

MECANIQUE GENERALE

Mourad BENTAHAR

mourad.bentahar@univ-lemans.fr



© Musée de la civilisation, 2002

Table de matières

1. Introduction

- 1.1 Quelques définitions
- 1.2 Bref historique de la mécanique

2. Vecteurs

3. Actions mécaniques

- 3.1 Force et moment
- 3.2 Résultante
- 3.3 Torseur et actions mécaniques
- 3.4 Principe Fondamental de la Statique (PFS)

4. Cinématique

- 4.1 Référentiel
- 4.2 Mouvement d' un solide – torseur cinématique

Table de matières

5. Cinétique

- 5.1 Quantité de mouvement
- 5.2 Moment cinétique
- 5.3 Torseur cinétique

6. Dynamique

- 6.1 Théorème de la résultante cinétique
- 6.2 Théorème du moment cinétique
- 6.3 Torseur dynamique – Théorème générale de la dynamique

Table de matières

7. Énergétique

- 7.1 Puissance
- 7.2 Liaisons entre solides
- 7.3 Énergie cinétique
- 7.4 Principe des puissances virtuelles – Principe de d’Alembert (1750)
- 7.5 Théorème de l’ énergie cinétique
- 7.6 Équations de Lagrange

8. Annexes

- 8.1 Tenseurs d’ inertie de solides usuels
- 8.2 Torseurs cinématique et des interefforts de liaisons usuelles

Références

[1] Agati P., Delville G., Brémont Y. (1996). Mécanique du solide - Applications industrielles , Dunod *code BU: 531 AGA*

[2] Bône J.-C. (1994). Mécanique générale, Dunod, *code BU: 531 BON*

[3] Chevalier L. (1995). Mécanique des systèmes et des milieux déformables, Ellipses, *code BU: 531 CHE*

[4] Fanchon J.-L. (2001). Guide de mécanique, Nathan, *code BU: FAN 620.1*

[5] Newton I. (1687). Philosophiae naturalis principia mathematica, Pepys Press, copie consultable à l' Université de Cambridge

[6] Gruber C., Willy B. (1998). Mécanique générale, Presses polytechniques et universitaires romandes, *code BU: 531 GRU*

Introduction

Quelques définitions

Point matériel :

Corps de masse constante dont les dimensions sont suffisamment petites pour pouvoir être assimilé à un point (on parle aussi de masse ponctuelle).

Système matériel :

Ensemble fini ou infini de points matériels pouvant être soumis à des forces de liaisons.

Solide S (non déformable) :

Système matériel tel que la distance entre deux points reste constante au cours du temps.

Introduction

Quelques définitions

Mécanique

1. Étude du mouvement des corps et des actions mécaniques s'exerçant sur ces corps,
2. Étude du mouvement - et du repos - de systèmes matériels caractérisés par des observables spatio-temporels (temps, position, quantité de mouvement, ...).

Mécanique classique

Domaine de la mécanique pour des vitesses inférieures à un dixième de la vitesse de la lumière ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$) et pour des systèmes matériels de dimensions comprises entre 10^{-10} et 10^{20} m.

Introduction

Le programme de mécanique de l' ENSIM comporte les matières suivantes :

a) 1ère année:

Mécanique générale (solides indéformables)
Technologie Mécanique
Mécanique des fluides
Vibrations des systèmes discrets
Acoustique

b) 2ème année :

Mécanique des milieux continus (solides déformables)
Vibration et acoustique (propagation dans les solides & fluides).

Introduction

La mécanique générale fournit des méthodes qui permettent de :

- 1- Décrire les mouvements d'un système constitué par un assemblage de solides indéformables
- 2- Déterminer les efforts (forces et moments) agissant sur chacun des éléments du système.
- 3- La mécanique générale est l'outil de base de l'ingénieur mécanicien qui permet le dimensionnement des systèmes mécaniques.
- 4- Les principes fondamentaux sont utilisés dans les autres domaines de la mécanique pour établir les équations de base : mécanique des fluides, vibrations, acoustique.

Bref historique de la mécanique

Mécanique qualitative → Description des phénomènes

a) Aristote, philosophe et savant grec (384 -322 av. J.-C.) :

Systeme géocentrique (terre immobile), loi erronée $V = \alpha F$

Selon Aristote: Force requise pour maintenir vitesse $V = \alpha F$

Expérience: Faire tomber des corps dans un liquide

Formulation contemporaine: $m\ddot{z} = F - R\dot{z}$

Si la vitesse est asymptotique $\ddot{z} = 0$ → $F = R\dot{z}$ comme le dit Aristote



- La conclusion d'Aristote n'est pas fautive, mais elle attribue au mouvement en général l'effet d'une force spécifique (frottement) et devient incapable de rendre compte du mouvement dans le vide.

Conclusion erronée, mais fondamentale pour la physique d'Aristote :

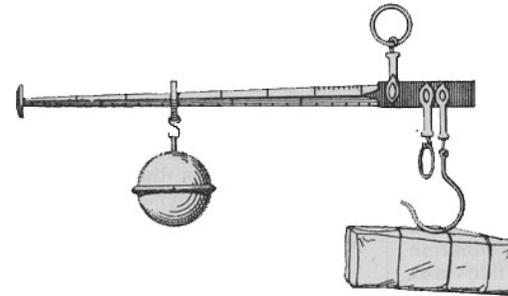
La vitesse de chute des corps dépend de leur masse.

Exemple NASA

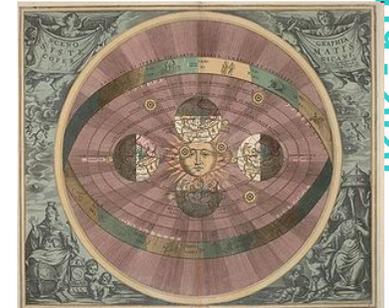
Bref historique de la mécanique

b) Archimède, mathématicien et physicien grec (287-212 av. J.-C.) :
Levier (notion de moment)

*le "bras" de levier est inversement
proportionnel à la masse*



c) Copernic, astronome polonais (1473-1543) :
système héliocentrique (soleil immobile)



Bref historique de la mécanique

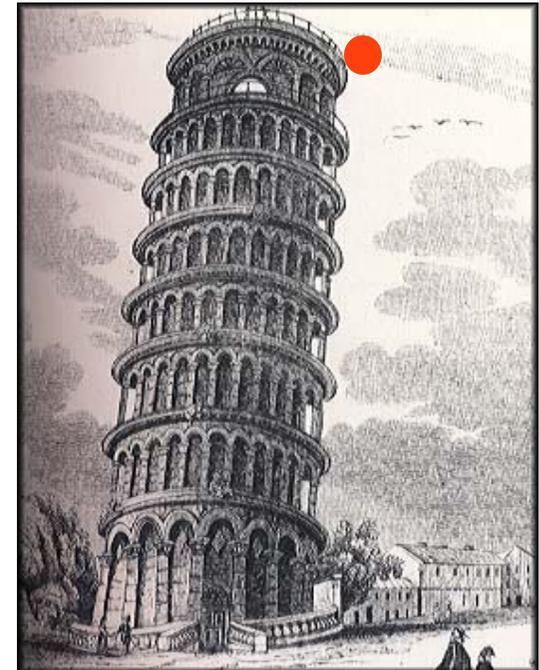
d) Galilée, physicien et astronome italien (1564-1642) :
observation du ciel à la lunette, principe d'inertie

Notion d'inertie : Du haut de la tour de Pise, il lâche des balles de plomb, de bois, de papier et découvre que, quelle que soit leur masse, tous les corps sont animés du même mouvement.

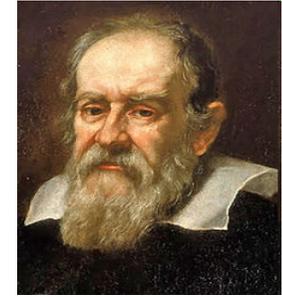
Notion de référentiel :

Lorsqu'on est à bord d'un navire qui vogue en ligne droite et à vitesse constante, on ne ressent aucun mouvement. On est immobile par rapport au navire mais le navire se meut par rapport à la Terre.

En fait, rien n'est absolument immobile et tout dépend du référentiel dans lequel on se place.



Bref historique de la mécanique



e) Huygens, physicien et astronome hollandais (1629-1695) :

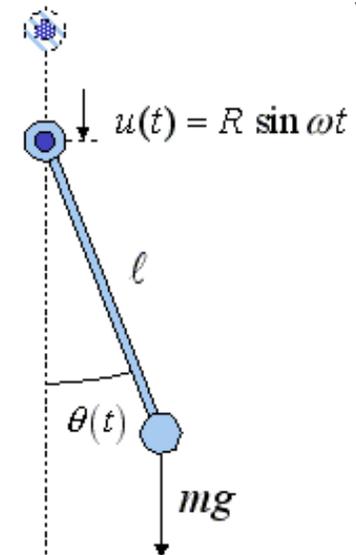
L' accélération g n' est pas constante à la surface de la terre

Expérience:

Un pendule oscille sous l' effet sous l' effet de sa composante presque horizontale de son poids

L' expression de la période d' oscillation, nous permet de calculer la valeur de g en fonction de l' emplacement géographique

$$T \cong 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



Bref historique de la mécanique

Mécanique quantitative → Prédiction des phénomènes

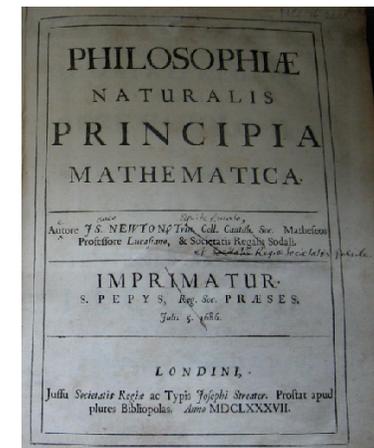
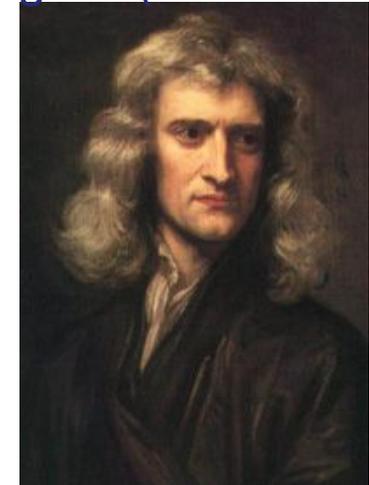
f) Newton, mathématicien, physicien et astronome anglais (1642-1726)

Anecdote de la pomme : Etudiant à Cambridge, il quitte la ville deux années à cause de la peste en 1665. C'est dans un verger que la chute d'une pomme lui inspire de PFD.

