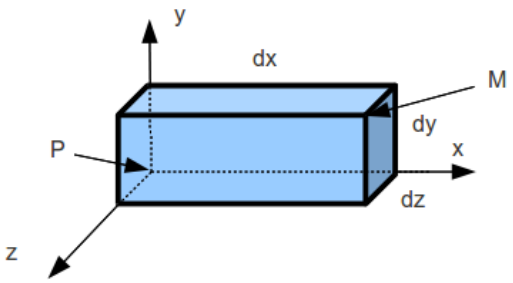


FIGURE 4.1 – Volume élémentaires représentatif.

fluides à seuil, les transitions vitreuses... On ne vous parlera pas de l'épaisseur de vitraux anciens de nos cathédrales, plus grande en bas que en haut : le verre est un fluide qui s'écoule lentement.

Nous resterons aussi dans des repères carthésiens. De ce fait, confusion sera faite, et nous nous en excusons, entre grandeur intrinsèque et matrice associée à cette grandeur lorsqu'elle est exprimée dans une base. Les expressions des gradients, divergence, rotationnels dans des repères cylindriques ou sphériques, sont évidemment différentes. Les équations intrinsèques restent valides, leurs expressions dans une base donnée change. Nous vous invitons, si nécessité, à vous référer à vos enseignements de mathématiques.

4.2 Les cinématiques d'un volume représentatif

4.2.1 Pour un solide

Pour un solide, la grandeur cinématique de référence est le déplacement.

Considérons une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormée directe, associée à un point P dont les coordonnées seront l'origine du repère dans l'état de référence. Soit le parrallélogramme construit à partir du point P, dont les dimensions dans chaque direction sont dx, dy et dz. Soit le point M, le sommet opposé du parrallélépipède tel que à l'état initial $\vec{PM} = dx\vec{x} + dy\vec{y} + dz\vec{z}$. L'état final est caractérisé par un déplacement des points P et M,

$$\vec{u}_p = u_{px}\vec{x} + u_{py}\vec{y} + u_{pz}\vec{z}, \tag{4.1}$$

$$\vec{u}_m = u_{mx}\vec{x} + u_{my}\vec{y} + u_{mz}\vec{z}. \tag{4.2}$$

En considérant les dimensions élémentaires de ce parrallélépipède aussi petites que nécessaire, le mouvement de tout point de ce volume élémentaire sera proportionnel à ses distances par rapport à P. Le mouvement à proximité de P est donc caractérisé par six grandeurs. Elles contiennent (voir figure 4.2) :

- des translations (isovolume) : par exemple une translation dans la direction $\vec{x}$ si $u_{px} = u_{mx}$ et les autres nulles,
- des rotations (isovolume) : par exemple une rotation autour de l'axe $\vec{x}$ d'un angle α infiniment petit, si $\vec{u}_P = 0$, $u_{mx} = 0$, $u_{my} = -\alpha dz$ et $u_{mz} = \alpha dy$ et les autres nulles,

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

- des deformations de dilatation (non isovolume) : par exemple une dilatation dans la direction $\vec{x}$, $\vec{u}_P = 0$ et $\vec{u}_M = adx\vec{x}$,
- des déformations de cisaillement (isovolume) : par exemple un glissement du plan (M,$\vec{z}, \vec{x}$) dans la direction $\vec{x}$, la direction $\vec{y}$ tournant d'un angle γ, alors $\vec{u}_P = \vec{0}$ et $\vec{u}_M = -\gamma dy\vec{x}$,

On notera que sont possibles trois directions de translations, trois axes de rotations, des allongements dans trois directions et des glissements dans trois plans.

Un déplacement est une grandeur vectorielle qui a pour dimension [L], qui s'exprime donc dans le système international en m. Vous veillerez à écrire les grandeurs vectorielles de façon complète, donc sans oublier de préciser la base. Les notations

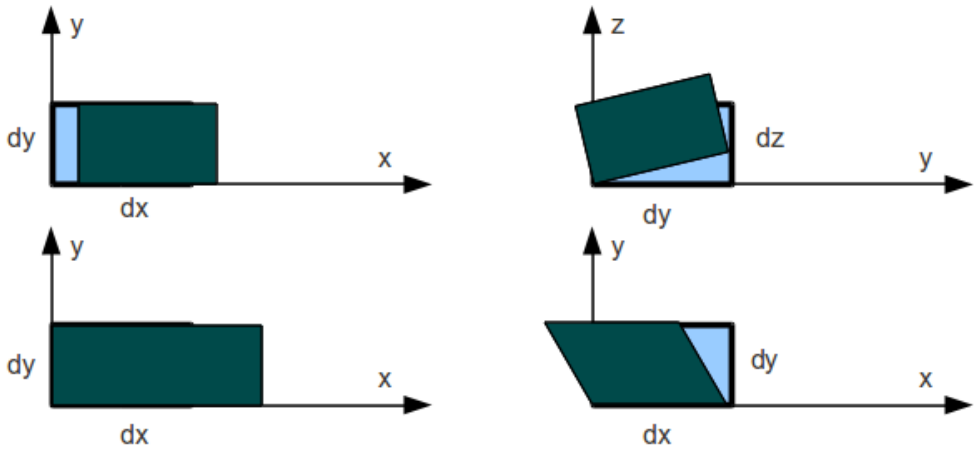


FIGURE 4.2 – Exemples de mouvements élémentaires d'un volume de référence.

acceptées sont :

$$\vec{a}_p = a_x\vec{x} + a_y\vec{y} + a_z\vec{z} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \tag{4.4}$$

4.2.2 Pour un fluide

Pour un fluide, la grandeur cinématique de référence est la vitesse.

On définira donc $\vec{v}_P$ la vitesse d'un point P par rappport à un repère, et $\vec{v}_M$ la vitesse d'un point M tel que $\vec{PM} = dx\vec{x} + dy\vec{y} + dz\vec{z}$. Comme précédemment, 4 types de champs de vitesse sont possibles,

- des vitesses de translations (isovolume),
- des vitesses rotations en bloc (isovolume),
- des vitesses dilatation (non isovolume),
- des vitesses de cisaillement (isovolume),

ainsi qu'une combinaison de ceux-ci.

Une composante de vitesse a pour dimension $[LT^{-1}]$, donc s'exprime en $m.s^{-1}$ dans le système international.

Assimilation Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à obtenir le brevet 304.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95.

4.3 Les états de déformation d'un volume représentatif

4.3.1 Pour un solide

Pour un solide la grandeur cinématique de référence est le déplacement.

Etant donné un mouvement du parrallélépipède, il faut pouvoir extraire les composantes correspondantes à un mouvement de corps solide (translation, rotation) de celles correspondantes à des déformations. Nous montrons ici que le gradient de déplacement n'est pas suffisant, il faut encore extraire sa partie symétrique, pour avoir une vrai mesure de l'état de déformation.

Soit $\vec{u}_P$ (Eq. 4.1) connu pour un parrallélépipède de dimensions dx, dy et dz. Chacune des 3 composantes est une fonction de l'espace. Calculons les variations de ces composantes de déplacement en fonction des 3 directions. Il est judicieux d'utiliser la notation du gradient de $\vec{u}$,

$$\overline{\overline{grad}}\vec{u} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \tag{4.5}$$

Pour un mouvement de translation d'une valeur a dans la direction $\vec{x}$, $\vec{u} = a\vec{x}$, d'où $u_x = a$, $u_y = 0$, $u_z = 0$, le gradient

$$\overline{\overline{grad}}\vec{u} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}, \tag{4.6}$$

est bien nul. Pour un corps en translation, qui donc ne se déforme pas, le gradient semble donc un bon outil de mesure de l'état déformé. Vérifions-le pour le cas d'une rotation.

Pour un mouvement de rotation autour de l'axe P$\vec{x}$ d'un angle α infiniment petit, alors $\vec{u}_p = \vec{0}$, et pour le point M $u_x = 0$, $u_y = -\alpha dz$ et $u_z = \alpha dy$, le gradient

$$\overline{\overline{grad}}\vec{u} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}, \tag{4.7}$$

n'est pas nul alors que le corps ne se déforme pas. Le gradient de déplacement ne caractérise donc pas la déformation du solide. Par contre si l'on en prend la partie symétrique, que nous noterons $\overline{\overline{\epsilon}}$,

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{grad}}\vec{u} + {}^T\,\overline{\overline{grad}}\vec{u}\right), \tag{4.8}$$

avec "T" indiquant la transposée de la matrice,

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \right), \tag{4.9}$$

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}. \tag{4.10}$$

cette partie symétrique est bien nulle. Vérifions sur les deux autres cas de mouvement du parrallélélogramme avec déformation que cette grandeur $\overline{\overline{\epsilon}}$ n'est pas nulle.

Pour le cas d'une dilatation dans la direction $\vec{x}$ si $\vec{u}_p = 0$ et $\vec{u}_M = adx\vec{x}$,

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\left[\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \left[\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \right), \tag{4.11}$$

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \left[\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}, \tag{4.12}$$

qui est effectivement non nulle.

Pour le cas d'un glissement du plan (M,$\vec{z},\vec{x}$) dans la direction $\vec{x}$, la direction $\vec{y}$ tournant d'un angle γ, alors $\vec{u}_P = \vec{0}$ et $\vec{u}_M = -\gamma dy\vec{x}$,

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \right), \tag{4.13}$$

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma/2 & 0 \\ -\gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}, \tag{4.14}$$

qui est bien différent de 0.

Nous pouvons donc considérer la grandeur $\bar{\bar{\epsilon}}$, appelée *tenseur des déformations*, comme une mesure de l'état de déformation du système. Le développement ci-dessus est fait dans l'hypothèse des petites perturbations : faibles déplacements par rapport aux dimensions du système, et faibles déformations. Ce tenseur des déformations

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}, \tag{4.15}$$

a donc 3 déformations d'allongement (ou de contraction) ϵ_{xx}, ϵ_{yy}, ϵ_{zz}, ainsi que les 6 déformations de cisaillement ϵ_{xy}, ϵ_{yz}, ϵ_{zx}, ϵ_{yx}, ϵ_{zy}, ϵ_{xz}. De part sa construction, ce tenseur est symétrique,

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} \tag{4.16}$$

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} \tag{4.17}$$

$$\epsilon_{zx} = \epsilon_{xz}. \tag{4.18}$$

Il y a donc 6 composantes indépendantes.

Un changement de base peut être fait afin que ce tenseur soit diagonal dans cette nouvelle base :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\otimes(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)}, \tag{4.19}$$

avec $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ les directions principales de déformation. Pour la diagonalisation d'une matrice (recherche de valeurs et vecteurs propres), merci de vous référer à vos enseignements de mathématique.

Le tenseur des déformations est un tenseur d'ordre 2 dont les composantes sont adimensionnelles. Vous veillerez à écrire les tenseurs d'ordre 2 de façon complète, donc sans oublier de préciser la base. Les notations acceptées sont :

$$\bar{\bar{a}} = a_{xx}\vec{x}\otimes\vec{x} + a_{xy}\vec{x}\otimes\vec{y} + a_{xz}\vec{x}\otimes\vec{z} + a_{yx}\vec{y}\otimes\vec{x} + a_{yy}\vec{y}\otimes\vec{y} + a_{yz}\vec{y}\otimes\vec{z} \tag{4.20}$$

$$+a_{zx}\vec{z}\otimes\vec{x} + a_{zy}\vec{z}\otimes\vec{y} + a_{zz}\vec{z}\otimes\vec{z} \tag{4.21}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}. \tag{4.22}$$

Etant connu le tenseur $\bar{\bar{\epsilon}}$ en un point P, on construit le *vecteur déformation* associé à un vecteur unitaire $\vec{n}$,

$$\vec{\epsilon}(P,\vec{n}) = \bar{\bar{\epsilon}}\vec{n}, \tag{4.23}$$

qui est une grandeur vectorielle adimensionelle.

Par exemple si $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{z}$, alors

$$\vec{\epsilon}(P,\vec{n}) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}, \tag{4.24}$$

$$\vec{\epsilon}(P,\vec{n}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{xx} + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{xz} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{yx} + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{yz} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{zx} + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}. \tag{4.25}$$

Il peut se décomposer suivant la normale à la facette et dans le plan tangentiel à la facette,

$$\vec{\epsilon}(P,\vec{n}) = \epsilon_{nn}\vec{n} + \epsilon_{tn}\vec{t}, \tag{4.26}$$

avec,

$$\epsilon_{nn} = \vec{\epsilon}(P,\vec{n}).\vec{n} \tag{4.27}$$
$$\epsilon_{tn} = \vec{\epsilon}(P,\vec{n}) - \epsilon_{nn}\vec{n}. \tag{4.28}$$

Dans notre exemple, cela donne,

$$\epsilon_{nn} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{xx} + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{xz} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{yx} + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{yz} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{zx} + \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}, \tag{4.29}$$

et en considérant la symétrie du tenseur,

$$\epsilon_{nn} = \frac{1}{2}\epsilon_{xx} + \epsilon_{xz} + \frac{1}{4}\epsilon_{zz}. \tag{4.30}$$

qui est une grandeur scalaire adimensonelle, que l'on mesure à la surface d'une pièce en collant une jauge de déformation dans la direction de la normale $\vec{n}$.

Assimilation Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à obtenir les brevets 305, 217, 306, 307, 308, 309, 312.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95.

