

1/ Matrice d'inertie des pièces 1, 2, 4 en leurs centres d'inertie respectifs G_1, G_2, G_4 .

@ I_{G_4} : $I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) dm$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z \end{cases}$$

$$I_{zz}_{G_4} = \iiint \rho r^2 r dr d\theta dz$$

$$= \iiint \rho r^3 dr d\theta dz = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} dz$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi h \Rightarrow$$

$$I_{zz} = M \frac{R^2}{2}$$

$$I_{xx} + I_{yy} = \iiint (x^2 + z^2) dm + \iiint (y^2 + z^2) dm$$

$$2 I_{yy} = 2 I_{xx} = I_{zz} + 2 \iiint z^2 dm$$

$$\Rightarrow \iiint z^2 dm = \iiint \rho z^2 r dr d\theta dz$$

$$= \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

$$= \rho \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{z^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \rho R^2 \pi \frac{2 h^3}{24} = \frac{M h^2}{12}$$

D'où: $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} + M \frac{h^2}{6} = \frac{M R^2}{2} + \frac{M h^2}{6}$

(b) I_{G_2} :
$$I_{11} = \iiint (y^2 + z^2) dm$$

$$= \int_{-x/2}^{x/2} \int_{-y/2}^{y/2} \int_{-z/2}^{z/2} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz$$

$I_{11} = \rho \int \frac{x}{3} \left(\frac{y^3}{4} + \frac{z^3}{4} \right)$ sachant que $M = \rho x y z \Rightarrow I_{11} = \frac{M}{12} (y^2 + z^2)$

$$\Rightarrow I_{G_2} = \frac{M}{12} \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

(2) Théorème d'Huyghens :

$$I_G = I_{G_2} + I(G, \text{masse } @ \text{ placée en } G)$$

$$I_G = I_{G_2} + M \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ba & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

(a, b, c) sont les coordonnées de G_2/G et G

$$I_G = I_{G_1} + M \begin{bmatrix} \alpha^2 + \gamma^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\beta\alpha & \alpha^2 + \gamma^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & \alpha^2 + \beta^2 \end{bmatrix}$$

(3) ~~Equilibrage statique :~~

~~$$M \vec{OG_E} = m \vec{OG} + m_1 \vec{OG_1} + m_2 \vec{OG_2}$$~~

~~$\vec{OG_E}$ est placé sur l'axe de rotation.~~

~~$$\begin{cases} m x_g + m_1 E_1 - m_2 E_1 = 0 \\ m y_g = 0 \end{cases}, \quad x_g = \left(\frac{m_2 - m_1}{m} \right) E_1$$~~

→ Equilibrage statique: placer le centre de gravité sur l'axe de rotation.

→ Equilibrage dynamique: Faire coïncider l'axe de rotation avec un des axes principaux d'inertie.

• Eq Statique: $M \vec{OG}_G = m \vec{OG} + m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2$

$\vec{OG}_G$ sur l'axe de rotation $\Rightarrow x_g, y_g = 0$

$$m x_g + m_1 E_1 - m_2 E_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$$

• Eq dyn matrice diagonale:

$$\Rightarrow -249 \cdot 10^{-4} + (m_1 + m_2) E_1 \cdot \hat{E}_3 = 0$$

$$\Rightarrow 2/m_1 = 2/m_2 = \frac{249 \cdot 10^{-4}}{E_1 \cdot \hat{E}_3} = \frac{249 \cdot 10^{-4}}{(10^{-1})^2 (75 \cdot 10^{-3})^2}$$

$$m_1 = m_2 = 1,66 \text{ kg}$$