Principe fondamental de la dynamique :

En 1687 paraît son œuvre maîtresse : *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Cet ouvrage expose le principe d'inertie, la proportionnalité des forces et des accélérations, l'égalité de l'action et de la réaction, ...

Justice : accusé de plagiat par Hooke sur l'attraction universelle, ...



Bref historique de la mécanique

f) Newton, mathématicien, physicien et astronome anglais (1642-1726)

Principe d'inertie:

Dans un référentiel terrestre, tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme si les forces qui s'exercent sur lui se compensent.

Remarques :

- Persévérer dans son état de repos signifie rester immobile.
- Le Principe d'inertie s'applique également à un corps qui n'est soumis à aucune force.
- Le Principe d'inertie n'est valable que dans certains référentiels. Nous l'appliquerons dans les référentiels terrestres, géocentriques, héliocentriques.
- Lorsque la trajectoire d'un corps n'est pas une droite ou lorsque la vitesse de ce corps n'est pas constante, on peut en conclure d'après le Principe d'inertie que les forces qui s'exercent sur ce corps ne se compensent pas.

Bref historique de la mécanique

f) Newton, mathématicien, physicien et astronome anglais (1642-1726)

- Relation fondamentale de la dynamique: Point matériel $\vec{f} = m \vec{\gamma}$



- Principe d' action / réaction

- Force de gravitation : attraction universelle

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{d_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

La loi newtonienne de la gravitation permet de retrouver la loi de Galilée, en première approximation: avec d = rayon terrestre et m_T = masse de la Terre



$$g = G \frac{m_T}{d^2} = 9,81 m / s^2$$

e) Euler, mathématicien suisse (1707-1783) : expression du moment cinétique

Bref historique de la mécanique

Mécanique analytique  Formalisme énergétique

- D' Alembert, philosophe et mathématicien français (1717-1783)

En 1743, il publia son célèbre *Traité de Dynamique*, qui dans l'histoire de la mécanique représente l'étape qu'il fallait franchir entre l'œuvre de Newton et celle de Lagrange. En 1746, il est élu associé géomètre.

- Lagrange, mathématicien français (1736-1813)

En physique, en précisant le principe de moindre action, avec le calcul des variations vers 1756, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique, vers 1788. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie.

Bref historique de la mécanique

Mécanique qualitative

- Poincaré, mathématicien français (1854-1912) :

Caractérisation des phénomènes chaotiques (forte influence des conditions initiales)

Exemple: [Double pendule](#)

Mécanique relativiste

- Einstein, physicien allemand naturalisé suisse puis américain (1879-1955)

Théorie de la relativité = les variables de temps et d'espace dépendent du système de référence

2 Vecteurs

- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base orthonormée directe si les trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
- ont pour norme 1,
 - sont orthogonaux deux à deux,
 - forment un trièdre direct (figure 1).

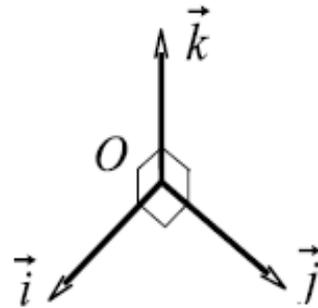


FIG. 1 - Repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constitué d'une base orthonormée directe et d'une origine (figure 1).

Remarque: Un repère peut être associé à un solide. Par conséquent, un solide permet de définir un repère.

Coordonnées d'un vecteur \vec{v} : dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$, soit $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$.

Remarque: Les coordonnées v_1, v_2, v_3 sont des valeurs algébriques; elles possèdent un signe.

Exemple: $\vec{R} = r \vec{x}$ avec r valeur algébrique.

ATTENTION: Dans $\vec{OM} = OM \vec{x}$, OM est une distance (positif) et n'est donc pas une valeur algébrique.

Produit scalaire : soit $\vec{v}_1 (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{v}_2 (x_2, y_2, z_2)$ (figure 2) ,

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cos \theta \text{ est un scalaire.}$$

Remarque: Si $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ alors $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Module, norme : $\|\vec{v}_1\|^2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

Produit vectoriel :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 z_2 \end{vmatrix} = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| |\sin \theta| \vec{u},$$

est un vecteur avec $\vec{u} \perp \vec{v}_1$, $\vec{u} \perp \vec{v}_2$ et $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u})$ trièdre direct (figure 2).

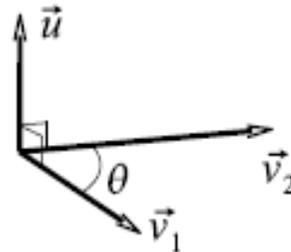


FIG. 2 - *Produit vectoriel*

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$$

Si \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont colinéaires alors $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{0}$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

Produit mixte : invariant par permutation circulaire, soit $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = \vec{v}_2 \cdot (\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1) = \vec{v}_3 \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$

Exercice

La trajectoire d'un mobile dans un repère orthonormé directe $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donnée par les équations paramétriques suivantes : $x = 4t^2$, $y = 4(t - \frac{t^3}{3})$, $z = 3t + t^3$

Montrer que le vecteur vitesse \vec{V} fait un angle constant avec l'axe oz . Quelle est la valeur de cet angle.

A faire tout de suite !!!

Exercice

Soient deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 faisant chacune respectivement un angle de 25° et 35° avec la résultante \vec{R} qui a une valeur de 400 N . Déterminer les modules des deux forces.

A faire tout de suite !!!

3 Actions mécaniques

Une action mécanique est un phénomène physique permettant de maintenir un corps au repos, de créer ou de modifier un mouvement, de déformer un corps.

3.1 Force et moment

Force : Une force est représentée par un vecteur, généralement associé à un point d'application (vecteur lié).

Poids = Force exercée par la pesanteur

Soit un point matériel de masse m (figure 3):

$$\vec{F} \text{ (pesanteur} \rightarrow \text{point matériel)} = \vec{F} = m \vec{g} = -mg \vec{k} \text{ , avec } g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$$

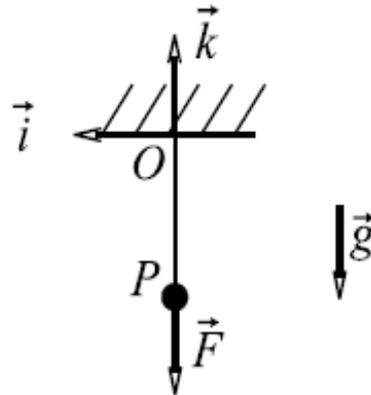


FIG. 3 – Point matériel soumis à la pesanteur.

Force exercée par un ressort (figure 4)

$$\vec{F} \text{ (ressort} \rightarrow \text{point matériel)} = -k(x - x_0) \vec{i} ,$$

avec x la position courante de S , x_0 sa position au repos et k la raideur du ressort en Nm^{-1} .

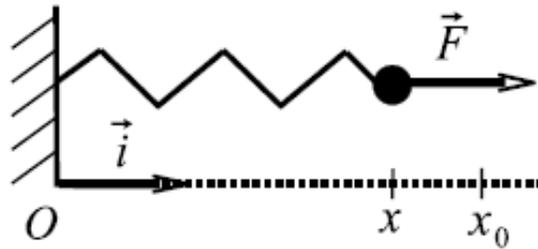


FIG. 4 – Force exercée par un ressort comprimé sur un point matériel.

Remarque: L'unité de la force est le Newton N ($1 \text{ N} \cong$ poids d'une pomme).

Moment : Hors de son point d'application, une force peut engendrer un moment (dont l'action a tendance à imposer un mouvement de rotation autour de ce point)

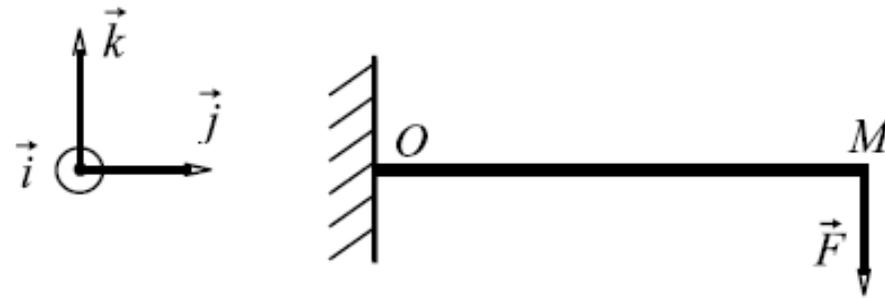
Le moment exercé au point O par la force \vec{F} appliquée en M est :

$$\vec{M} (O) = \vec{OM} \wedge \vec{F} .$$

Moment créé par une force exercée sur une poutre (figure 5) :

$$\vec{M} (O, \text{solide } S \rightarrow \text{poutre}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = (OM \vec{j}) \wedge (-F \vec{k}) = -OM F \vec{i} ,$$

avec F l'amplitude de la force en Newton. Le moment exercé en O par \vec{F} a tendance à faire tourner la poutre autour de l'axe (O, \vec{i}) dans le sens négatif.