4.3.2 Pour un fluide

Pour un fluide la grandeur cinématique de référence est la vitesse.

On définira donc de façon similaire à précédemment, les grandeurs :

- $\overline{\overline{grad}}\,\vec{v}$
- $\dot{\bar{\epsilon}}$, appelée *tenseur des taux de déformations*, comme une mesure de l'état du taux de déformation du système,

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{v} + {}^{T}\,\overline{\overline{grad}}\,\vec{v}\right). \tag{4.31}$$

Ce tenseur est symétrique de part sa construction

– $\bar{\bar{\Omega}}$, appelée *tenseur des taux de rotation*,

$$\bar{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\bar{grad}}\vec{v} - {}^{T}\,\bar{\bar{grad}}\vec{v}\right), \tag{4.32}$$

qui est antisymétrique de part sa construction.

On définit aussi le *rotationel* d'un vecteur. C'est un pseudo-vecteur,

$$\breve{rot}\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \wedge \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \tag{4.33}$$

Pour rappel les pseudo-vecteurs ne sont pas des tenseurs d'ordre 1, comme le sont les vecteurs : ils ne suivent pas les mêmes types de transformation par rapport à des plans de symétrie (entre autres...).

Une composante de taux de déformation et de taux de rotation ont pour dimension $[T^{-1}]$, soit dans le système international s'exprime en s^{-1}.

Assimilation Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à obtenir les brevets 310, 311.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95.

4.4 Les états de contrainte d'un volume représentatif

Sur chaque face d'un parrallélépipède de dimensions dx, dy et dz, s'exerce des actions mécaniques qui seront liées via des *lois de comportement*

– au tenseur des déformations $\bar{\bar{\epsilon}}$ pour un solide,

– au gradient de vitesse $\bar{\bar{grad}}\vec{v}$ pour un fluide.

L'étude des lois de comportement est l'objet des chapitres suivants.

Néanmoins, ces actions seront représentées par des forces par unité de surface. On appellera *tenseur des contraintes*, la grandeur notée $\bar{\bar{\sigma}}$,

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} , \tag{4.34}$$

elle aussi symétrique. C'est une grandeur tensorielle dont la dimension de chaque composante est $[MLT^{-2}]$, qui s'exprime dans le système international en Pa=N.m^{-2}=kg.m^{-1}.s^{-2}.

Etant connu le tenseur $\bar{\bar{\sigma}}$ en un point P, les actions sur une facette de normale unitaire $\vec{n}$ sera appelé *vecteur contrainte*,

$$\vec{T}(P,\vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}}\vec{n}, \tag{4.35}$$

qui est une grandeur vectorielle dont la dimension est $[MLT^{-2}]$, qui s'exprime dans le système international en Pa=N.m^{-2}=kg.m^{-1}.s^{-2}.

Par exemple si $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$ (la norme de $\vec{n}$ est bien égale à 1), alors

$$\vec{T}(P,\vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} , \tag{4.36}$$

$$\vec{T}(P,\vec{n}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{xx} + \frac{1}{2}\sigma_{xy} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{yx} + \frac{1}{2}\sigma_{yy} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{zx} + \frac{1}{2}\sigma_{zy} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \tag{4.37}$$

Il peut se décomposer suivant la normale à la facette et dans le plan tangentiel à la facette,

$$\vec{T}(P,\vec{n}) = T_{nn}\vec{n} + T_{tn}\vec{t}, \tag{4.38}$$

avec,

$$T_{nn} = \vec{T}(P,\vec{n}).\vec{n} \tag{4.39}$$
$$T_{tn} = \vec{T}(P,\vec{n}) - T_{nn}\vec{n}. \tag{4.40}$$

Dans notre exemple, cela donne,

$$T_{nn} = \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{xx} + \frac{1}{2}\sigma_{xy} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{yx} + \frac{1}{2}\sigma_{yy} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{zx} + \frac{1}{2}\sigma_{zy} \end{array}\right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}\right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}, \tag{4.41}$$

et en considérant la symétrie du tenseur,

$$T_{nn} = \frac{3}{4}\sigma_{xx} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{xy} + \frac{1}{4}\sigma_{yy}. \tag{4.42}$$

qui est une grandeur scalaire dont la dimension est $[MLT^{-2}]$, qui s'exprime dans le système international en Pa=N.m^{-2}=kg.m^{-1}.s^{-2}.

On retiendra que la symétrie du tenseur des contraintes implique que pour deux normales $\vec{n}$ et $\vec{n}'$,

$$\vec{T}(P,\vec{n}).\vec{n}' = \vec{T}(P,\vec{n}').\vec{n}. \tag{4.43}$$

De même que pour le tenseur des déformation, on peut définir, des directions principales de contraintes et des contraintes principales, en diagonalisant les matrices associées.

Assimilation Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, nous vous invitons à obtenir les brevets 313.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95.

Chapitre 5

La mécanique des solides

5.1 L'outil de base franco-français : le torseur

Si vous êtes allergique à l'utilisation de torseurs, vous pouvez ne pas les utiliser. Par contre, vous pouvez continuer la lecture en portant une attention particulière à ce qui est écrit en rouge, et qui vous est tout particulièrement dédié. Vous veillerez toujours à écrire deux grandeurs : rotation et déplacement, ou force et moment. Vous préciserez pour le déplacement de quel point vous parlez, pour le moment en quel point vous le calculez.

Si les anglo saxons manient les mêmes grandeurs
- force et moment pour une action extérieure,
- vitesse de rotation et vitesse de translation pour décrire la cinématique d'un solide,
- la masse multipliée par l'accélération de translation et le moment dynamique,

ils n'ont pas comme usage de regrouper ces grandeurs dans un seul et même objet que nous appellerons *torseur*.

Un torseur τ est un regroupement entre deux grandeurs vectorielles exprimé en un point A. Si l'on souhaite changer de point où ce torseur est exprimé :
- si $\vec{a}$ est un vecteur et $\breve{b}$ est un pseudo vecteur exprimés en un point A (cas des torseur d'inter-effort, torseur dynamique)

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \breve{b}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \breve{b}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \breve{b}_A + \vec{a} \wedge \vec{AB} \end{array} \right\}_B \tag{5.1}$$

- Si $\breve{a}$ est un pseudo-vecteur et $\vec{b}$ est un vecteur exprimés en un point A (torseur de position, torseur de déplacement, torseur cinématique)

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \breve{a} \\ \vec{b}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \breve{a} \\ \vec{b}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \breve{a} \\ \vec{b}_A + \breve{a} \wedge \vec{AB} \end{array} \right\}_B \tag{5.2}$$

Pour les allergiques : Si vous calculez le moment d'une force et d'un moment en un point B alors que la force et le moment sont appliqués en un point A, il vous faudra écrire : $\breve{M}_B = \breve{M}_A + \vec{F} \wedge \vec{AB}$. De même si vous calculez un déplacement en un point B dû à un déplacement et une rotation en un point A, vous écrirez : $\vec{u}_B = \vec{u}_A + \breve{\omega} \wedge \vec{AB}$.

• **Erreur classique :** Il ne faut pas oublier de préciser, pour tout torseur, en quel point il est exprimé.

Assimilation Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 033, 031.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95.

5.2 La mécanique des solides indéformables

La mécanique générale permet d'obtenir les équations de mouvement à partir de la définition du système à isoler, du bilan des actions extérieures, du principe fondamental de la dynamique ou des équations de Lagrange.

Ce n'est pas l'objet de ce cours, aussi supponsons-nous connus et calculables :

- les actions extérieures (brevet 039)
- les liaisons cinématiques tridimensionnelles normalisées,
- les liaisons cinématiques bidimensionnelles,
- les torseurs cinématiques associés à ces liaisons,
- les torseurs d'inter-efforts associées à ces liaisons si elles sont parfaites (brevets 036, 037, 038)
- les caractéristiques d'un solide : masse, centre de masse, tenseur d'inertie, (brevets 006 bis partie 1, 020)
- le torseur dynamique d'un solide (brevet 021)
- l'énergie cinétique d'un solide,
- les énergies potentielles (brevets 034, 35)
- le principe fondamental de la dynamique ou les équations de Lagrange (brevet 011, 019, 022, 023)

Si vous avez des doutes, faites par vous-même les brevets afférents.

5.3 L'élasticité tridimensionnelle linéaire isotrope

L'objectif de ce cours n'est pas de résoudre les problèmes appliqués à des solides tridimensionnels, aussi seront simplement rappelés ici, les équations nécessaires à la résolution de ceux-ci.

Dans le cas d'un solide déformable, il nous faut définir la *loi de comportement* qui relie les tenseurs des déformations au tenseur des contraintes. Nous appellerons :

- E le module de Young du matériau (en Pa),
- ν le coefficient de Poisson du matériau (sans unité),
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ le module de Coulomb du matériau (en Pa),

On admettra que

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} trace(\bar{\bar{\sigma}})\bar{\bar{I}}_d, \tag{5.3}$$

ou

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} + \lambda trace(\bar{\bar{\epsilon}})\bar{\bar{I}}_d. \tag{5.4}$$

Ces deux équations étant équivalentes, il existe des relations entre module de Young et coefficients de Lamé :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \tag{5.5}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \tag{5.6}$$

matériau	Mod. de Young 10^9 Pa	Coeff. de Poisson	lim. élas. trac. 10^6 Pa	lim. élast. compr. / lim. élas. traction	masse vol. kg/m^3
acier	210	0.285	20 à 60	1	7800
aluminium AU4G	75	0.33	20	1	2800
béton	14 à 21	0.3	30	11	1900
bronze	100	0.31	24	3	8400
cuivre	100	0.33	18	1.3	8900
fonte	100	0.29	18 à 25	3.3	7100
laiton	92	0.33	20	1.4	7300
marbre	25	0.3	50	15	2800
plexiglass	2.9	0.4	8	1.2	1800
titane	100	0.34	20 à 47d	1	4510
verre	60	0.2 à 0.3	3 à 8	10	2530

Poser un problème d'élasticité revient à définir des conditions aux limites en déplacement et en contrainte sur la surface de ce solide, d'écrire la relation entre déplacements et déformations, écrire l'équilibre (ou le PFD) sur un élément de volume. Il reste alors à chercher une solution à ce système d'équations présenté tableau 5.1. Pour la lecture de ce tableau, on rappellera simplement que en coordonnées carthésiennes,

- le laplacien d'une fonction $f(x,y,z)$ est $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$,
- la matrice identité (des 1 sur la diagonale des 0 ailleur) est notée $\bar{\bar{I}}_d$,
- le gradient d'un scalaire f est $\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}$,
- la trace d'un tenseur est la somme des termes sur sa diagonale.

5.4 L'élasticité unidimensionnelle linéaire isotrope pour poutres droites, alias "la résistance des matériaux" ou "théorie des poutres"

ou "L'histoire d'un haltérophile qui pêchait du pont de Millau en regardant une éolienne".

Attention : ce cours ne traite pas
- des poutres à fibre moyenne courbe,
- des systèmes hyperstatiques,
- du calcul des directions principales d'une section droite.

Pour plus de détails, veuillez consulter le cours fait à l'Ensim en 2nd année.

Un corps dont l'une des dimensions est bien plus grande que les deux autres sera appellée *poutre*.

Le même jeu de relations observé en élasticité tridimensionnelle est présent dans le cas de la théorie des poutres (voir tableau 5.2), seules les grandeurs utilisées sont décrites à l'aide d'objets que l'on appelle torseur. Ce sont les mêmes êtres mathématiques que ceux que vous avez utilisé en mécanique des solides indéformables pour décrire leur mouvement. Ils seront ici simplement associés aux déplacement et rotation d'une section droite, aux déformations d'une section droite et aux efforts généralisés (résultante et moment) sur cette section.

	déplacements	déformations	contraintes
	$\vec{u}$	$\bar{\bar{\epsilon}}$	$\bar{\bar{\sigma}}$
condition aux limites en déplacement	$\vec{u} = \vec{u}_d$ sur Γ_u		
passage déplacements déformations	+ éq. compatibilité $\epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{kj,il} = \epsilon_{il,jk} - \epsilon_{lj,ik}$ pour $i \neq j$ et $l \neq k$	$\bar{\bar{\epsilon}} = 1/2 \left(\bar{\bar{grad}}\, \vec{u} + {}^T \bar{\bar{grad}}\, \vec{u} \right)$	+ éq. compatibilité (Beltrami) $(1+\nu)\Delta\sigma_{ij} + \frac{\partial^2 (trace\bar{\bar{\sigma}})}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ si $\bar{\bar{grad}} f = 0$
loi de comportement		$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} trace(\bar{\bar{\sigma}})\bar{\bar{I}}_d$	$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} + \lambda trace(\bar{\bar{\epsilon}})\bar{\bar{I}}_d$
équations d'équilibre (statique)	éq. de Navier : $(\lambda+\mu)\vec{grad}(div\vec{u})$ $+\mu div(\bar{\bar{grad}}\vec{u}) + \rho\vec{u} = 0$		$\vec{div}\bar{\bar{\sigma}} + \rho\vec{f} = 0$ $\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$ $\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$ $\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$
condition aux limites en contraintes			$\vec{T}(P,\vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}}\vec{n} = \vec{F}_d$ sur Γ_f
passage contrainte torseur			$N = \int_S \sigma_{xx} dS$ $T_y = \int_S \sigma_{xy} dS$ $T_z = \int_S \sigma_{xz} dS$ $M_x = \int_S \sigma_{\theta x} r dS$ $M_{fy} = \int_S \sigma_{xx} z dS$ $M_{fz} = -\int_S \sigma_{xx} z dS$