FIG. 5 – Force exercée sur une poutre au point M .

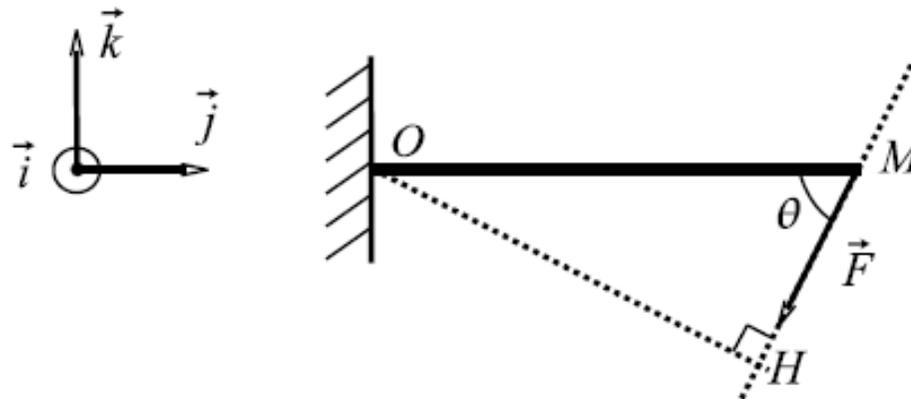
Règle du tire-bouchon: Quand je tourne le tire-bouchon dans le sens horaire, il se déplace dans le sens manche-pointe (ici, dans le sens opposé à \vec{i} , c'est-à-dire vers ma feuille).

Remarque: L'unité du moment est le Nm.

Force "oblique"

$$\|\vec{M}(O)\| = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{OM}\| |\sin\theta| = \|\vec{F}\| \cdot OH$$

avec OH la distance entre O et la droite passant par M de vecteur directeur \vec{F} (figure 6).

FIG. 6 – Force "oblique" exercée sur une poutre au point M .

Ressort à spirale

$$\vec{M} (O, \text{ressort} \rightarrow \text{solide } S) = -C(\theta - \theta_0) \vec{i}$$

avec θ_0 l'angle au repos et C la raideur du ressort en Nm/rad (figure 7).

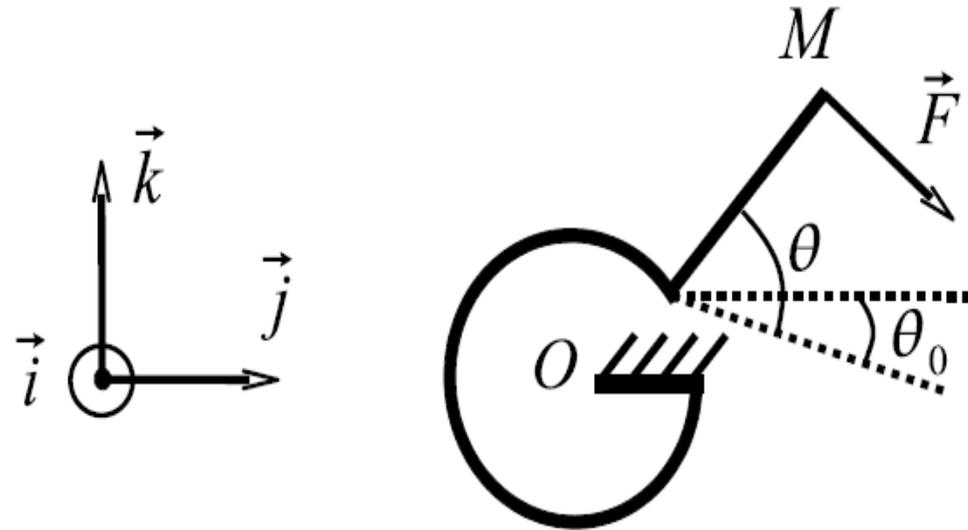


FIG. 7 – Ressort à spirale.

3.2 Résultante

Lorsqu'un système Σ subit plusieurs actions, on peut calculer la force et le moment résultant en sommant les forces, et les moments par rapport au même point :

$$\vec{R} (\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{M} (P, \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \sum_i \vec{M}_i (P, \bar{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma)$$

Note: $\bar{\Sigma}$ est le complémentaire de Σ ou l'extérieur de Σ , sous-entend ici les actions extérieures à Σ .

Exemple: poutre soumise à plusieurs forces (figure 8). Calculer la force et le moment résultant en O .

Données : $OA=BC=3$ m, $AB=2$ m; $\|\vec{F}_1\|=1$ N; $\|\vec{F}_2\|=4$ N; $\|\vec{F}_3\|=2$ N.

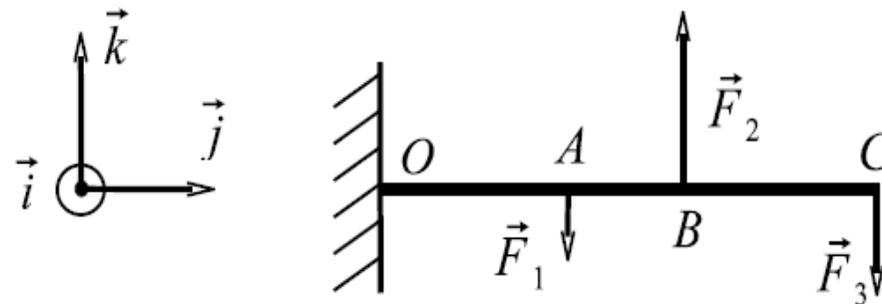


FIG. 8 – Poutre chargée par trois forces.

Action de surface La résultante est l'intégrale des forces surfaciques (en Nm^{-2}) sur une surface S :

$$\vec{R} = \int_S \vec{F}_S(Q) dS$$

Dans le cas d'un piston soumis à une pression uniforme P (figure 9), on a

$$\vec{R} = \int_S P \cdot \vec{j} \cdot dS = P \int_S dS \vec{j} = P S \vec{j}$$

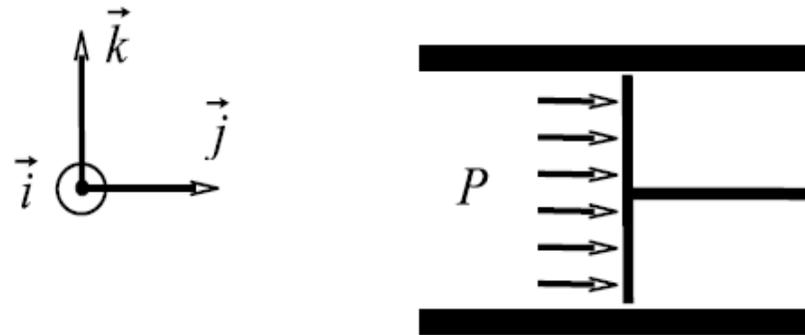


FIG. 9 – Piston soumis à une pression uniforme P .

Jouons avec les unités : Que valent 30 PSI en bar (PSI = Pound per Square Inch = lb/in^2) ?

Données : 1 lb = 0.4531 kg; 1 in = 2.54 cm; 1 bar = 10^5 Pa (Pascal); 1 Pa = 1 Nm^{-2} ; $g=9.81 \text{ ms}^{-2}$.

Action de volume La résultante est l'intégrale des forces volumiques (en Nm^{-3}) sur un volume V :

$$\vec{R} = \int_V \vec{F}_V(Q) dV$$

Dans le cas de la pesanteur (figure 10), on a :

$$\vec{R} = \int_V \vec{g} \rho(Q) dV = \left[\int_V \rho(Q) dV \right] \vec{g} = m \vec{g}$$

avec $\rho(Q)$ la masse volumique du solide au point Q en kg.m^{-3} et m la masse du solide en kg.

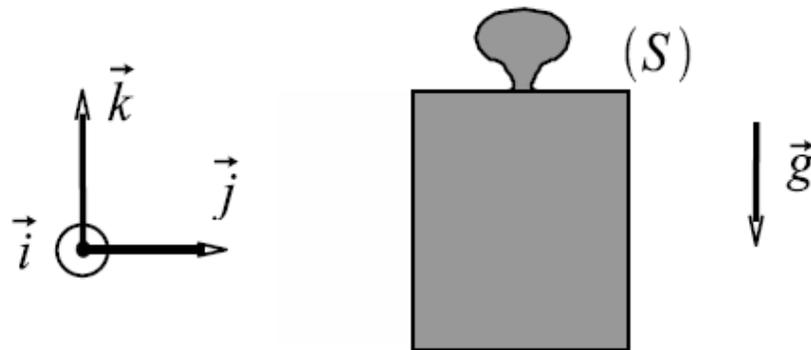


FIG. 10 – Solide S dans le champ de pesanteur.

Moments résultants : on prend l'intégrale des moments par rapport au même point

$$\vec{M}(A) = \int_S \vec{AQ} \wedge \vec{F}_S dS$$

$$\vec{M}(A) = \int_V \vec{AQ} \wedge \vec{F}_V dV$$

Cas de la pesanteur :

Centre de gravité G : il est défini tel que le moment résultant par rapport à ce point est nul.

Pour un système de points matériels P_i de masse m_i , on a

$$\begin{aligned}\vec{M} (O, \text{pesanteur} \rightarrow \Sigma) &= \sum_i \vec{OP}_i \wedge m_i \vec{g} \\ &= \left[\sum_i m_i \vec{OP}_i \right] \wedge \vec{g} \quad \text{car } \vec{g} \text{ est constant} \\ &= m. \vec{OG} \wedge \vec{g}\end{aligned}$$

avec $m = \sum m_i$, la masse totale du système, et tel que

$$m. \vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OP}_i : \tag{1}$$

G est en fait le barycentre des points P_i affectés des coefficients m_i . On a bien

$$\vec{M} (G, \text{pesanteur} \rightarrow \Sigma) = m. \vec{GG} \wedge \vec{g} = \vec{0} .$$

Pour un solide (milieu continu), l'intégrale sur le volume remplace la somme dans l'équation (1), avec les masses volumiques en chaque points $\rho(P)$, tel que :

$$m. \vec{OG} = \int_V \rho(P) \vec{OP} dV. \tag{2}$$

Centre d'inertie : l'équation (2) définit le centre d'inertie; il est confondu avec le centre de gravité dans un champ de pesanteur constant.

Propriété : Pour un solide, G est unique et fixe par rapport à un repère lié au solide.

Exemple : Calculer la position du centre d'inertie du solide S défini par la figure 11.

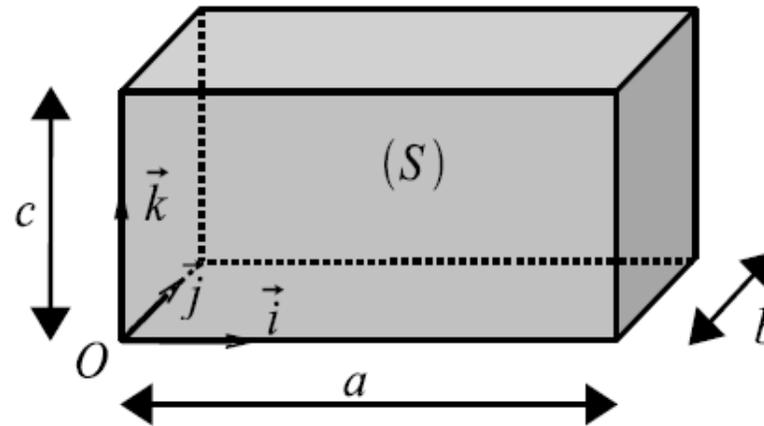


FIG. 11 – Solide S .

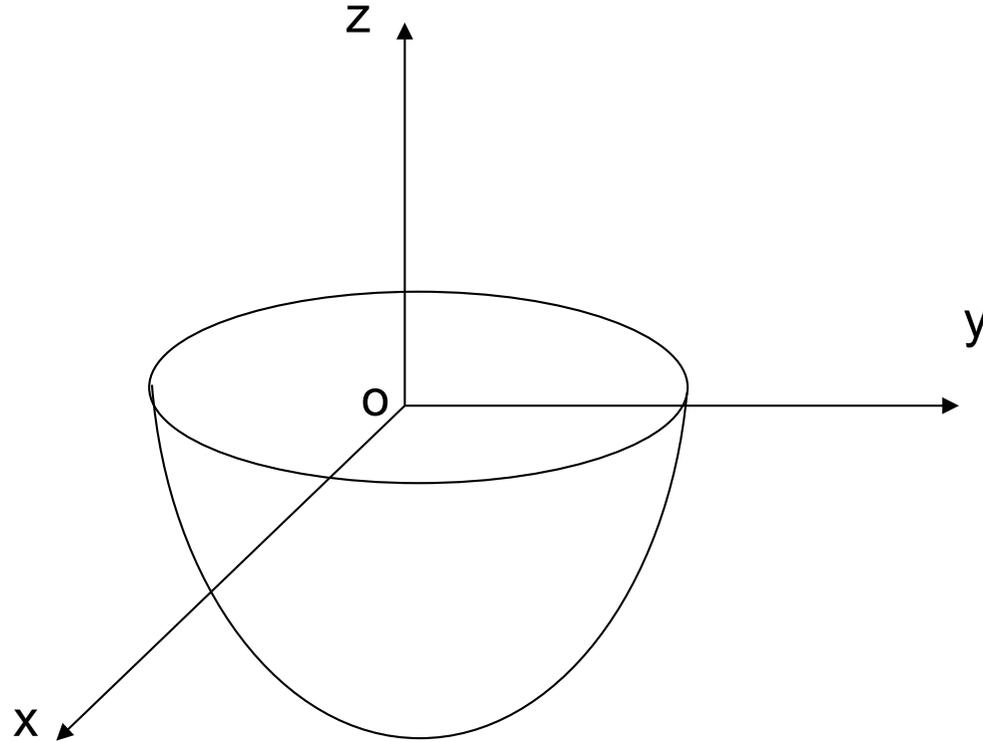
3.3 Torseur des actions mécaniques

Toute action mécanique exercée sur un système mécanique Σ est décrite complètement à l'aide d'une force \vec{R} et d'un moment exprimé par rapport à un point quelconque $\vec{M}(A)$, dont l'association forme le torseur des actions mécaniques (ou des efforts) :

$$\{T\} = \{\text{action} \rightarrow \text{système} \Sigma\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k} \\ L \vec{i} + M \vec{j} + N \vec{k} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{A(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

Exercice

Calculer les coordonnées du centre de masse de l'hémisphère (S)



$$\text{Exemple: } \{\text{pesanteur} \rightarrow S\} = \left\{ \begin{array}{l} 1\text{kN } \vec{j} \\ -1\text{kNm } \vec{k} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

\vec{R} et $\vec{M}(A)$ sont appelés éléments de réduction du torseur $\{T\}$: \vec{R} est la résultante générale et $\vec{M}(A)$ est le moment (par rapport) au point A du torseur.

$$\text{Addition: } \{T_1\} + \{T_2\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(A) \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(A) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_1(A) + \vec{M}_2(A) \end{array} \right\}_A$$

$$\text{Commoment: } \{T_1\} \times \{T_2\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(A) \end{array} \right\}_A \times \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(A) \end{array} \right\}_A = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_2(A) + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_1(A) , \text{ est un scalaire!}$$

ATTENTION : avant d'additionner ou de multiplier les torseurs, il faut exprimer les moments au même point.

Théorème de transfert (transport du moment)

$$\boxed{\vec{M}(A) = \vec{M}(B) + \vec{AB} \wedge \vec{R}}$$

$$\text{Soit } \{T\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}(B) \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}(B) + \vec{AB} \wedge \vec{R} \end{array} \right\}_A$$

Propriété:

Si un champ de vecteur $\vec{V}(P)$ vérifie le théorème de transfert, alors c'est un champ de moment (ou torseur).

Cas du torseur des efforts: Soit une force \vec{F} exercée sur un solide S au point P . Les moments exercés par rapport aux points A et B sont respectivement :

$$\vec{M}(A) = \vec{AP} \wedge \vec{F},$$

$$\vec{M}(B) = \vec{BP} \wedge \vec{F}.$$

Leur différence vaut :

$$\vec{M}(A) - \vec{M}(B) = ((\vec{AP}) - (\vec{BP})) \wedge \vec{F} = \vec{AB} \wedge \vec{F},$$

soit $\vec{M}(A) = \vec{M}(B) + \vec{AB} \wedge \vec{F}$ qui est bien la relation de transfert.

Pesanteur :

$$\{\text{pesanteur} \rightarrow S\} = \left\{ \begin{array}{c} m \vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} m \vec{g} \\ \vec{AG} \wedge m \vec{g} \end{array} \right\}_A$$

Remarque :

Si la résultante d'un torseur est nulle, on a un couple : $\{T_{\text{couple}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C} \end{array} \right\}_{\forall P}$.

Si le moment d'un torseur est nul, on a un glisseur (figure 12) : $\{T_{\text{glisseur}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall P \in D}$.

Le torseur nul est noté : $\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall P}$.

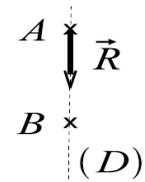


FIG. 12 - Glisseur.

3.4 Principe Fondamentale de la Statique (PFS)

Enoncé : Lorsqu'un système matériel est en équilibre, le torseur résultant des différentes actions mécaniques appliquées au système est nul :

$$\boxed{\{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma\} = \{0\}}$$

Exemple : Soit un système Σ soumis aux actions représentées par les torseurs $\{T_1\}$, $\{T_2\}$ et $\{T_3\}$:

$$\begin{aligned} & \{T_1\} + \{T_2\} + \{T_3\} = \{0\} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = \vec{0} \\ \vec{M}_1(A) + \vec{M}_2(A) + \vec{M}_3(A) = \vec{0} \end{cases} \end{aligned}$$

Principe d'action et de réaction :

$$\{S_1 \rightarrow S_2\} = -\{S_2 \rightarrow S_1\}$$

Application du PFS :

1. On définit le système sur lequel on va appliquer le PFS,
2. On identifie toutes les actions mécaniques extérieures au système,
3. On écrit les torseurs correspondant à chaque action au point où ils sont définis le plus facilement possible (il est nécessaire de définir un repère et de nommer chaque inconnue),
4. On utilise le théorème de transfert pour exprimer les torseurs au même point avant de les sommer,
5. On résoud le système d'équations ainsi obtenu.

Exemple : Soit un plongeur chargé par un mannequin de masse m (figure 13). Déterminer les réactions aux appuis (points A et B).

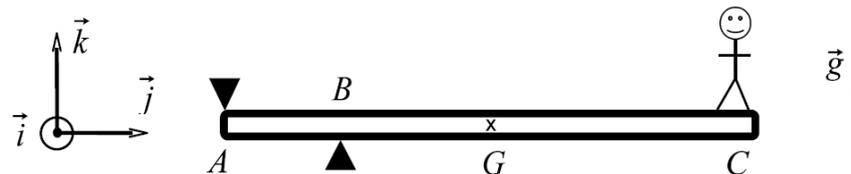


FIG. 13 – Plongeur.