TABLE 5.1 – Equations de la mécanique des solides déformables dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle

	torseur des déplacements	torseur des déformations	torseur des efforts intérieurs
	$\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} \breve{\omega} \\ \vec{u} \end{array} \right\}_H$	$\{Def\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_x\breve{x} + \alpha_y\breve{y} + \alpha_z\breve{z} \\ \epsilon_x\vec{x} + \gamma_y\vec{y} + \gamma_z\vec{z} \end{array} \right\}_H$	$\{\tau_{int}\} = \left\{ \begin{array}{c} N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z} \\ M_x\breve{x} + M_{fy}\breve{y} + M_{fz}\breve{z} \end{array} \right\}_H$
condition aux limites en déplacement	$\{U\} = \{U\}_d$ au point P_d		
passage déplacements déformations	formules de Bresse (fonction de $\epsilon_x, \gamma_y, ...$)		
loi de comportement	formules de Bresse (fonction de $N, T_y, ...$)	$\alpha_x = M_x/GI_0^c$ $\alpha_y = M_{fy}/EI_{Hy}$ $\alpha_z = M_{fz}/EI_{Hz}$ $\epsilon_x = N/ES$ $\gamma_y = T_y/GS_y$ $\gamma_z = T_z/GS_y$	$M_x = \alpha_x GI_0^c$ $M_{fy} = \alpha_y EI_{Hy}$ $M_{fz} = \alpha_z EI_{Hz}$ $N = \epsilon_x ES$ $T_y = \gamma_y GS_y$ $T_z = \gamma_z GS_z$
équations d'équilibre (poutre droite)			$p_x + \frac{dN}{ds} = 0$ $p_y + \frac{dT_y}{ds} = 0$ $p_z + \frac{dT_z}{ds} = 0$ $c_x + \frac{dM_x}{ds} = 0$ $c_y + \frac{dM_{fy}}{ds} - T_z = 0$ $c_z + \frac{dM_{fz}}{ds} + T_y = 0$
condition aux limites en chargement			$-\{\tau_{s+}\} + \{\tau_{s-}\} = \{\tau_d\}$ au point P_f
passage torseur contrainte			$\sigma_{xx} = N/S - \frac{M_{fy}\tilde{z}}{I_{Hy}} + \frac{M_{fz}\tilde{y}}{I_{Hz}}$ $\sigma_{yx} = \frac{T_y g_y(\tilde{y},\tilde{z})}{S}$ $\sigma_{zx} = \frac{T_z g_z(\tilde{y},\tilde{z})}{S}$ $\sigma_{yy} = 0$ $\sigma_{yz} = 0$ $\sigma_{zz} = 0$ $\sigma_{\theta x} = \frac{M_x \tilde{r} g_\theta(\tilde{y},\tilde{z})}{I_0}$

TABLE 5.2 – Equations de la mécanique des solides déformables dans le cas d'une modélisation unidimensionnelle.

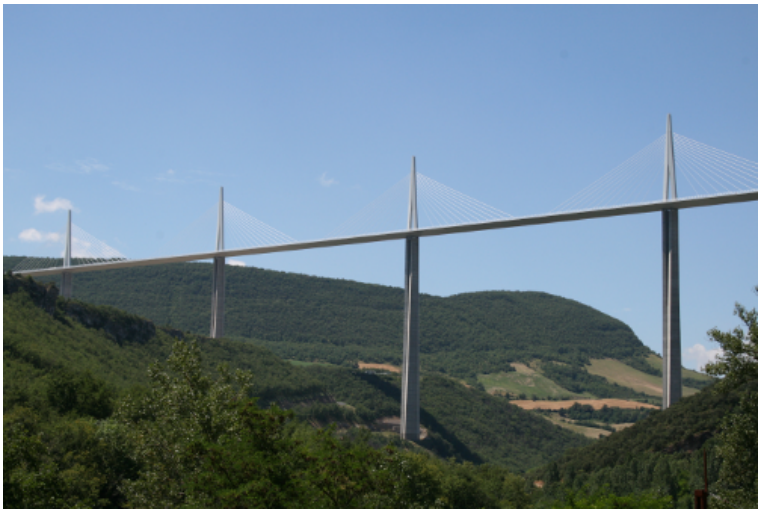


FIGURE 5.1 – Le viaduc de Millau.

Pour décrire ce système d'équations, nous allons considérer uniquement des poutres droites, c'est-à-dire dont la grande dimension est rectiligne dans la direction $\vec{x}$. Nous appellerons *sections droites* les coupes de cette poutre dans des plans perpendiculaires à $\vec{x}$ et *fibre moyenne* l'ensemble des barycentres H de ces sections droites. On pourra représenter la poutre par fibre moyenne, qui sera orientée d'un point A à un point B.

Nous considèrerons, une poutre de référence, de longueur l.

Assimilation Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 078.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95.

5.4.1 Sollicitation simple : traction-compression

Si on s'intéresse à un poteau du viaduc de Millau (fig. 5.1), on peut considérer qu'il est chargé à son extrémité supérieure par le tablier du pont et par la flèche au sommet de laquelle les cables sont suspendus. Le modèle associé à ce poteau est donc constitué du point A milieu de la section droite à la base du poteau qui est encastré dans le roche, le point B point de raccordement avec le tablier et la flèche, une fibre moyenne droite qui va de A à B, on repèrera un point H de cette fibre moyenne par son abcisse s ($\vec{AH} = s\vec{x}$), une section de poteau que nous supposerons rectangulaire de coté $a(x)$ et $b(x)$.

Deux modèles de chargement peuvent être envisagés (fig. 5.2)

- une force concentrée $-F\vec{x}$ au point B,
- une force concentrée $-F\vec{x}$ au point B et le poids propre du poteau par une force appliquée sur chaque tronçon de longueur dx au point P $dF = -\rho a(x)b(x)gdx$, avec ρ la masse volumique du béton, g l'accéleration de la pesanteur, dx la longueur d'un petit tronçon de poteau.

Composantes du torseur des efforts intérieurs (et pour les allergiques forces et moments au sein de la poutre) Nous nous intéressons à la manière dont est sollicité le poteau.

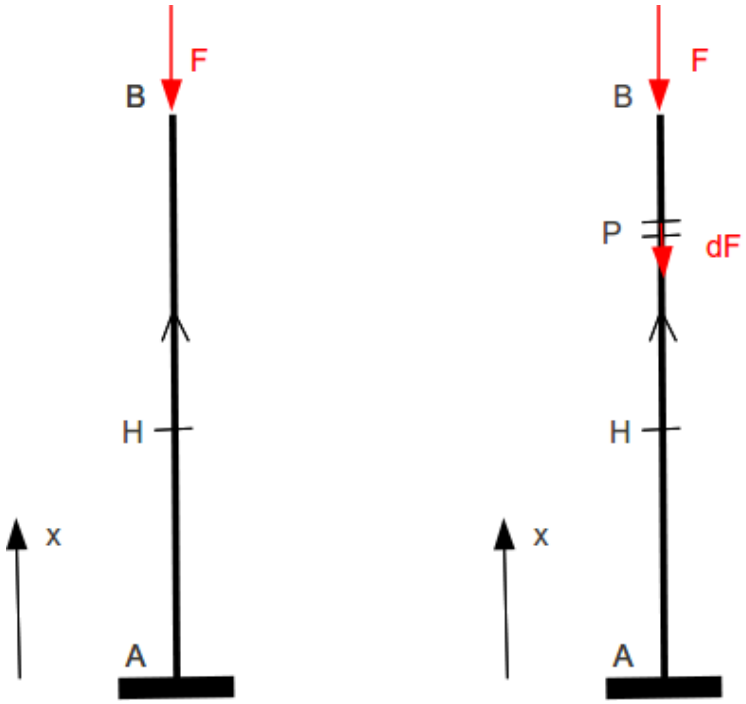


FIGURE 5.2 – 2 modélisation d'un poteau du viaduc de Millau.

On notera $seg+$ la demi poutre dont les abscisses sont supérieures à s. On notera $seg-$ la demi poutre dont les abscisses sont inférieures à s.

Prenons comme définition que le torseur des efforts intérieur (alias "les forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) représente les actions de la partie seg+ sur la partie seg-.

Si l'on isole le segment seg-, celui-ci est sollicité par des torseurs extérieurs de chargement ou de liaison (alias "des forces et des moments de chargement" pour les allergiques) sur le segment seg- et par le torseur des efforts intérieurs (alias "les forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques). Ce segment étant à l'équilibre, la somme des torseurs doit être nul, donc on obtient l'égalité,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = -\sum_{seg-} \{\tau_{ext\to seg-}\} \tag{5.7}$$

et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que : $\vec{F}_{int} = -\sum_{seg-} F_{ext}$, et $\breve{M}_{int} = -\sum_{seg-} \breve{M}_{ext}$.

Nous aurions aussi pu isoler le segment seg +. Celui-ci est sollicité par des torseurs extérieurs de chargement ou de liaison (alias "des forces et des moments de chargement" pour les allergiques) sur le segment seg+ et par un torseur (alias "une force et moment au sein de la poutre" pour les allergiques) qui est l'opposé du torseur des efforts intérieurs (alias "les forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) par le principe d'action et de réaction. Nous faisons ici l'hypothèse qu'au point de coupure H il n'y a pas de force concentrée. Ce segment étant à l'équilibre, la somme des torseurs doit être nul, donc on obtient l'égalité,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext\to seg+}\} \tag{5.8}$$

et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que : $\vec{F}_{int} = \sum_{seg+} F_{ext}$, et $\breve{M}_{int} = \sum_{seg+} \breve{M}_{ext}$.

On note donc que nous disposons à chaque fois de deux manières de calculer le torseur des efforts intérieurs (alias "les forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques), en utilisant soit la partie seg+ soit la partie seg-. Les deux méthodes donnent le même résultat, car la poutre, dans sa globalité seg+ U seg- est en équilibre. C'est à vous de choisir le segment qui implique le moins de calcul. Par exemple, si sur l'un des segments il y a des liaisons et des chargements, et sur l'autre que des chargements (par définition connus), c'est ce dernier segment qu'il faut utiliser car cela vous évite d'avoir à calculer les inconnues aux liaisons, et donc de faire l'équilibre global de la structure, déterminer son degré d'hyperstatisme, and so on....

En général, la connaissance du torseur des efforts intérieurs (alias "des forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) est nécessaire sur l'ensemble de la poutre. Plusieurs cas doivent être étudiés en faisant varier le point H, car lorsque s croît, à chaque passage d'un chargement, le torseur de chargement (alias "la force ou le moment extérieur" pour les allergiques) passe du segment seg+ au segment seg-.

En l'appliquant à notre cas du viaduc de Millau, par rapport à H la partie seg+ est le segment HB, qui est chargé

– pour le modèle 1, par le torseur en B,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_B, \tag{5.9}$$

(et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que : $\vec{F}_{int} = -F\vec{x}$, et $\breve{M}_{int} = \breve{0}$ lorsque le moment est exprimé en B.)
que l'on transporte en H par la formule de changement de point,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \breve{0} + -F\vec{x} \wedge B\vec{H} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \breve{0} + -F\vec{x} \wedge (l-s)(-\vec{x}) \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_H \tag{5.10}$$

(et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que : $\vec{F}_{int} = -F\vec{x}$, et $\breve{M}_{int} = \breve{0}$ lorsque le moment est exprimé en H.)

– pour le modèle 2, par le torseur en B (alias "la force ou le moment extérieur en B" pour les allergiques) et le chargement par unité de longueur

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_B + \int_{HB} \left\{ \begin{array}{c} -\rho g a(x) b(x) dx \vec{x} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_P \tag{5.11}$$

que l'on transporte en H par la formule de changement de point,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_H + \int_{x=s}^{x=l} \left\{ \begin{array}{c} -\rho g a(x) b(x) dx \vec{x} \\ \breve{0} + (-\rho g a(x) b(x) dx \vec{x}) \wedge P\vec{H} \end{array} \right\}_H \tag{5.12}$$

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_H + \int_{x=s}^{x=l} \left\{ \begin{array}{c} -\rho g a(x) b(x) dx \vec{x} \\ \breve{0} + (-\rho g a(x) b(x) dx \vec{x}) \wedge (x-s)(-\vec{x}) \end{array} \right\}_H \tag{5.13}$$

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x) b(x) dx \\ \breve{0} \end{array} \right\}_H. \tag{5.14}$$

(et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que : $\vec{F}_{int} = -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x) b(x) dx$, et $\breve{M}_{int} = \breve{0}$ lorsque le moment est exprimé en H.)
On notera dans ce dernier calcul qu'il faut écrire le torseur (alias "le moment" pour les allergiques) traduisant le chargement linéique en un point fixe H, avant de faire l'intégration.

Dans les deux modèles on remarque que le torseur des efforts intérieurs (alias "des forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) ne possède que une composante de résultante (alias "de force" pour les allergiques) dans la direction de la fibre moyenne. On dit que la poutre est soumise à un *effort normal*,

$$N = -F, \tag{5.15}$$

dans le cas du modèle 1, et

$$N = -F - \rho g \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx \tag{5.16}$$

dans le cas du modèle 2. L'effort normal est négatif : la poutre est en compression. Si l'effort normal était positif, la poutre serait en traction.