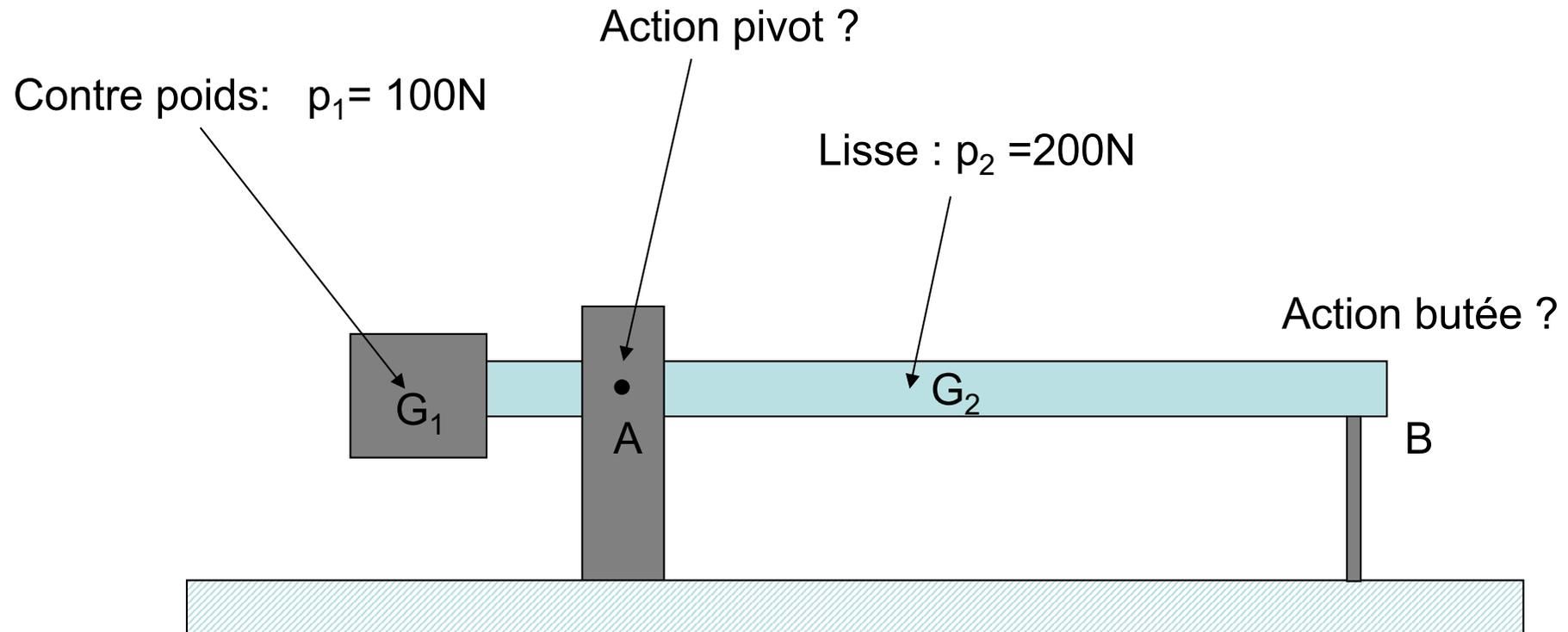
Isostatisme et hyperstatisme : Un système est dit isostatique, ou statiquement déterminable si les réactions peuvent toutes être déterminées à l'aide du PFS. Si le système possède des appuis ou des liaisons surabondantes par rapport à ce qui est nécessaire au maintien de l'équilibre, il est dit hyperstatique, ou statiquement indéterminable. Dans ce cas, les réactions ne peuvent pas être déterminées uniquement à l'aide du PFS.

Exemple : Si on ajoute un appui au plongeur en un point D , on obtient une inconnue supplémentaire (la réaction verticale en ce point), mais le nombre d'équation reste le même.

On peut résoudre en considérant la souplesse du plongeur ou en considérant un ressort sous chaque appui : on ajoute 3 inconnus qui sont les allongements des ressorts et 3 équations qui relient chaque allongement à chaque force exercée par les ressorts. On ajoute une équation qui traduit le fait que les 3 points de contact A , B , D sont alignés (plongeur indéformable). La solution dépend alors de la raideur des ressorts.

Exemple:

- En appliquant le PFS, trouver les actions du pivot et de la butée.
- Que pensez-vous du système ainsi étudié?



$$AG_1 = 0.5 \text{ m}$$

$$AG_2 = 3 \text{ m}$$

$$AB = 3.5$$

4 Cinématique

Définition : la cinématique est l'étude des mouvements en faisant abstraction des efforts.

Dérivation (Rappel)

Soit $A(t)$ une fonction de la variable t . Sa dérivée par rapport à t est définie par :

$$\frac{d}{dt}f(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(t + dt) - f(t)}{dt}$$

Notation : si t est le temps :

$$\frac{d}{dt}f(t) = \dot{f}(t)$$

Somme :

$$\frac{d(f + g)}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}$$

Produit :

$$\frac{d(f \times g)}{dt} = \frac{df}{dt}g + f\frac{dg}{dt}$$

Fonction composée : soit $f(s)$ et $s(t)$,

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{ds} \frac{ds}{dt}$$

Exemple : soit $\theta(t)$,

$$\frac{d \sin\theta}{dt} = \dots$$

4.1 Référentiel

Un référentiel R est l'association d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans l'espace et d'un repère dans le temps comportant : une origine t_0 , un sens et une position appelée "instant" de coordonnée notée t . En mécanique classique, on peut confondre repère et référentiel car le temps s'écoule à la même vitesse en tout point de l'espace (ce qui est faux en mécanique relativiste).

4.2 Mouvement d'un solide - torseur cinématique

La position d'un point matériel P est définie par $\vec{OP}(t)$ à l'instant t .

La trajectoire est constituée de l'ensemble des points $P(t)$ sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

Exemple : cycloïde = trajectoire d'un point d'une roue (figure 14).

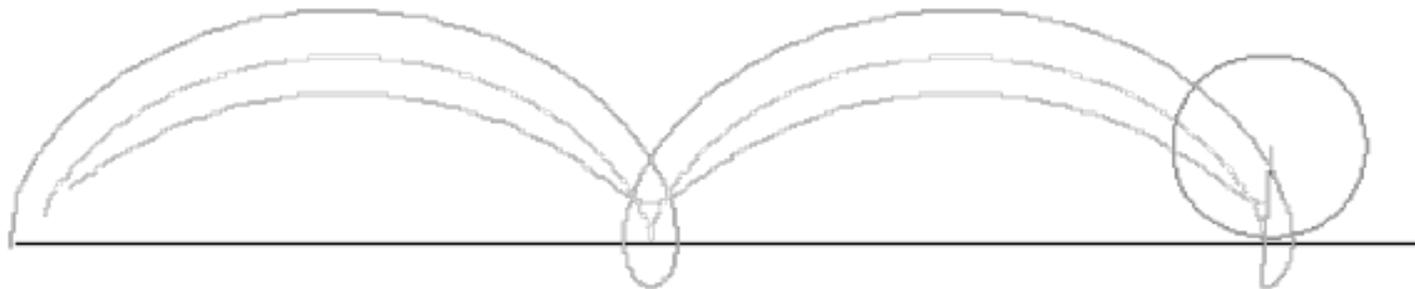


FIG. 14 – Cycloïdes (<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/cyclo.html>).

La vitesse du point P par rapport au référentiel R_0 est donnée par :

$$\vec{V}(P/R_0) = \left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_{R_0}$$

L'accélération du point P par rapport au référentiel R_0 est donnée par :

$$\vec{\Gamma}(P/R_0) = \left[\frac{d \vec{V}(P/R_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

Dérivation d'un vecteur

- Si \vec{OP} est défini dans la base de $R_0(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{OP} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$, alors

$$\left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{a} \vec{i} + \dot{b} \vec{j} + \dot{c} \vec{k}$$

- Si \vec{OP} est défini dans une base $R(Q, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ mobile par rapport à $R_0(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{OP} = a \vec{x} + b \vec{y} + c \vec{z}$, on a (*formule de dérivation d'un produit*)

$$\left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{a} \vec{x} + \dot{b} \vec{y} + \dot{c} \vec{z} + a \left[\frac{d \vec{x}}{dt} \right]_{R_0} + b \left[\frac{d \vec{y}}{dt} \right]_{R_0} + c \left[\frac{d \vec{z}}{dt} \right]_{R_0}$$

Cas particulier : $Q = O$ et $\vec{z} = \vec{k}$ (figure 15).

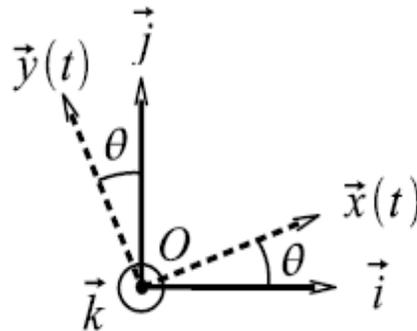


FIG. 15 - *Repère mobile.*

$$\left[\frac{d \vec{z}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{k}}{dt} \right]_{R_0} = \vec{0} \text{ car } \vec{k} \text{ est lié à } R_0$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d \vec{x}}{dt} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})}{dt} \right]_{R_0} = \frac{d(\cos \theta)}{dt} \vec{i} + \frac{d(\sin \theta)}{dt} \vec{j} = \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \vec{j} \\ &= (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \dot{\theta} = \vec{y} \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{d \vec{y}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})}{dt} \right]_{R_0} = (-\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \dot{\theta} = -\vec{x} \dot{\theta}$$

$$\text{Soit, } \left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_R + (a \vec{y} - b \vec{x}) \dot{\theta} = \left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_R + \dot{\theta} \vec{z} \wedge (a \vec{x} + b \vec{y} + c \vec{z})$$

$$\text{et } \left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{OP}$$

avec $\vec{\Omega}_{R/R_0} = \dot{\theta} \vec{z}$, le vecteur rotation instantanée de R par rapport à R_0 où $\dot{\theta}$ est la vitesse de rotation en rad/s et \vec{z} est l'axe de rotation (*ATTENTION à respecter les signes suivant la "règle du tire-bouchon"*).

Formule de la base mobile

Quelque soit \vec{u} un vecteur défini dans R , référentiel en mouvement par rapport à R_0 ,

$$\boxed{\left[\frac{d \vec{u}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{u}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{u}}$$

où $\vec{\Omega}_{R/R_0}$ est le vecteur rotation instantanée de R par rapport à R_0 .

Illustration : $\vec{OP}(t) = OP \vec{x}(t)$, $\vec{\Omega}_{R/R_0} = \dot{\theta} \vec{k}$ (figure 16).

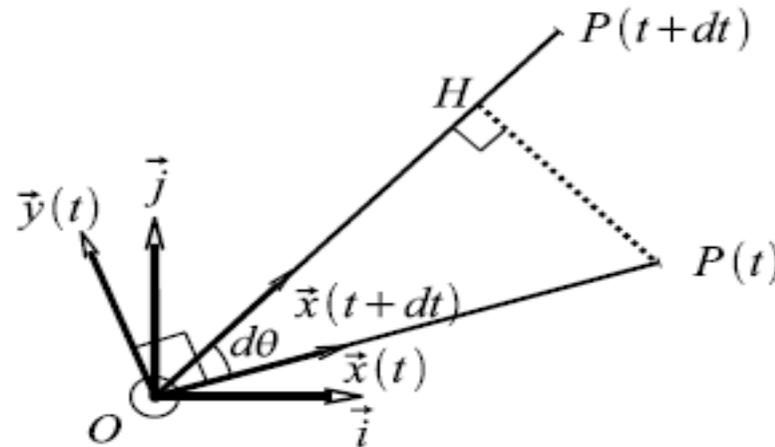


FIG. 16 - Dérivation d'un vecteur.

$$\begin{aligned} \left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_{R_0} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{OP}(t+dt) - \vec{OP}(t)}{dt} \right]_{R_0} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{P(t)H + H\vec{P}(t+dt)}{dt} \right]_{R_0} \\ &\equiv \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{OP \cdot \tan d\theta \vec{y}}{dt} + \frac{(\| \vec{OP}(t+dt) \| - \| \vec{OP}(t) \|) \vec{x}(t+dt)}{dt} \right]_{R_0} \end{aligned}$$

Remarque : Le 1^{er} terme correspond au changement de direction de \vec{OP} et le 2^{ème} à l'allongement de \vec{OP} .

Avec $d\theta$ petit, on a $\tan d\theta = d\theta$, soit

$$\left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_{R_0} = OP \dot{\theta} \vec{y} + \frac{dOP}{dt} \vec{x} = \dot{\theta} \vec{z} \wedge OP \vec{x} + \frac{dOP}{dt} \vec{x}.$$

On retrouve bien la formule de la base mobile :

$$\left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_{R_0} = \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{OP} + \left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_R$$

Champ de vitesse des points d'un solide : torseur cinématique

Quelle est la relation entre \vec{V} ($P \in S, R_0$) et \vec{V} ($Q \in S, R_0$)? Soit R lié à S . En utilisant le théorème de la base mobile, on peut écrire

$$\left[\frac{d \vec{PQ}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{PQ}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{PQ} = \vec{0} + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{PQ} \quad \text{car } \vec{PQ} \text{ est lié à } R.$$

Par ailleurs, en décomposant le vecteur \vec{PQ} avec le point O , origine de R_0 , on a

$$\left[\frac{d \vec{PQ}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{PO}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d \vec{OQ}}{dt} \right]_{R_0} = -\vec{V}(P/R_0) + \vec{V}(Q/R_0).$$

On a donc

$$\vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{PQ} = -\vec{V}(P/R_0) + \vec{V}(Q/R_0),$$

soit

$$\vec{V}(Q/R_0) = \vec{V}(P/R_0) + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{PQ} = \vec{V}(P/R_0) + \vec{QP} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_0},$$

qui est la relation de transfert du torseur, appelé **torseur cinématique**, noté :

$$\boxed{\{V\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(P \in S/R_0) \end{array} \right\}_P},$$

avec $\vec{\Omega}(S/R_0)$ la vitesse de rotation du solide S par rapport à R_0 et $\vec{V}(P \in S/R_0)$ la vitesse du point P appartenant au solide S par rapport à R_0 .

Le champ de vitesse des points d'un solide est un torseur.

Champ d'accélération des points d'un solide

Ce n'est pas un torseur car ce champ ne vérifie pas la relation de transfert :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(Q/R_0) &= \left[\frac{d(\vec{V}(P/R_0) + \vec{QP} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_0})}{dt} \right]_{R_0} \\ &= \vec{\Gamma}(P/R_0) + \left[\frac{d\vec{QP}}{dt} \right]_{R_0} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_0} + \vec{QP} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{R/R_0}}{dt} \end{aligned}$$

Méthode :

Calcul de la vitesse

Solution 1 On dérive le vecteur position \vec{OP} :

$$\vec{V} (P/R_0) = \left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_{R_0},$$

en utilisant le théorème de la base mobile si nécessaire,

$$\left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{OP}.$$

Solution 2 Si connaît la vitesse d'un point particulier du solide et sa vitesse de rotation, on utilise la relation de transfert :

$$\vec{V} (Q/R_0) = \vec{V} (P/R_0) + \vec{QP} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_0}.$$

Calcul de l'accélération On dérive le vecteur vitesse $\vec{V} (P/R_0)$:

$$\vec{\Gamma} (P/R_0) = \left[\frac{d \vec{V} (P/R_0)}{dt} \right]_{R_0},$$

en utilisant le théorème de la base mobile si nécessaire.

Mouvements élémentaires

Le mouvement de translation est tel que la vitesse de chaque point d'un solide est la même. Cela implique que la vitesse de rotation $\vec{\Omega} (S/R_0)$ est nulle :

$$\vec{V} (P/R_0) = v(t) \cdot \vec{x} (t), \forall P \in S.$$

Par contre, la norme et la direction du vecteur vitesse peut changer au cours du temps (exemple: mouvement de translation circulaire - figure (17b)).

Le mouvement de rotation est tel qu'il existe une droite D , appelée axe de rotation, dont la vitesse est nulle en chaque point :

$$\vec{V} (P/R_0) = \vec{\Omega} (S/R_0) \wedge \vec{QP}, \text{ avec } Q \in D.$$

Illustration : En supposant $OP = \text{constante}$ (figure 16), exprimez les vitesses et les accélérations des point de la nacelle d'une grande roue tels qu'illustrés à la figure 17 a) et b).

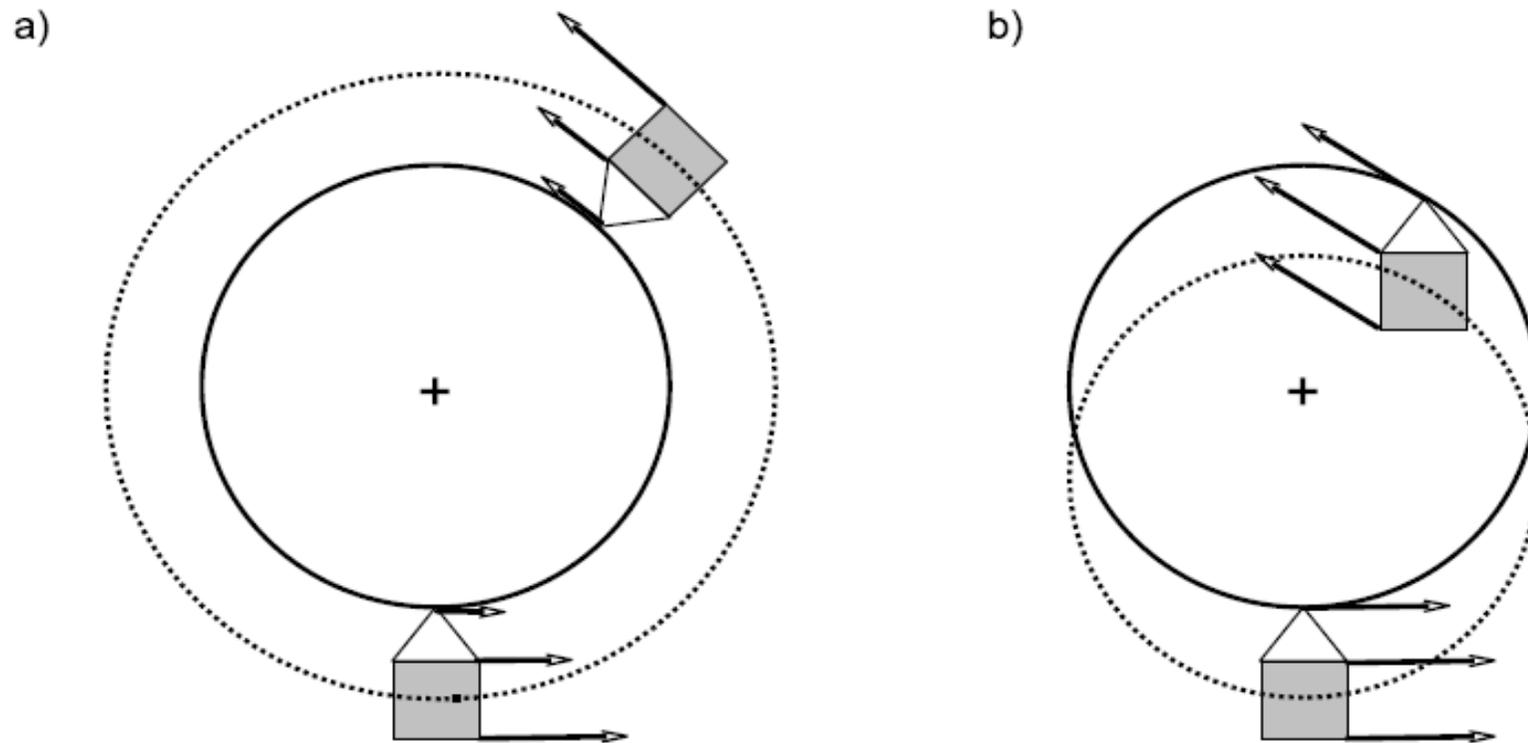


FIG. 17 – Vecteurs vitesse à deux instants d'un solide en: a) rotation; b) translation circulaire (... : trajectoire d'un point de la nacelle).