Message aux allergiques à l'utilisation de torseur Vous avez sans doute remarqué que les calculs que vous effectuez sont exactement les mêmes que ceux effectués par les les utilisateurs des torseurs :

- lorsque vous parlez "des efforts et moments intérieurs", ils parlent "de torseur des efforts intérieurs",
- lorsque vous écrivez deux grandeurs force et moment, ils font de même, en les écrivant l'un au-dessus de l'autre,
- lorsque vous précisez en quel point vous calculez le moment, ils font de même en notant en dessous à droite du torseur le nom du point considéré,
- lorsque vous déplacez un moment entre deux points, ils utilisent aussi la formule de changement de point.

Lire un polycopié, avec plein d'insertions "pour les allergiques aux torseurs", est plus difficile. La suite du document arrête donc de vous proposer cette double lecture, et je vous invite, si votre allergie au torseur n'est pas encore passée à la lecture de ces lignes, de compléter la suite de ce document (une marge à droite à été laissée à cet effet) en remplaçant chaque écriture de torseur, par les deux équations de résultante et de moment. Par exemple, si vous lisez :

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx \\ \breve{0} \end{array} \right\}_H . \tag{5.17}$$

vous écrivez dans la marge de droite les deux équations,

$$\begin{array}{c} \vec{F}_{int} = -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx, \\ \breve{M}_{int} = \breve{0} \qquad \text{au point H.} \end{array} \tag{5.18}$$

Loi de comportement La matière ignorant si elle est dans une poutre ou un solide massif, c'est la loi de comportement tridimensionnelle qui est la référence. Si l'on suppose que cette effort normal N se réparti uniformément sur la section droite $a(s)b(s)$ passant par le point H, la contrainte est uniquement dans la direction $\vec{x}$ (Fig. 5.3) :

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{a(s)b(s)}. \tag{5.19}$$

Le tenseur des contrainte en tout point de la section droite passant par H est donc,

$$\bar{\bar{\sigma}} = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} , \tag{5.20}$$

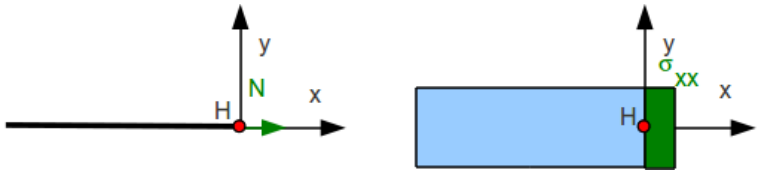


FIGURE 5.3 – Correspondance entre effort normal et contrainte locale.

soit,

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{N}{a(s)b(s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \tag{5.21}$$

Le tenseur des déformation, déduit de l'équation 5.3 est donc,

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{N}{Ea(s)b(s)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu N}{Ea(s)b(s)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu N}{Ea(s)b(s)} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \tag{5.22}$$

Si N est positif, tous les petits parrallélépipèdes de dimension da, db, ds subissent un allongement dans la direction $\vec{x}$ de valeur $\frac{N}{Ea(s)b(s)}$, et des contractions dans les directions perpendiculaires de valeur $\frac{-\nu N}{Ea(s)b(s)}$.

Dans le cas du pont de Millau, N est négatif : constant avec le modèle 1, de module croissant avec le modèle 2.

Déplacement et rotation Si l'on appelle H' le point tel que $H\vec{H}' = ds\vec{x}$, et que l'on note u le déplacement dans la direction $\vec{x}$, alors comme le segment s'allonge sous l'effort normal on a,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)}. \tag{5.23}$$

Pour connaître les déplacements de tout point de la fibre moyenne, cette équation différentielle doit être intégrée,

$$\int_{AB} \frac{\partial u}{\partial s} ds = \int_{AB} \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)} ds, \tag{5.24}$$

soit,

$$u_B - u_A = \int_{AB} \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)} ds, \tag{5.25}$$

$$u_B = u_A + \int_{AB} \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)} ds. \tag{5.26}$$

On notera que le module de Young E peut aussi dépendre de s.

Dans le cas du pont de Millau, si les dimensions au pied et eh haut du poteau sont $a(0) = a_0$, $a(l) = 2a_0/3$, $b(0) = a_0$, $b(l) = 2a_0/3$, alors,

$$a(s) = a_0 \left(1 - \tfrac{s}{3l}\right) \tag{5.27}$$

$$b(s) = a_0 \left(1 - \tfrac{s}{3l}\right). \tag{5.28}$$

L'encastrement en A implique que $u_A = 0$, et il ne reste plus qu'à intégrer,

– pour le modèle 1,

$$u_B = \int_{AB} \frac{-F}{Ea_0^2\left(1-\frac{s}{3l}\right)^2} ds, \tag{5.29}$$

$$u_B = \frac{-F}{Ea_0^2} \int_{AB} \frac{1}{\left(1-\frac{s}{3l}\right)^2} ds. \tag{5.30}$$

$$\tag{5.31}$$

Si la section était constante, nous obtiendrions,

$$u_B = \frac{-Fl}{Ea_0^2}. \tag{5.32}$$

– pour le modèle 2,

$$u_B = \int_{AB} \frac{-F-\rho g \int_{x=s}^{x=l} a_0^2\left(1-\frac{x}{3l}\right)^2 dx}{Ea_0^2\left(1-\frac{s}{3l}\right)^2} ds, \tag{5.33}$$

... légèrement plus compliqué à calculer.

Lieu(x) de la contrainte maximale La contrainte (éq. 5.35 est une grandeur locale. Chercher son maximum dans un domaine borné nécessite de calculer la dérivée de cette fonction, et si elle ne s'annule pas dans le domaine, de calculer les deux valeurs extrêmes.

– Pour le modèle 1,

$$\sigma_{xx} = \frac{-F}{a_0^2\left(1-\frac{s}{3l}\right)^2}, \tag{5.34}$$

dont la dérivée ne s'annule pas pour s appartenant entre 0 et l, donc la contrainte est maximale en $s = l$, donc au point B.

– Pour le modèle 2,

$$\sigma_{xx} = \frac{-F-\rho g a_0^2 \int_{x=s}^{x=l}\left(1-\frac{x}{3l}\right)^2 dx}{a_0^2\left(1-\frac{s}{3l}\right)^2}, \tag{5.35}$$

la recherche du point le plus sollicité nécessite le tracé de l'évolution de σ_{xx} en fonction de s (Fig 5.4 pour $F = \rho g a_0^2 l$).

Assimilation Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 32, 50, 54, 42.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95.

5.4.2 Sollicitation simple : flexion pure

187 kg ! C'est ce qu'a soulevé Vencelas Dabaya-Tientcheu lors des jeux olympiques de 2008 (Fig 5.5). Si on s'intéresse à la barre, on peut considérer qu'elle est chargée à ses deux extrémités par deux forces $F = mg$ égales et que les mains de l'haltérophile exercent deux forces R_1 et R_2 sur la barre. Le modèle associé à cette barre (Fig. 5.6) est donc constitué d'une fibre moyenne droite qui va de A à D, on repèrera un point H de cette fibre moyenne par son abcisse s ($\vec{AH} = s\vec{x}$), une section de poteau que nous supposerons circulaire de rayon $r = 0.015$ m. Les distances seront notées $\vec{AB} = a\vec{x}$, $\vec{BC} = b\vec{x}$, $\vec{CD} = a\vec{x}$, avec $a = 0.3$ m, $b = 0.8$ m, $m = 187$ kg, $g = 9.81$ m.s^{-2}.

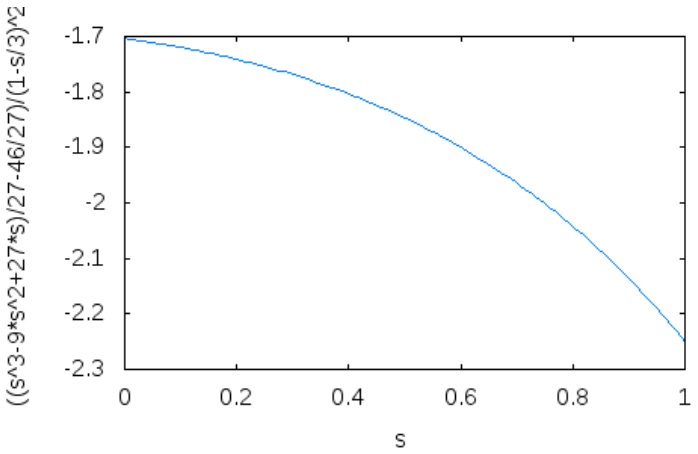


FIGURE 5.4 – Exemple d'evolution des contraintes le long d'un poteau du viaduc de Millau (unités arbitraires).



FIGURE 5.5 – 187 kg à bout de bras.

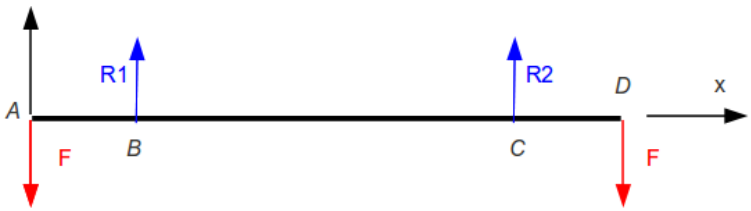


FIGURE 5.6 – Modélisation des efforts sur la barre de l'haltérophile.

Composantes du torseur des efforts intérieurs Nous nous intéressons à la manière dont est sollicité la barre entre les points B et C.

Nous orientons la barre de A vers D. La définition du torseur des efforts intérieurs,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \to seg+}\} \tag{5.36}$$

implique que en un point H,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} R_2\vec{y} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_D . \tag{5.37}$$

On remarquera que lors du calcul du torseur des efforts intérieurs, on ne s'arrête pas au premier torseur rencontré. Dans le problème posé, une difficulté apparaît : les valeurs de la réaction R_2 ne sont pas données. Il est donc nécessaire dans ce cas de faire l'équilibre du système total pour déterminer les réactions aux liaisons, ici R_1 et R_2.

Le solide isolé est la barre. Elle est soumise à 4 torseurs,

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_A , \tag{5.38}$$

$$\{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} R_1\vec{y} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_B , \tag{5.39}$$

$$\{\tau_3\} = \left\{ \begin{array}{c} R_2\vec{y} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_C , \tag{5.40}$$

$$\{\tau_4\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_D . \tag{5.41}$$

L'équibre se traduit par la somme des torseurs nulle, soit,

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} R_1\vec{y} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} R_2\vec{y} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_D . \tag{5.42}$$

Pour qu'une somme de torseurs soit possible, il faut les exprimer au même point. Vous pouvez choisir le point que vous voulez, cela ne change pas la solution. Choisissons le point B.

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F\vec{y} \wedge a\vec{x} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} R_1\vec{y} \\ \breve{0} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} R_2\vec{y} \\ R_2\vec{y} \wedge (-b\vec{x}) \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F\vec{y} \wedge (-(b+a)\vec{x}) \end{array} \right\}_B . \tag{5.43}$$

d'où,

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} + R_1\vec{y} + R_2\vec{y} - F\vec{y} \\ (Fa + R_2 b - F(b+a))\breve{z} \end{array} \right\}_B . \tag{5.44}$$

D'où le système de deux équations à deux inconnues,

$$R_1 + R_2 = 2F \tag{5.45}$$

$$R_2 b = Fb, \tag{5.46}$$

et les valeurs des deux réactions,

$$R_1 = F \tag{5.47}$$

$$R_2 = F. \tag{5.48}$$

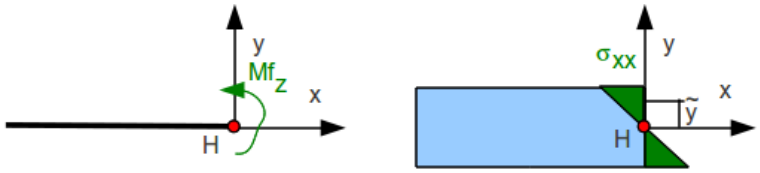


FIGURE 5.7 – Correspondance entre moment fléchissant et contrainte locale.

Le torseur des efforts intérieurs peut donc maintenant être calculé en fonction uniquement du chargement,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D, \tag{5.49}$$

soit, si on l'exprime au point H,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{y} \\ F\vec{y} \wedge (-(a+b-s)\vec{x}) \end{array} \right\}_H + \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F\vec{y} \wedge (-(a+b+a-s)\vec{x}) \end{array} \right\}_D, \tag{5.50}$$

d'où,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -Fa\vec{z} \end{array} \right\}_H. \tag{5.51}$$

On remarquera que la résultante de force est nulle et que seul un moment autour de l'axe $\vec{z}$ est présent. On dira que la barre est sollicitée par un *moment fléchissant autour de l'axe* $\vec{z}$. De plus, dans notre cas particulier, ce moment fléchissant est indépendant de l'abcisse s entre les points B et C :

$$Mf_z = Fa. \tag{5.52}$$

Loi de comportement Comme pour la sollicitation précédente, il nous faut faire une hypothèse de répartition de contraintes dans la section droite de cette poutre en flexion. La forme générale de la poutre entre les deux mains de l'haltérophile est légèrement incurvée. On peut faire l'hypothèse que la surface supérieure de la poutre est tendue, et que la surface inférieure de la barre est comprimée. La contrainte n'est donc pas constante lorsque l'on parcours la section droite. Considérons l'hypothèse (Fig. 5.7) que la contrainte est linéaire en fonction de la distance $\tilde{y}$ à la fibre moyenne dans la direction $\vec{y}$,

$$\sigma_{xx} = k\tilde{y}, \tag{5.53}$$

avec k un coefficient à déterminer. Le tenseur des contraintes en un point peut donc s'écrire,

$$\bar{\bar{\sigma}} = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}, \tag{5.54}$$

Il faut vérifier que l'intégrale de ces contraintes sur la section droite redonnent les composantes du torseur des efforts intérieurs. Pour la résultante, nous obtenons une

valeur nulle,

$$\vec{R} = \int_S \sigma_{xx}\vec{x}d\tilde{y}d\tilde{z}, \tag{5.55}$$

$$\vec{R} = \vec{x}\int_S k\tilde{y}d\tilde{y}d\tilde{z}, \tag{5.56}$$

$$\vec{R} = k\vec{x}\int_S \tilde{y}d\tilde{y}d\tilde{z}, \tag{5.57}$$

$$\vec{R} = k\vec{x}0, \tag{5.58}$$

car H est le barycentre de la section droite. La grandeur

$$m_z = \int_S \tilde{y}d\tilde{y}d\tilde{z} \tag{5.59}$$

est appelée *moment statique de la section droite autour de l'axe* $\vec{z}$. On définira de même le moment statique autour de l'axe H$\vec{y}$:

$$m_y = \int_S \tilde{z}d\tilde{y}d\tilde{z}. \tag{5.60}$$

Pour le moment,

$$\breve{M} = \int_S \sigma_{xx}\vec{x} \wedge \vec{PH}d\tilde{y}d\tilde{z}, \tag{5.61}$$

$$\breve{M} = \int_S k\tilde{y}\vec{x} \wedge (-\tilde{y}\vec{y} - \tilde{z}\vec{z})d\tilde{y}d\tilde{z}, \tag{5.62}$$

$$\breve{M} = -k\breve{z}\int_S \tilde{y}^2 d\tilde{y}d\tilde{z} + k\breve{y}\int_S \tilde{y}\tilde{z}d\tilde{y}d\tilde{z}, \tag{5.63}$$

$$\breve{M} = -k\breve{z}I_{Hz} + k\breve{y}0, \tag{5.64}$$

car H est le barycentre de la section droite, et en appelant I_{Hz} le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe H$\vec{z}$:

$$I_{Hz} = \int_S \tilde{y}^2 d\tilde{y}d\tilde{z}. \tag{5.65}$$

De même, on définira I_{Hy} le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe H$\vec{y}$:

$$I_{Hy} = \int_S \tilde{z}^2 d\tilde{y}d\tilde{z}, \tag{5.66}$$

ainsi que le *produit quadratique* de la section droite par rapport aux axes H$\vec{y}$ et H$\vec{z}$:

$$P_{Hyz} = -\int_S \tilde{y}\tilde{z}d\tilde{y}d\tilde{z}. \tag{5.67}$$

La nullité du produit quadratique d'une section droite permet de définir les axes principaux de cette section droite. Si la section droite possède une ligne de symétrie alors cette ligne et sa perpendiculaire sont les axes principaux de cette section droite.

L'équation 5.64 permet de trouver,

$$M_{fz} = -kI_{Hz}, \tag{5.68}$$

$$k = -\frac{M_{fz}}{I_{Hz}}, \tag{5.69}$$

d'où,

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz}\tilde{y}}{I_{Hz}}. \tag{5.70}$$

Par la formule ci-dessus, on peut donc calculer les contraintes locale dûes à un moment fléchissant. De même on aura,

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{fy}\tilde{z}}{I_{Hy}}. \tag{5.71}$$

Pour l'exemple de la barre de l'haltérophile, on a donc les contraintes qui valent,

$$\sigma_{xx} = \frac{Fa\tilde{y}}{I_{Hy}}, \tag{5.72}$$

avec,

$$\begin{aligned}
I_{Hz} &= \int_S \tilde{y}^2 d\tilde{y} d\tilde{z}, && (5.73)\\
&= \int_S (r'\cos\theta)^2 r' dr' d\theta, && (5.74)\\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r'=0}^{r} r'^3 dr' \right) (\cos\theta)^2 d\theta, && (5.75)\\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} \right) (\cos\theta)^2 d\theta, && (5.76)\\
&= \frac{r^4}{4} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\cos\theta)^2 d\theta, && (5.77)\\
&= \frac{r^4}{4}\pi, && (5.78)\\
&= \frac{d^4}{64}\pi, && (5.79)\\
&= \frac{\pi d^4}{64}, && (5.80)
\end{aligned}$$

avec d le diamètre de la barre. La contrainte maximale de tension est pour la valeur $\tilde{y} = r$, soit,

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(s, \tilde{y} = r, \tilde{z} = 0) &= \frac{287\ 9.81\ 0.3\ 0.015\ 12}{2\pi\ 0.03^4}\ \text{Pa}, && (5.81)\\
&= 9.05\ 10^6\ \text{Pa}. && (5.82)
\end{aligned}$$

Courbure La figure 5.7 montre que les contraintes sont proportionelles à la distance à la fibre moyenne. Si le matériau est élastique, cela implique que les chaque "fibre" à la distance $\tilde{y}$ de la fibre moyenne, reliant un point d'une section droite de centre H à l'abcisse s au point correspondant de la section droite de centre H à la coordonnée s, va s'allonger d'une grandeur $\epsilon_{xx}(s' - s)$ proportionelle à la contrainte σ_{xx} qu'elle subit :

$$\epsilon_{xx}(s' - s) = \frac{\sigma_{xx}(s' - s)}{E}, \tag{5.83}$$

avec E le module de Young du matériau exprimé en Pa dans le système international, et ϵ_{xx} la déformation qui est une grandeur adimensionelle. En effet, le tenseur des

déformation, déduit de l'équation 5.3 est donc,

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu\sigma_{xx}}{E} \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}. \tag{5.84}$$

Une section droite de centre H' à l'abcisse s' va donc tourner d'un angle $\alpha_z(s'-s)$ autour de l'axe H$\vec{z}$ par rapport à la section droite de centre H à la coordonnée s.

$$\tan(\alpha_z(s'-s)) = -\frac{\epsilon_{xx}(s'-s)}{\tilde{y}}, \tag{5.85}$$

$$\tag{5.86}$$

Pour des petites déformations, donc des petits angles,

$$\begin{aligned} \alpha_z(s'-s)) &= -\frac{\epsilon_{xx}(s'-s)}{\tilde{y}}, & (5.87)\\ &= -\frac{\sigma_{xx}(s'-s)}{E\tilde{y}}, & (5.88)\\ &= -\frac{-M_{fz}\tilde{y}(s'-s)}{EI_{Hz}\tilde{y}}, & (5.89)\\ &= \frac{M_{fz}(s'-s)}{EI_{Hz}}, & (5.90)\\ \alpha_z &= \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}}, & (5.91) \end{aligned}$$

avec α_z l'angle de rotation par unité de longueur de poutre : c'est une courbure.

Pour notre barre d'hatérophile en acier,

$$\begin{aligned} \alpha_z &= \frac{-287\,9.81\,0.3\,12}{2.1\,10^{11}\,\pi\,0.03^4}\mathrm{m}^{-1}, & (5.92)\\ \alpha_z &= -19.0\,10^{-3}\mathrm{m}^{-1}, & (5.93) \end{aligned}$$

la courbure est négative.

Déplacement et rotation Si l'on prend comme repère les deux mains de l'haltérophile, et que l'on note $u_y(s)$ le déplacement d'un point H à la coordonnée s dans la direction $\vec{y}$ par rapport à la droite joignant les deux mains, la courbure est reliée à la dérivée seconde de $u_y(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_y(s)}{ds^2} &= \alpha_z, & (5.94)\\ \frac{d^2u_y(s)}{ds^2} &= \frac{M_{fz}(s)}{E(s)I_{Hz}(s)}. & (5.95) \end{aligned}$$

L'équation ci-dessus est une équation locale : elle est valable en tout point de coordonnée s.

Pour connaître le déplacement en tout point, il suffit d'intégrer deux fois, sans oublier les constantes :

$$\begin{aligned} \frac{du_y(s)}{ds} &= \int_{s'=a}^{s} \frac{M_{fz}(s')}{E(s')I_{Hz}(s')}ds' + A, & (5.96)\\ u_y(s) &= \int_{s"=a}^{s} \left(\int_{s'=a}^{s"} \frac{M_{fz}(s')}{E(s')I_{Hz}(s')}ds' \right) ds" + As + B, & (5.97) \end{aligned}$$

avec A et B deux constantes que l'on détermine avec les conditions aux limites.

Pour le cas de l'haltérophile, la barre est de section constante et de matériau constant, donc,

$$u_y(s) = \int_{s"=a}^{s} \left(\int_{s'=a}^{s"} \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} ds' \right) ds" + As + B, \tag{5.98}$$

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \int_{s"=a}^{s} \left(\int_{s'=a}^{s"} ds' \right) ds" + As + B, \tag{5.99}$$

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \int_{s"=a}^{s} (s" - a) ds" + As + B, \tag{5.100}$$

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left(\frac{s^2 - a^2}{2} - a(s-a) \right) + As + B, \tag{5.101}$$

avec les deux conditions aux limites,

$$u_y(a) = 0, \tag{5.102}$$

$$u_y(a+b) = 0. \tag{5.103}$$

La première équation donne,

$$0 = Aa + B, \tag{5.104}$$

$$B = -Aa. \tag{5.105}$$

La seconde équation donne,

$$0 = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left(\frac{(a+b)^2 - a^2}{2} - a(b+a-a) \right) + A(b+a) + B, \tag{5.106}$$

$$= \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left(\frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2}{2} - ab \right) + A(b+a) - Aa, \tag{5.107}$$

$$= \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left(\frac{b^2}{2} \right) + Ab, \tag{5.108}$$

$$\tag{5.109}$$

d'où,

$$A = -\frac{M_{fz} b}{2EI_{Hz}}. \tag{5.110}$$

La déformée de la barre de l'halthérophile est donc,

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left(\frac{s^2 - a^2}{2} - a(s-a) \right) - \frac{M_{fz} b}{2EI_{Hz}} (s-a), \tag{5.111}$$

$$= \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left(\frac{s^2 - a^2}{2} - a(s-a) - \frac{b}{2}(s-a) \right). \tag{5.112}$$

$$\tag{5.113}$$

Avec les données du problème, on obtient la courbe 5.8.

Assimilation Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 006, 079, 018, 039.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95.

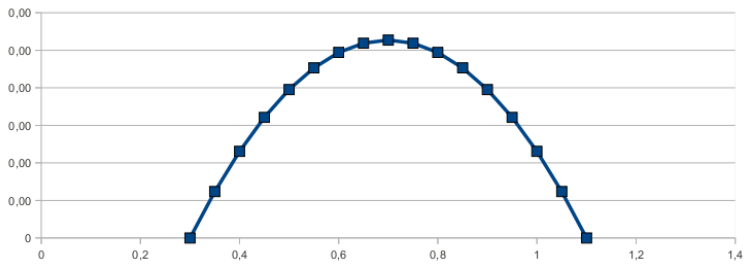


FIGURE 5.8 – Déformée de la barre entre les deux mains de l'haltérophile.

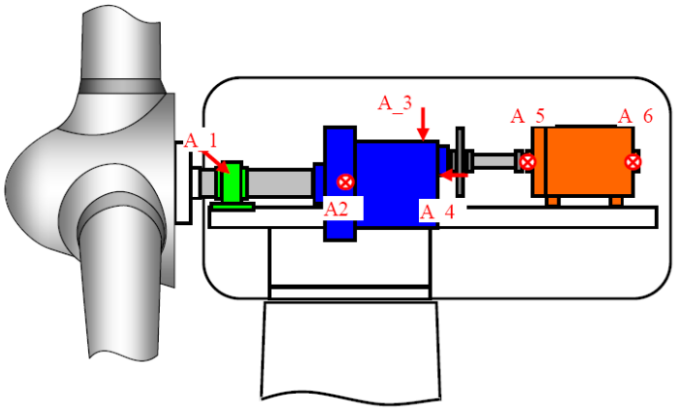


FIGURE 5.9 – Schémat de l'intérieur d'une nacelle d'éolienne.

5.4.3 Sollicitation simple : torsion

Les éoliennes ont généralement des pales qui tournent à la vitesse de 30 tours / minute. Avant d'aborder l'alternateur qui fonctionne à 1500 tours/ minutes, l'énergie passe par un multiplicateur de vitesse (en bleu Fig.5.9). Les pales sont reliées au multiplicateur de vitesse par un arbre de section circulaire de longueur $l = 1.8$ m, de diamètre $d = 0.5$ m, dont la fonction est de transmettre le couple dû au vent sur les pales, mais aussi de maintenir en position les pales. Nous ne nous intéresseront ici qu'au couple moteur des pales sur le multiplicateur de vitesse, soit entre les points $A1$ et $A2$ de la figure. Si l'éolienne est de 2MW, le couple C est,

$$C = P/\omega, \tag{5.114}$$

$$= \frac{2\,10^6}{2\pi\,30/60}, \tag{5.115}$$

$$= 5.9\,10^5 \text{ N.m.} \tag{5.116}$$

Composantes du torseur des efforts intérieurs Si l'on appelle $\vec{x}$ l'axe de rotation de l'arbre de transmission du couple, dans le cas où le multiplicateur est à l'arrêt et que le vent se lève, les pales exercent un couple $C\vec{x}$ sur l'arbre au point $A1$. Un modèle de cet arbre est représenté sur la figure 5.10.