Mouvement composé : Soit le mouvement du solide S par rapport au repère $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et le mouvement du repère R par rapport au repère $R_0(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (figure 18).

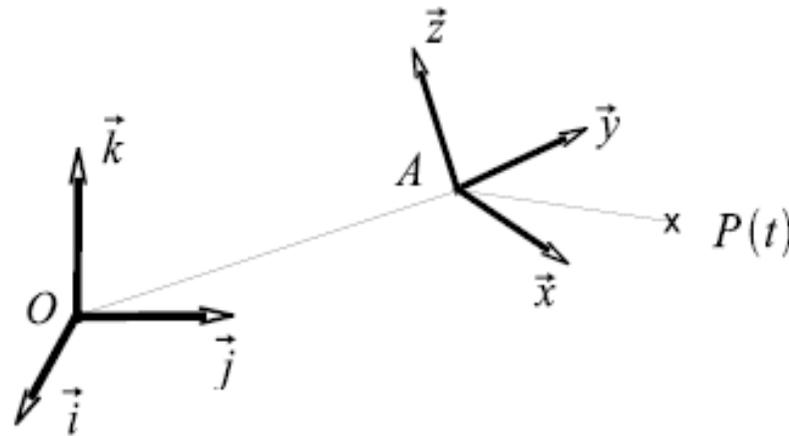


FIG. 18 – *Mouvement composé.*

On montre que

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(P/R) + \vec{V}(P \text{ fixe dans } R/R_0),$$

somme des vitesses relative et d'entraînement. La vitesse d'entraînement est la vitesse de P par rapport à R_0 en supposant que \vec{AP} est lié à R .

$$\vec{\Gamma} (P/R_0) = \vec{\Gamma} (P/R) + \vec{\Gamma} (P \text{ fixe dans } R/R_0) + \vec{\Gamma}_{cor} (P/R_0),$$

somme des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis tel que :

$$\vec{\Gamma}_{cor} (P/R_0) = 2 \vec{\Omega} (R/R_0) \wedge \vec{V} (P/R).$$

Illustration : Soit un solide S en translation par rapport au repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{k})$ tel que pour tout point P de S on ait : $\vec{OP} = (at + b) \vec{x}$ (figure 19). Le repère R est également en rotation par rapport au repère $R_0(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (figure 16). Déterminer la vitesse et l'accélération du point P appartenant à S par rapport au repère R_0 de deux façons différentes.

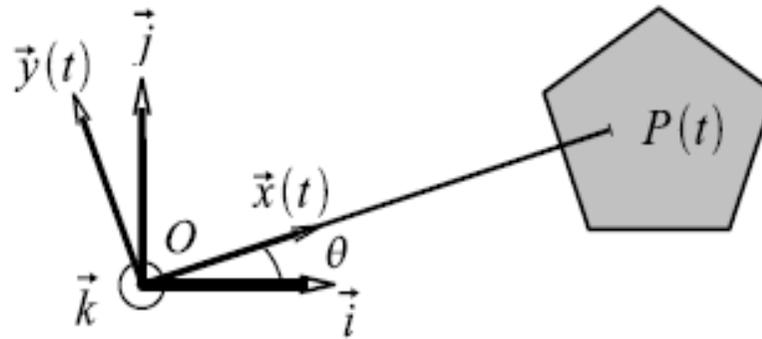


FIG. 19 – *Mouvement composé.*

Origine de l' accélération de Coriolis

<http://www.youtube.com/watch?v=xUqpFv5-sKM>

Imaginons que nous sommes dans un espace à deux dimensions. XOY est un repère galiléen.

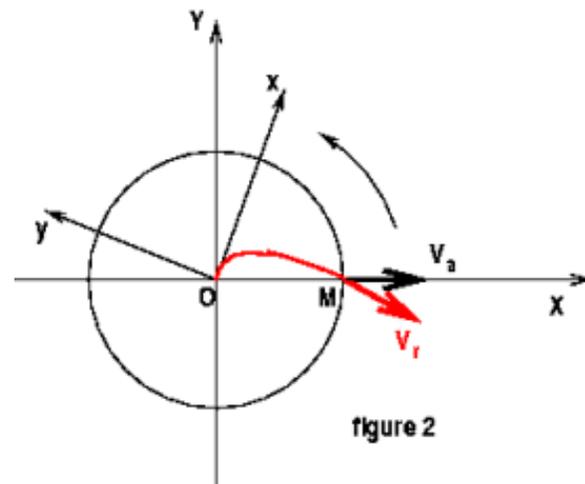
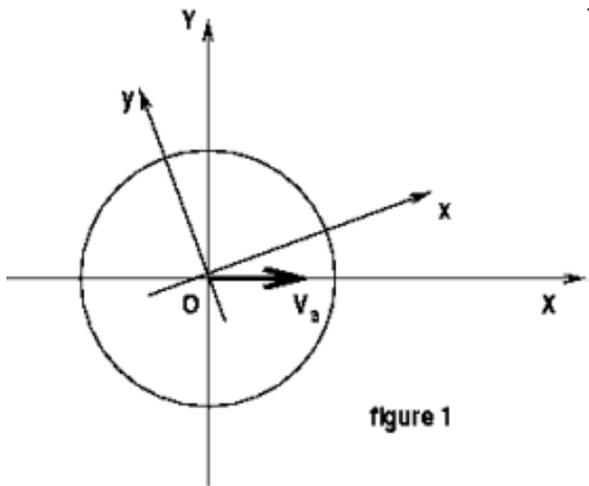
Un mobile M parcourt l'axe OX d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse.

Il n'est donc soumis à aucune accélération. Un disque centré en O porte le repère xOy.

Si le disque ne tourne pas, la trajectoire de M sur le disque à partir de O suit un rayon jusqu'au bord du disque (figure 1).

Mettons le disque en rotation à une vitesse uniforme de ω radians.s⁻¹.

La trajectoire sur le disque (c'est à dire la trajectoire telle que la voit un observateur fixé au disque) sera alors une spirale (figure 2), tandis que dans le repère galiléen, la trajectoire sera toujours la droite OX.



$$\vec{a}_{cor} = -\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

5 Cinétique

5.1 Quantité de mouvement

Pour un système matériel ponctuel de masse m , la quantité de mouvement est :

$$\vec{P} (\Sigma/R_0) = m \vec{V} (P/R_0).$$

Pour un ensemble de points matériels P_i de masse m_i ,

$$\vec{P} (\Sigma/R_0) = \sum_i m_i \vec{V} (P_i/R_0).$$

Pour un solide S de volume V et de masse volumique $\rho(P)$ au point P ,

$$\begin{aligned} \vec{P} (S/R_0) &= \int_V \vec{V} (P/R_0) \rho(P) dV \\ &= \int_V \left[\frac{d \vec{OP}}{dt} \right]_{R_0} \rho(P) dV = \left[\frac{d}{dt} \int_V \vec{OP} \rho(P) dV \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} m \vec{OG} \right]_{R_0} = m \vec{V} (G/R_0), \end{aligned}$$

avec $m = \int_V \rho(P) dV$ la masse du solide S et G son centre d'inertie. Soit

$$\boxed{\vec{P} (S/R_0) = m \vec{V} (G/R_0)}$$

5.2 Moment cinétique

Moment d'inertie :

Soit un système ponctuel en rotation autour de l'axe (Q, \vec{k}) tel que $\vec{QP} = r \vec{x}$ et $\vec{\Omega}_{R/R_0} = \Omega \vec{k}$ (figure 20),

$$\vec{\sigma}(Q, \Sigma/R_0) = \vec{QP} \wedge m \vec{V}(P/R_0).$$

Or on a

$$\vec{V}(P/R_0) = \left[\frac{d\vec{QP}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{QP}}{dt} \right]_R + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{QP}.$$

Soit

$$\vec{\sigma}(Q, \Sigma/R_0) = \vec{QP} \wedge m(\vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{QP}) = r \vec{x} \wedge m(\Omega \vec{k} \wedge r \vec{x}) = mr^2 \Omega \vec{k} = I_z \Omega \vec{k},$$

avec $I_z = mr^2$ le moment d'inertie de Σ autour de l'axe (Q, \vec{z}) .

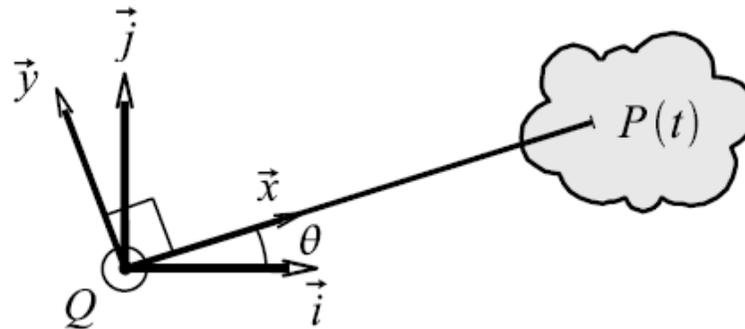


FIG. 20 – Solide en rotation autour d'un axe.