Soit le point H à la distance s du point A_1. Si on oriente la poutre de A_1 vers A_2, alors le torseur des efforts intérieurs est,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext\to seg+}\} \tag{5.117}$$

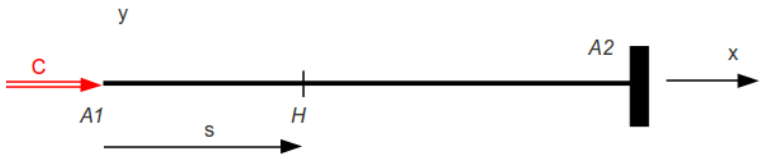


FIGURE 5.10 – Modèle de l'arbre de transmission d'une éolienne avant le multiplicateur de vitesse.

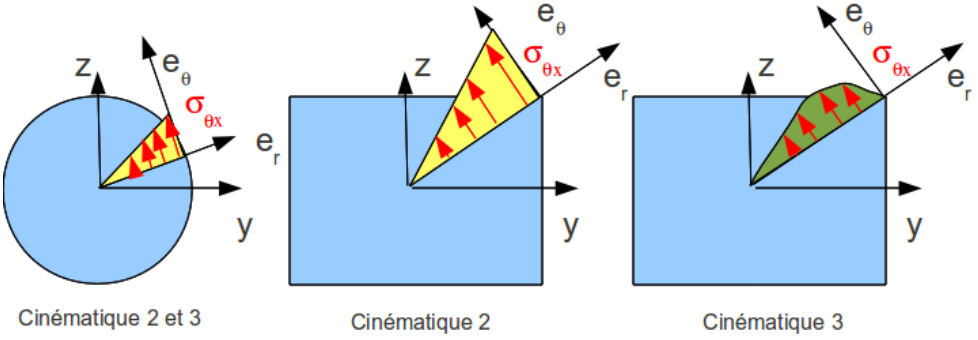


FIGURE 5.11 – Répartition des contraintes de cisaillement dues à une sollicitation de torsion, en fonction de la forme de la section droite et de la cinématique choisie. La répartition de contraintes de l'image centrale n'est pas admissible.

Or le torseur au point A_2 n'est pas une donnée du problème. Il est donc plus intéressant de prendre l'autre définition du torseur des efforts intérieurs :

$$\{\tau_{eff.int.}\} = -\sum_{seg-} \{\tau_{ext\to seg-}\} \tag{5.118}$$

$$= -\{\tau_{A_1}\} \tag{5.119}$$

$$= -\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C\breve{x} \end{array} \right\}_{A_1} \tag{5.120}$$

$$= -\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C\breve{x} + \vec{0} \wedge \vec{A_1H} \end{array} \right\}_{H} \tag{5.121}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C\breve{x} \end{array} \right\}_{H} \tag{5.122}$$

car le torseur en A_1 est une donnée du problème. Le torseur des efforts intérieurs ne comporte qu'un couple autour de l'axe $\vec{x}$ qui correspond à la direction de la fibre moyenne. On dira que l'arbre subit un *moment de torsion*,

$$M_x = -C. \tag{5.123}$$

Loi de comportement Localement, pour créer ce moment de torsion sur l'ensemble de la section droite, faison l'hypothèse que chaque petit élément d'aire $d\tilde{y}\, d\tilde{z}$ autour d'un point P appartenant à la section droite passant par H tel que $\vec{HP} = \tilde{y}\vec{y} + \tilde{z}\vec{z}$, subit une contrainte dans le plan de la section droite et perpendiculaire au vecteur $\vec{HP}$ (Fig. 5.11 image de gauche).

On définit pour tout point P un repère local $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, la contrainte locale est

alors considérée comme proportionelle à la distance $r = \vec{HP}.\vec{e}_r$:

$$\sigma_{\theta x} = kr. \tag{5.124}$$

Le tenseur des contraintes en un point peut donc s'écrire,

$$\bar{\bar{\sigma}} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \sigma_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\theta x} & 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)\otimes(\vec{x},\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)}, \tag{5.125}$$

Pour identifier la valeur du coefficient de proportionalité k, il faut intégrer sur l'ensemble de la surface afin de retrouver le moment de torsion M_x :

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{\tilde{y}} \left(\int_{\tilde{z}} \sigma_{\theta x} r d\tilde{z} \right) d\tilde{y}, && (5.126)\\ &= \int_{\tilde{y}} \left(\int_{\tilde{z}} k r r d\tilde{z} \right) d\tilde{y}, && (5.127)\\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{d/2} k r^2 r dr \right) d\theta, && (5.128)\\ &= k \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{d/2} r^2 r dr \right) d\theta, && (5.129)\\ &= k I_0, && (5.130) \end{aligned}$$

avec I_0 le moment polaire de la section droite,

$$I_0 = \int_S r^2 dS, \tag{5.131}$$

qui dans le cas d'une section circulaire s'écrit,

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{d/2} r^2 r dr d\theta, && (5.132)\\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d^4}{64} d\theta, && (5.133)\\ &= 2\pi \frac{d^4}{64}, && (5.134)\\ &= \frac{\pi d^4}{32}. && (5.135) \end{aligned}$$

Pour l'éolienne, le moment polaire est donc,

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\pi 0.5^4}{32}, && (5.136)\\ &= 6.1\, 10^{-3}\, \mathrm{m}^4. && (5.137)\\ & && (5.138) \end{aligned}$$

Le coefficient de proportionalité est donc,

$$k = \frac{M_x}{I_0}, \tag{5.139}$$

ce qui permet de calculer la contrainte tangentielle en tout point P de la section droite à la distance r de H,

$$\sigma_{\theta x} = \frac{M_x r}{I_0}. \tag{5.140}$$

La contrainte maximale se situe donc sur la surface du cynlindre, pour $r = d/2$.

Déplacement et rotation Sous l'effet de ce moment de torsion, la section droite passant par un point H' à la coordonnée s', va tourner d'un angle $\alpha_x(s'-s)$ par rapport à la section droite passant par un point H à la coordonnée s. Si le solide est élastique de module de Young E et de coefficient de poisson ν, les déformations de cisaillement sont reliées aux contraintes de cisaillement par,

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\epsilon_{xy}, && (5.141)\\ &= G\epsilon_{xy}, && (5.142) \end{aligned}$$

avec G le module de Coulomb,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (5.143)$$

.

Le tenseur des déformation, déduit de l'équation 5.3 est donc,

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \frac{\sigma_{xy}}{\frac{E}{2(1+\nu)}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{xy}}{\frac{E}{2(1+\nu)}} & 0 & 0 \end{array}\right]_{(\vec{x},\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)\otimes(\vec{x},\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)} . \quad (5.144)$$

La déformation tangentielle d'un petit parrallélogramme joignant les points P et p', à la surface du cylindre et appartenant respectivement aux sections passant par H et H' sera donc,

$$\begin{aligned} \epsilon_{\theta x} &= \frac{M_x d\, 2(1+\nu)}{2I_0 E}, && (5.145)\\ &= \frac{M_x d(1+\nu)}{I_0 E}. && (5.146) \end{aligned}$$

Cette déformation implique un déplacement relatif du point P' par rapport au point P dans la direction tangentielle de module,

$$\begin{aligned} u'_P &= \epsilon_{\theta x}(s'-s) && (5.147)\\ &= \frac{M_x d(1+\nu)(s'-s)}{I_0 E}, && (5.148) \end{aligned}$$

ce qui correspond à une rotation de la section en H' telle que,

$$\tan\left(\alpha_x(s'-s)\right) = \frac{u_P}{d/2}. \quad (5.149)$$

L'angle étant petit,

$$\begin{aligned} \alpha_x(s'-s) &= \frac{u'_P}{d/2}, && (5.150)\\ &= \frac{M_x\, 2(1+\nu)(s'-s)}{I_0 E}, && (5.151) \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{M_x\, 2(1+\nu)}{I_0 E}, && (5.152)\\ &= \frac{M_x}{G I_0}. && (5.153) \end{aligned}$$

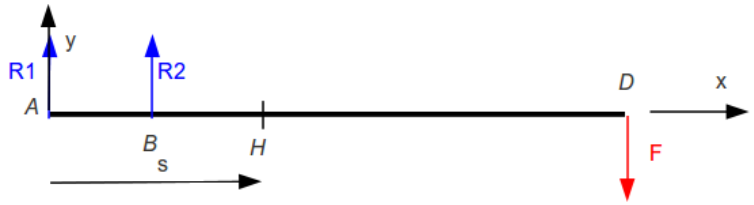


FIGURE 5.12 – Modèle de canne à pêche.

α_x est un angle par unité de longueur dont les unités dans le système international est donc m^{-1}.

Dans le cas de l'arbre de transmission de l'éolienne, on obtiend donc un angle entre le point A_2 et le point A_1 qui vaut,

$$\alpha_x(s'-s) = \frac{C\,2(1+\nu)(s'-s)}{I_0 E}, \tag{5.154}$$

$$= \frac{5.9\,10^5\,2(1+0.3)1.8}{6.1\,10^{-3}2.1\,10^{11}}, \tag{5.155}$$

$$= 2.16\,10^{-4}\ \mathrm{rad}. \tag{5.156}$$

Correction de cisaillement La répartition de contrainte présentée ci-dessus n'est valable que si la section droite est circulaire. Dans le cas d'une section droite non circulaire, la répartition des contraintes tangentielles est plus complexe (Fig. 5.11 droite). Le calcul des ces corrections n'est pas faite dans ce cours. Sachez simplement que le moment polaire doit être corrigé,

$$I_0^c = k_t \quad I_0, \tag{5.157}$$

avec k_t un coefficient de correction de section qui dépend de la forme de la section droite. Par exemple, pour une section carrée, $k_t = 0.85$.

Assimilation Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 040, 080, 081, 082

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95.

5.4.4 Sollicitation simple : cisaillement

Composantes du torseur des efforts intérieurs Si le cisaillement est présent dans une poutre, il est indiscociable d'une flexion (au moins pour les points voisins), aussi l'étude du cisaillement est faite dans le cas de la flexion simple, au paragraphe suivant.

5.4.5 Sollicitation composée : flexion simple

Le poisson vient de mordre et le pêcheur ferre. Si l'on considère la cane à pêche de longueur $l = 3$ m comme une poutre de diamètre se réduisant linéairement d'un diamètre $d_1 = 2$ cm à un diamètre $d_2 = 0.5$ cm, elle subit à son extrémité D l'effort $\vec{F}$ exercée par poisson sur la canne et des efforts $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ exercés par les deux mains du pêcheur (points A et B distants de $a = 0.3$ m). Si l'on suppose que ces efforts sont perpendiculaires à la direction de la fibre moyenne de la canne à pêche, le modèle associé peut être représenté figure 5.12.

Composantes du torseur des efforts intérieurs On oriente la poutre des mains du pêcheur vers l'autre extrémité, donc de A vers D. Si on définit le point H_1 à la distance s du point A, le torseur des efforts intérieurs en ce point, si $s > a$ est donné par,

$$\begin{aligned}
\{\tau_{eff.int.}\} &= \sum_{seg+} \{\tau_{ext \to seg+}\}, && (5.158)\\
&= \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D, && (5.159)\\
&= \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \vec{0} - F\vec{y} \wedge \vec{DH_1} \end{array} \right\}_{H_1}, && (5.160)\\
&= \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F(l-s)\vec{z} \end{array} \right\}_{H_1}. && (5.161)
\end{aligned}$$

Ce torseur a deux composantes : un moment de flexion autour de l'axe $H_1\vec{z}$, $Mf_z = -F(l-s)$ et un *effort tranchant dans la direction* $\vec{y}$, $T_y = -F$.

Les contraintes, les déplacements et les rotations dus au moment fléchissant ont été déjà décrit dans le paragraphe 5.4.2. Il nous reste à traiter les contraintes, les déplacements et les rotations dus à l'effort tranchant.

La première hypothèse est que dans une section droite de la poutre, induites par un effort tranchant T_y, les contraintes σ_{yx} soit constantes :

$$\sigma_{yx} = \frac{T_y}{S}, \tag{5.162}$$

avec S l'aire de la section droite.

Ceci n'est en fait pas possible, car du fait de la symétrie du tenseur des contraintes, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, donc sur la fibre supérieure de la poutre, le vecteur contraintes

$$\begin{aligned}
\vec{T}(P,\vec{y}) &= \bar{\bar{\sigma}}.\vec{y}, && (5.163)\\
&= \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\otimes(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} . \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}, && (5.164)\\
&= \left[\begin{array}{c} \sigma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}. && (5.165)
\end{aligned}$$

Or le vecteur $\vec{T}(P,\vec{y})$ correspond aux actions de l'air sur la poutre si le point P est sur la fibre supérieure, actions qui sont considérées comme nulles. Donc la contrainte de cisaillement est nécessairement nulle sur les fibres supérieure et inférieure de la poutre. Leur intégrale sur la surface doit valoir T_y, donc une évolution de cette contrainte en fonction de la distance $\tilde{y}$ entre le point considéré et le point H doit être calculée. Ces évolutions dépendent de la forme de la section droite comme le montre les tableaux présentés figure 5.13 et 5.14.

On retiendra donc que la contrainte de cisaillement est dépendante de la position $\tilde{y}$ du point P dans la section droite, dans le cas d'un effort tranchant T_y :

$$\sigma_{yx}(\tilde{y}) = g(\tilde{y})\frac{T_y}{S}, \tag{5.166}$$

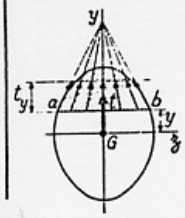
avec $g(\tilde{y})$ une fonction adimensionelle donnée par les tableaux 5.13 et 5.14 dans les dernières colonnes.

TABLEAU II. — EFFORT TRANCHANT - CONTRAINTES DE CISAILLEMENT

TABLEAU II, 2. — SECTIONS USUELLES - CONTRAINTES DE CISAILLEMENT ET DÉFORMATION DUES A L'EFFORT TRANCHANT - FORMULES APPROCHÉES

Les formules approchées, donnant pour les sections usuelles les valeurs des contraintes de cisaillement et la valeur de la section réduite S_1 (intervenant dans le calcul des déformations), ont été déterminées à partir des hypothèses mentionnées dans le tableau II, 1 et des hypothèses supplémentaires suivantes :

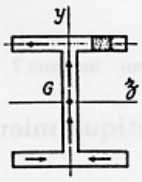
a) Cas des sections pleines.



Le long d'une ligne parallèle à l'axe d'inertie Gz d'ordonnée y, coupant le contour de la section aux deux points a et b :

1. les contraintes de cisaillement, t, passent toutes par le point de concours des deux tangentes en a et b au contour de la section.
2. la composante t_y suivant Gy des contraintes de cisaillement t est constante.

b) Cas des sections minces (fermées ou ouvertes).



La contrainte de cisaillement est tangente en chaque point à la ligne moyenne du profil.

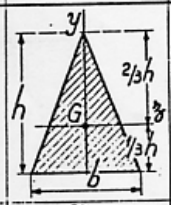
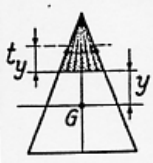
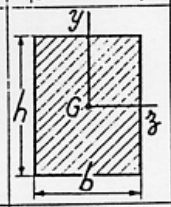
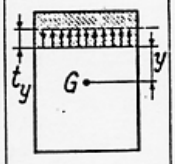
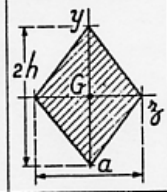
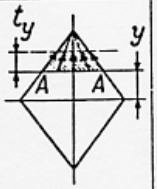
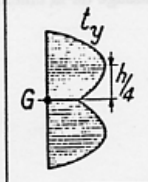
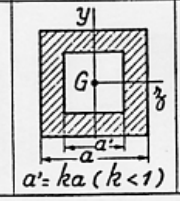
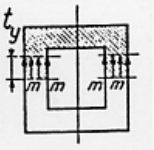
SECTION	CROQUIS	CONTRAINTE DE CISAILLEMENT				DÉFORMATION
		Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	Valeur de S_1
Triangle isocèle			$t_y = \frac{6T}{S}\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{h}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{y}{h}\right)$ $S = \frac{bh}{2}$	$t_y = 1{,}5\frac{T}{S}$ pour $y = \frac{h}{3}$		
Rectangle			$t_y = \frac{3}{2}\frac{T}{S}\left[1-\frac{4y^2}{h^2}\right]$ $S = b\,h$	$t_y = \frac{3}{2}\frac{T}{S}$ pour $y = 0$		$S_1 = \frac{5}{6}S$
Losange			$t_y = \frac{T}{S}\left[1+\frac{y}{h}-\frac{2y^2}{h^2}\right]$ $t_A = t_y\sqrt{1+\frac{a^2}{4h^2}}$ $S = a.h$	$t_y = \frac{9}{8}\frac{T}{S}$ pour $y = \frac{h}{4}$		$S_1 = \frac{30}{31}S$
Carré évidé				$t_y = \frac{3}{2}\frac{T}{S}\cdot\frac{1+k+k^2}{1+k^2}$ pour mm		

FIGURE 5.13 – Effet du cisaillement p1 : notations utilisées $T = T_y$, $t_y = \sigma_{yx}$, $y = \tilde{y}$

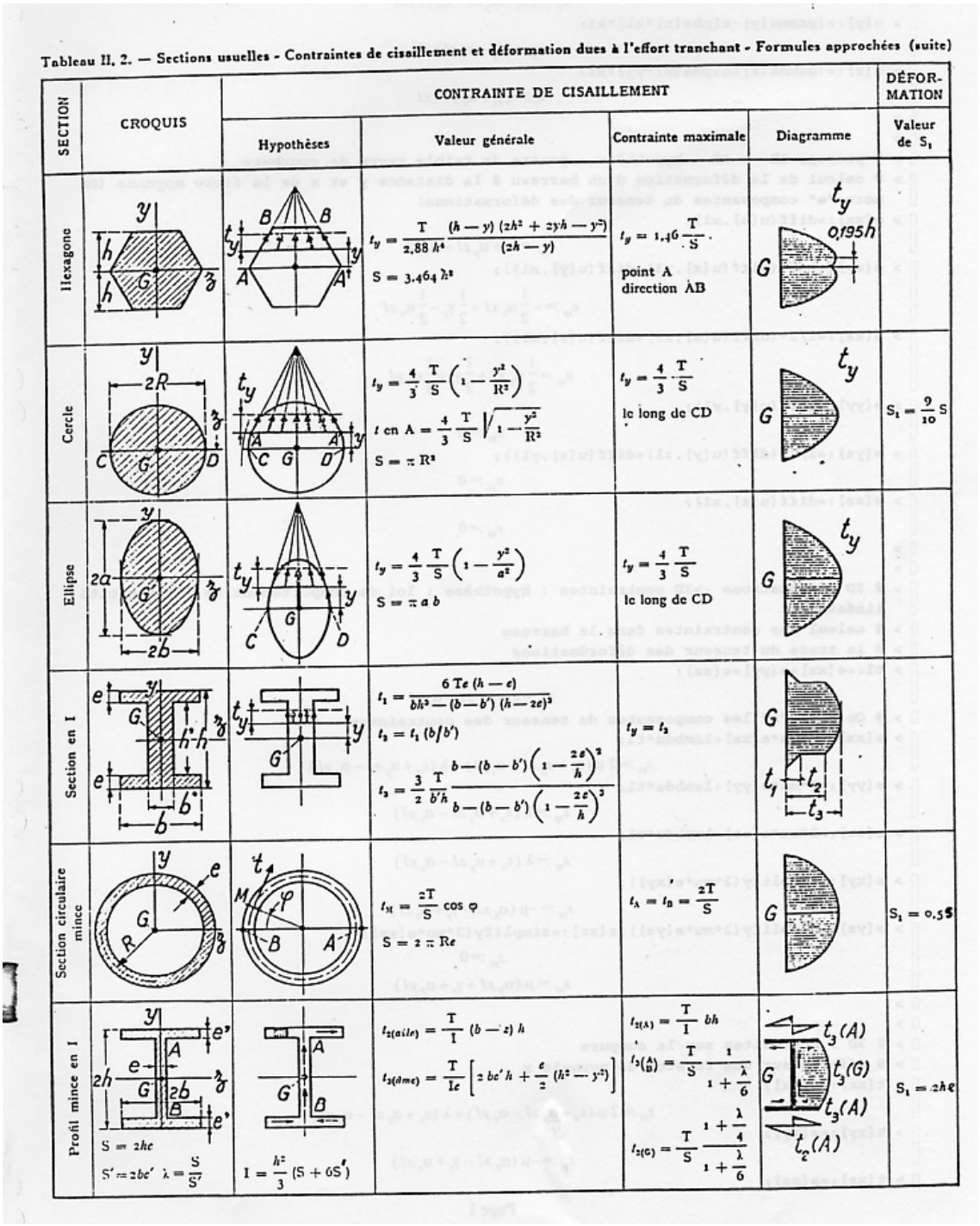


Tableau II. 2. — Sections usuelles - Contraintes de cisaillement et déformation dues à l'effort tranchant - Formules approchées (suite)

SECTION	CROQUIS	CONTRAINTE DE CISAILLEMENT				DÉFORMATION
		Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	Valeur de S_1
Hexagone			$t_y = \frac{T}{2{,}88\,h^4}\frac{(h-y)(2h^2+2yh-y^2)}{(2h-y)}$ $S = 3{,}464\,h^2$	$t_y = 1{,}46\frac{T}{S}$ point A direction AB	t_y $0{,}195h$ G	
Cercle			$t_y = \frac{4}{3}\frac{T}{S}\left(1-\frac{y^2}{R^2}\right)$ t en $A = \frac{4}{3}\frac{T}{S}\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}$ $S = \pi R^2$	$t_y = \frac{4}{3}\frac{T}{S}$ le long de CD	t_y G	$S_1 = \frac{9}{10}S$
Ellipse			$t_y = \frac{4}{3}\frac{T}{S}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)$ $S = \pi a b$	$t_y = \frac{4}{3}\frac{T}{S}$ le long de CD	t_y G	
Section en I			$t_1 = \frac{6\,Te\,(h-e)}{bh^3-(b-b')(h-2e)^3}$ $t_2 = t_1\,(b/b')$ $t_3 = \frac{3}{2}\frac{T}{b'h}\frac{b-(b-b')\left(1-\frac{2e}{h}\right)^2}{b-(b-b')\left(1-\frac{2e}{h}\right)^3}$	$t_y = t_2$	G t_1 t_2 t_3	
Section circulaire mince			$t_M = \frac{2T}{S}\cos\varphi$ $S = 2\pi Re$	$t_A = t_B = \frac{2T}{S}$	G	$S_1 = 0{,}5S$
Profil mince en I			$t_{2(aile)} = \frac{T}{I}(b-z)\,h$ $t_{2(âme)} = \frac{T}{Ie}\left[2\,bc'h + \frac{e}{2}(h^2-y^2)\right]$ $S = 2hc$ $S' = 2bc'$ $\lambda = \frac{S}{S'}$ $I = \frac{h^2}{3}(S+6S')$	$t_{2(A)} = \frac{T}{I}bh$ $t_{2(B)} = \frac{T}{S}\frac{1}{1+\frac{\lambda}{6}}$ $t_{2(G)} = \frac{T}{S}\frac{1+\frac{\lambda}{4}}{1+\frac{\lambda}{6}}$	$t_3(A)$ $t_3(G)$ $t_3(A)$ G $t_2(A)$	$S_1 = 2hc$

FIGURE 5.14 – Effet du cisaillement p2 : notations utilisées $T = T_y$, $t_y = \sigma_{yx}$, $y = \tilde{y}$

Loi de comportement De part la présence de ces contraintes de cisaillement non uniformes dans chaque section droite sous l'effet de l'effort tranchant, la section droite ne reste pas plane et se voile. On peut néanmoins montrer que le déplacement du point H' d'abscisse s' par rapport au point H d'abscisse s est une translation dans la direction de l'effort tranchant,

$$\vec{u}(s') - \vec{u}(s) = \frac{T_y}{Gk_yS}\vec{y}. \tag{5.167}$$

Non seulement, ce déplacement fait apparaître une correction de section par un coefficient $k_y < 1$ donnée dans les tableaux 5.13 et 5.13, mais de plus, ces déplacements sont toujours négligeables devant les déplacements dus au moment fléchissant.

On pourra toujours négliger les déplacements dus aux efforts tranchants, devant les déplacements dus aux moments fléchissants.

Déplacement et rotation Les formules obtenues pour la flexion pure restent valables puisque l'on néglige les déplacements dus aux efforts tranchant. On veillera néanmoins lors des intégrations successives, à bien prendre en compte le fait que le moment fléchissant est maintenant dépendant de l'abcisse s.

$$\frac{d^2u_y(s)}{ds^2} = \frac{M_{fz}(s)}{E(s)I_{Hz}(s)}. \tag{5.168}$$

Pour le cas de notre canne à pêche, si elle n'est pas creuse,

$$I_{Hz}(s) = \pi\frac{\left(d_1 + \frac{s}{l}(d_2 - d_1)\right)^4}{64}, \tag{5.169}$$

$$\tag{5.170}$$

si le module de Young est constant $E = 1\ 10^{10}$ (bois) et si l'on considère les deux mains fixes,

$$u_y(0) = 0, \tag{5.171}$$
$$u_y(a) = 0, \tag{5.172}$$

il est nécessaire de connaître aussi l'évolution du moment fléchissant entre les points A et B.

Pour un point H_2 d'abcisse s comprise entre 0 et a, le torseur des efforts intérieurs est donné par,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+}\{\tau_{ext\to seg+}\}, \tag{5.173}$$
$$= \left\{\begin{array}{c} R_2\vec{y} \\ \breve{0} \end{array}\right\}_B + \left\{\begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \breve{0} \end{array}\right\}_D. \tag{5.174}$$

Ceci nécessite de connaître la réaction R_2 en fonction du chargement F. Il faut faire l'équilibre de la canne à pêche, en écrivant que la somme des torseurs est nulle :

$$\left\{\begin{array}{c} R_1\vec{y} \\ \breve{0} \end{array}\right\}_A + \left\{\begin{array}{c} R_2\vec{y} \\ \breve{0} \end{array}\right\}_B + \left\{\begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \breve{0} \end{array}\right\}_D = \left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ \breve{0} \end{array}\right\} \tag{5.175}$$

$$\left\{\begin{array}{c} R_1\vec{y} \\ \breve{0} \end{array}\right\}_A + \left\{\begin{array}{c} R_2\vec{y} \\ R_2\vec{y}\wedge(-a\vec{x}) \end{array}\right\}_A + \left\{\begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F\vec{y}\wedge(-l\vec{x}) \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ \breve{0} \end{array}\right\} \tag{5.176}$$

$$\left\{\begin{array}{c} (R_1 + R_2 - F)\,\vec{y} \\ (aR_2 - lF)\,\breve{z} \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ \breve{0} \end{array}\right\} \tag{5.177}$$

d'où,

$$R_2 = \frac{l}{a}F, \tag{5.178}$$

$$R_1 = \left(1-\frac{l}{a}\right)F. \tag{5.179}$$

Le torseur au point H_2 avec s entre 0 et a est donc,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+}\{\tau_{ext\to seg+}\}, \tag{5.180}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \frac{l}{a}F\vec{y} \\ \breve{0} \end{array}\right\}_B + \left\{\begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \breve{0} \end{array}\right\}_D, \tag{5.181}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \frac{l}{a}F\vec{y} \\ \frac{l}{a}F\vec{y}\wedge(s-a)\vec{x} \end{array}\right\}_{H_2} + \left\{\begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F\vec{y}\wedge(s-l)\vec{x} \end{array}\right\}_{H_2}, \tag{5.182}$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \left(\frac{l}{a}-1\right)F\vec{y} \\ F\left(\frac{l}{a}(a-s)+(s-l)\right)\breve{z} \end{array}\right\}_{H_2} \tag{5.183}$$

Pour connaître le déplacement en tout point, il suffit d'intégrer deux fois, mais en faisant cela pour chaque tronçon, puisque les expressions des moments fléchissants changent. Pour le tronçon entre A et B :

$$u_{y2}(s) = \int_{s"=0}^{s}\left(\int_{s'=0}^{s"}\frac{F\left(\frac{l}{a}(a-s')+(s'-l)\right)}{E\pi\frac{\left(d_1+\frac{s'}{l}(d_2-d_1)\right)^4}{64}}ds'\right)ds" + A_2 s + B_2. \tag{5.184}$$

Pour le tronçon entre B et D :

$$u_{y1}(s) = \int_{s"=a}^{s}\left(\int_{s'=a}^{s"}\frac{F(s'-l)}{E\pi\frac{\left(d_1+\frac{s'}{l}(d_2-d_1)\right)^4}{64}}ds'\right)ds" + A_1 s + B_1. \tag{5.185}$$

Les 4 constantes sont déterminées par les 4 conditions :

$$u_{y2}(0) = 0, \tag{5.186}$$

$$u_{y2}(a) = 0, \tag{5.187}$$

$$u_{y1}(a) = u_{y2}(a), \tag{5.188}$$

$$\frac{du_{y1}}{ds}(a) = \frac{du_{y2}}{ds}(a), \tag{5.189}$$

avec les deux dernières équations qui traduisent le raccordement des deux fonctions : les déplacements et les pentes doivent être les mêmes.

La résolution, certe compliquée des intégrales, peut être faite à l'aide de maxima.

résolution par Maxima

```
(%i1) restart;
f1(s):=(1*(3/0.3*(0.3-s)+(s-3))/(1e10*\pi*(0.02+s/3*(0.005-0.02))^4/64));
f2(s):=(1*(s-3)/(1e10*\pi*(0.02+s/3*(0.005-0.02))^4/64));
```

(%o1) *restart*

(%o2) $$f1(s) := \frac{1\left(\frac{3}{0.3}(0.3-s)+(s-3)\right)}{\frac{1.0\,10^{10}\,\pi\left(0.02+\frac{s}{3}(0.005-0.02)\right)^4}{64}}$$

(%o3) $$f2\,(s) := \frac{1\ (s-3)}{\frac{1.0\ 10^{10}\ \pi\ \left(0.02+\frac{s}{3}\ (0.005-0.02)\right)^4}{64}}$$

```
(%i4) truc01:integrate(f1(s),s);
truc02:subst(s1,s,truc01)-subst(0,s,truc01)+A2;
truc03:integrate(truc02,s1);
truc04:subst(s2,s1,truc03)-subst(0,s1,truc03)+B2;
```

$rat : replaced 0.02 by 1/50 = 0.02 rat : replaced -0.005 by -1/200 = -0.005 rat : replaced 10.0 by 10/1 = 10.0 rat : replaced 0.3 by 3/10 = 0.3$

(%o4) $$\frac{6.4000000000000002\,10^{-9}\ (7200000000\,s-9600000000)}{\pi\ (s^3-12\,s^2+48\,s-64)}$$

(%o5) $$A2+\frac{6.4000000000000002\,10^{-9}\ (7200000000\,s1-9600000000)}{\pi\ \left(s1^3-12\,s1^2+48\,s1-64\right)}-\frac{0.96}{\pi}$$

(%o6) $$s1\,A2-\frac{6.4000000000000002\,10^{-9}\ (7200000000\,s1-19200000000)}{\pi\ \left(s1^2-8\,s1+16\right)}-\frac{0.96\,s1}{\pi}$$

(%o7)
$$B2+s2\,A2-\frac{6.4000000000000002\,10^{-9}\ (7200000000\,s2-19200000000)}{\pi\ \left(s2^2-8\,s2+16\right)}-\frac{0.96\,s2}{\pi}-\frac{7.680000000000001}{\pi}$$

```
(%i8) truc05:integrate(f2(s),s);
truc06:subst(s1,s,truc05)-subst(0.3,s,truc05)+A1;
truc07:integrate(truc06,s1);
truc08:subst(s2,s1,truc07)-subst(0.3,s1,truc07)+B1;
```

$rat : replaced 0.02 by 1/50 = 0.02 rat : replaced -0.005 by -1/200 = -0.005$

(%o8) $$-\frac{6.4000000000000002\,10^{-9}\ (2400000000\,s-8000000000)}{\pi\ (3\,s^3-36\,s^2+144\,s-192)}$$

(%o9)
$$A1-\frac{6.4000000000000002\,10^{-9}\ (2400000000\,s1-8000000000)}{\pi\ \left(3\,s1^3-36\,s1^2+144\,s1-192\right)}+\frac{0.30660901953816}{\pi}$$

(%o10)
$$s1\,A1+\frac{6.4000000000000002\,10^{-9}\ (2400000000\,s1-8800000000)}{\pi\ \left(3\,s1^2-24\,s1+48\right)}+\frac{0.30660901953816\,s1}{\pi}$$

(%o11)
$$B1+s2\,A1-0.3\,A1+\frac{6.4000000000000002\,10^{-9}\ (2400000000\,s2-8800000000)}{\pi\ \left(3\,s2^2-24\,s2+48\right)}+\frac{0.30660901953816\,s2}{\pi}+\frac{1.167135872176048}{\pi}$$

conditions aux limites

```
(%i12) subst(0,s2,truc04)=0;
subst(0.3,s2,truc04)=0;
subst(0.3,s2,truc04)=subst(0.3,s2,truc08);
subst(0.3,s1,truc02)=subst(0.3,s1,truc06);
```

(%o12) $$B2 = 0$$

(%o13) $$B2 + 0.3\,A2 - \frac{0.0018933528122718}{\pi} = 0$$

(%o14) $$B2 + 0.3\,A2 - \frac{0.0018933528122718}{\pi} = B1$$

(%o15) $$A2 - \frac{0.019956962075297}{\pi} = A1$$

```
(%i16) B2s:0;
A2s:0.0018933528122718/pi/0.3;
B1s:0;
A1s:A2s-0.019956962075297/pi;
```

(%o16) $$0$$

(%o17) $$\frac{0.006311176040906}{\pi}$$

(%o18) $$0$$

(%o19) $$-\frac{0.013645786034391}{\pi}$$

fonctions solutions

```
(%i52) truc09:float(subst(B2s,B2,subst(A2s,A2,truc04)));
truc10:float(subst(B1s,B1,subst(A1s,A1,truc08)));
```

(%o52)
$$-\frac{6.4000000000000002\,10^{-9}\,\left(7.2\,10^{9}\,s2-1.92\,10^{10}\right)}{\pi\,\left(s2^{2}-8.0\,s2+16.0\right)}-\frac{0.95368882395909\,s2}{\pi}-\frac{7.680000000000001}{\pi}$$

(%o53)
$$\frac{6.4000000000000002\,10^{-9}\,\left(2.4\,10^{9}\,s2-8.8\,10^{9}\right)}{\pi\,\left(3.0\,s2^{2}-24.0\,s2+48.0\right)}+\frac{0.29296323350377\,s2}{\pi}+\frac{1.171229607986365}{\pi}$$

fin de résolution par Maxima On peut alors tracer la déformée de la canne à pêche figure 5.15.

Assimilation Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 083, 002, 005, 049, 051, 052, 055.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95.

5.4.6 Sollicitations composées : la totale !

La théorie décrite dans ce cours est linéaire. Lorsque le torseur des efforts intérieurs comporte plusieurs composantes (effort normal, efforts tranchant suivant $\vec{y}$, efforts tranchant suivant $\vec{z}$, moment de torsion, moment fléchissant autour de $H\vec{y}$, moment fléchissant autour de $H\vec{z}$) les effets de chacun s'additionnent. Il est donc possible de résoudre chacun des problème de base, puis de sommer leurs contributions en terme de rotation, déplacement et contraintes.

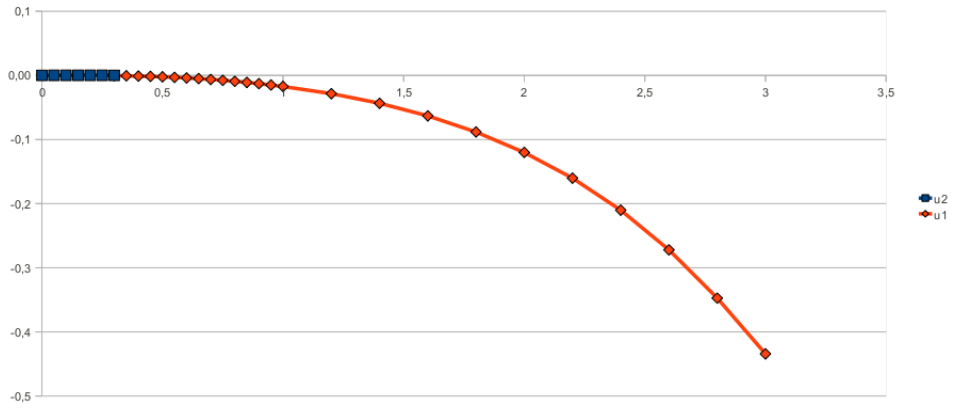


FIGURE 5.15 – déformée d'une canne a pêche pour une force de 1 N en bout de canne.

Lieu(x) de la contrainte maximale La limite d'élasticité est une grandeur locale. Si le chargement de la structure augmente, il existe un point P de la poutre où la limite sera dépassée. La structure peut donc devenir plastique (acier, alu...) ou rompre (fonte...).

Nous avons vu que

- l'effort normal N crée une contrainte $\sigma_x x = N/S$, sur toute la section droite
- le moment fléchissant M_{fy} crée une contrainte $\sigma_x x = M_{fy}\tilde{z}/I_{Hy}$ maximale sur les bords de la section droite dans la direction $\vec{z}$,
- le moment fléchissant M_{fz} crée une contrainte $\sigma_x x = M_{fz}\tilde{y}/I_{Hz}$ maximale sur les bords de la section droite dans la direction $\vec{y}$,
- le moment de torsion M_x crée une contrainte $\sigma_{\theta x} = M_x r/I_0$ maximale sur les bords de la section droite si elle est circulaire.
- les efforts tranchants T_y et T_z créent des contraintes $\sigma_y x$ et $\sigma_z x$ respectivement qui sont nulles sur les bords de la section droite.

On admettra que pour une structure de type poutre, c'est toujours sur la surface externe que la limite d'élasticité est dépassée en premier et non au coeur de celle-ci. Le dimensionnement se fera en prenant en compte traction, flexions et torsion. On appellera contrainte équivalente,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{\theta x}^2}, \tag{5.190}$$

cherchera le point P de coordonnées $(s, \tilde{y}, \tilde{z})$ où cette contrainte équivalente est maximale. Pour cela, on rapelle que

$$\sigma_x x = \frac{N/S}{+}\frac{M_{fy}\tilde{z}}{I_{Hy}} - \frac{M_{fz}\tilde{y}}{I_{Hz}}, \tag{5.191}$$

$$\sigma_{\theta x} = \frac{M_x r}{I_0} \text{(pour une poutre de section circulaire).} \tag{5.192}$$

Assimilation Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 24, 25.

Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php ?id=95.