Tenseur d'inertie :

Pour un solide S , on a :

$$\vec{\sigma} (Q,S/R_0) = \int_V \vec{QP} \wedge \rho(P) \vec{V} (P/R_0) dV.$$

Moment cinétique au point G :

$$\vec{\sigma} (G,S/R_0) = \int_V \vec{GP} \wedge \rho(P) \vec{V} (P/R_0) dV.$$

Avec

$$\vec{V} (P/R_0) = \vec{V} (G/R_0) + \vec{PG} \wedge \vec{\Omega} (S/R_0),$$

le premier terme de l'intégrale devient

$$\int_V \vec{GP} \wedge \rho(P) \vec{V} (G/R_0) dV = \left(\int_V \vec{GP} \rho(P) dV \right) \wedge \vec{V} (G/R_0) = m \vec{GG} \wedge \vec{V} (G/R_0) = \vec{0}.$$

Finalement,

$$\vec{\sigma} (G,S/R_0) = \int_V \vec{GP} \wedge \left(\vec{\Omega} (S/R_0) \wedge \vec{GP} \right) \rho(P) dV.$$

Montrons que le moment cinétique peut se mettre sous la forme :

$$\vec{\sigma} (G,S/R_0) = [I(G,S)] \vec{\Omega} (S/R_0),$$

avec $[I(G,S)]$ le tenseur d'inertie du solide S au point G .

Calculons $\vec{\sigma}(G, S/R_0)$ avec (x, y, z) les coordonnées de \vec{GP} et (u, v, w) ceux de $\vec{\Omega}(S/R_0)$, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On obtient :

$$[I(G, S)] = \begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \times (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

avec I_x le moment d'inertie de S par rapport à l'axe \vec{x} au point G défini par

$$I_x = \int_V (y^2 + z^2) \rho(P) dV,$$

$$I_y = \int_V (x^2 + z^2) \rho(P) dV,$$

$$I_z = \int_V (x^2 + y^2) \rho(P) dV$$

et P_{xy} le produit d'inertie de S par rapport aux axes \vec{x} et \vec{y} au point G défini par

$$P_{xy} = \int_V xy \rho(P) dV,$$

$$P_{xz} = \int_V xz \rho(P) dV,$$

$$P_{yz} = \int_V yz \rho(P) dV.$$

Exemple : Tenseur d'inertie d'un parallépipède rectangle homogène de volume $V = abc$ (figure 11).

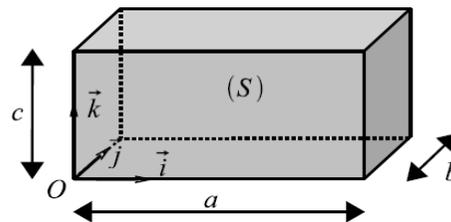


FIG. 11 - Solide S.

Propriétés de symétrie :

Symétrie par rapport au plan (O, \vec{i}, \vec{j}) (figure 21)

Soit $S = S_1 \cup S_2$ tel que $\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in S_1, \exists P_2(x_2, y_2, z_2) \in S_2$ tel que $x_2 = x_1, y_2 = y_1, z_2 = -z_1$.

$$P_{xz} = \int_S xz \rho(P) dV = \int_{S_1} x_1 z_1 dS + \int_{S_2} x_2 z_2 dS = \int_{S_1} x_1 z_1 dS + \int_{S_1} x_1 (-z_1) dS = 0.$$

De même, $P_{yz} = 0$.

$$[I(G, S)] = \begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} & 0 \\ -P_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

Symétrie par rapport à deux plans orthogonaux (= axes de symétrie)

symétrie par rapport à (O, \vec{i}, \vec{j}) : $P_{xz} = P_{yz} = 0$

symétrie par rapport à (O, \vec{i}, \vec{k}) : $P_{yz} = P_{xy} = 0$

$[I(G, S)]$ est donc diagonale :

$$[I(G, S)] = \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

Symétrie de révolution

\Leftrightarrow axes de symétrie + les deux directions orthogonales à l'axe sont quelconques

\Leftrightarrow on a le même solide si on le fait tourner autour de l'axe de révolution

Soit l'axe de révolution \vec{k} : $[I(G, S)]$ est diagonale et $I_x = I_y = I$:

$$[I(G, S)] = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & I_z \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{k})}$$

Illustration : Anneau et disque d'axe \vec{k} , de rayon R et de masse m .

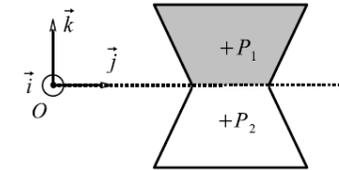


FIG. 21 - Solide avec plan de symétrie.

Théorème d'Huyghens En pratique, nous utiliserons une table donnant les tenseurs d'inertie de solides usuels donnés au point G . Comment calculer le tenseur d'inertie en un autre point ?

$$\boxed{[I(A,S)] = [I(G,S)] + [I(A, \text{masse de } S \text{ placée en } G)]}$$

Soit S de masse m et \vec{AG} de coordonnées (a,b,c) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$$[I(A, \text{masse de } S \text{ placée en } G)] = m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

Remarque : $[I(A, \text{masse de } S \text{ placée en } G)] = [I(G, \text{masse de } S \text{ placée en } A)]$.

5.3 Torseur cinétique

$$\{C(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_V \vec{V}(P/R_0) \rho(P) dV = m \vec{V}(G/R_0) \\ \int_V \vec{QP} \wedge \vec{V}(P/R_0) \rho(P) dV \end{array} \right\}_Q = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}(S/R_0) \\ \vec{\sigma}(Q, S/R_0) \end{array} \right\}_Q \begin{array}{l} \rightarrow \text{quantité de mouvement} \\ \rightarrow \text{moment cinétique} \end{array}$$

$\{C(S/R_0)\}$ est un torseur de part sa structure (identique à celle du torseur des efforts). On utilisera :

$$\vec{P}(S/R_0) = m \vec{V}(G/R_0)$$

$$\vec{\sigma}(G, S/R_0) = [I(G, S)] \vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$\vec{\sigma}(Q \neq G, S/R_0) \Rightarrow \text{théorème de transfert}$$

Cas d'un point fixe :

$$\vec{\sigma}(H \text{ fixe}, S/R_0) = [I(H, S)] \vec{\Omega}(S/R_0)$$

avec $[I(H, S)]$ obtenue par Huyghens.

6 Dynamique

Référentiel galiléen :

Un référentiel galiléen est tel que tout corps isolé (des actions mécaniques extérieures) est au repos ou en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Pour nos applications, le référentiel utilisé est celui lié à la terre.

6.1 Théorème de la résultante cinétique

Soit R_0 un référentiel galiléen et Σ un système mécanique, on a

$$\vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \left[\frac{d}{dt} \vec{P}(\Sigma/R_0) \right]_{R_0}. \quad (3)$$

La variation de la quantité de mouvement d'un système résulte de l'action des forces extérieures au système.

Système ponctuel de masse m :

$$\vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \left[\frac{d}{dt} m \vec{V}(P/R_0) \right]_{R_0}.$$

Si m est constante au cours du temps, on a :

$$\vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = m \vec{\Gamma}(P/R_0). \quad (4)$$

Solide S de masse m : On intègre (3) sur le volume de S .

Pour le membre de gauche, on obtient :

$$\int_V \vec{F}(\bar{S} \rightarrow P) dV = \vec{F}(\bar{S} \rightarrow S),$$

qui est la résultante des efforts extérieurs à S .

Pour le membre de droite, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{d}{dt} \vec{V} (P/R_0) \rho(P) dV \right]_{R_0} &= \left[\frac{d}{dt} \int_V \vec{V} (P/R_0) \rho(P) dV \right]_{R_0} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \vec{P} (S/R_0) \right]_{R_0} = \left[\frac{d}{dt} m \vec{V} (G/R_0) \right]_{R_0} = m \vec{\Gamma} (G/R_0). \end{aligned}$$

Soit,

$$\vec{F} (\bar{S} \rightarrow S) = m \vec{\Gamma} (G/R_0). \quad (5)$$

Ensemble de solides $\Sigma = \sum S_i$: On somme (5) sur l'ensemble des solides. En utilisant le principe d'action et réaction, $\vec{F} (S_i \rightarrow S_j) = -\vec{F} (S_j \rightarrow S_i)$, les actions entre solides s'annulent. On ne considère donc que les actions mécaniques extérieures à Σ :

$$\vec{F} (\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \sum_i m_i \vec{\Gamma} (G_i/R_0). \quad (6)$$

6.2 Théorème du moment cinétique

Système ponctuel de masse m : Le moment en Q exercé par une force sur Σ s'écrit :

$$\vec{M}(Q, \vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)) = \vec{Q}P \wedge \vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

En utilisant (4), on a :

$$\vec{M}(Q, \vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)) = \vec{Q}P \wedge m \vec{\Gamma}(P/R_0).$$

Solide S : On intègre sur le volume du solide S

$$\vec{M}(Q, \vec{F}(\bar{S} \rightarrow S)) = \int_V \vec{Q}P \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0) \rho(P) dV. \quad (7)$$

6.3 Torseur dynamique - Théorème Générale de la Dynamique

Soit S un solide de masse m , on définit le torseur dynamique

$$\{D(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_V \vec{\Gamma}(P/R_0) \rho(P) dV = m \vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \int_V \vec{Q}P \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0) \rho(P) dV \end{array} \right\}_Q = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = m \vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}(Q, S/R_0) \end{array} \right\}_Q \begin{array}{l} \rightarrow \text{quantité d'accélération} \\ \rightarrow \text{moment dynamique} \end{array}$$

$\{D(S/R_0)\}$ est un torseur de part sa structure (identique à celle du torseur des efforts).

Théorème générale de la dynamique (TGD) :

$$\boxed{\{D(S/R_0)\} = \{\bar{S} \rightarrow S\}} \quad (8)$$

Si le torseur dynamique est nul, on retrouve le principe fondamental de la statique (PFS).

Calcul du moment dynamique $\vec{\delta} (Q,S/R_0)$:

On a montré que $\vec{R} = \left[\frac{d}{dt} \vec{P} (S/R_0) \right]_{R_0}$. A-t-on la même relation entre $\vec{\delta} (Q,S/R_0)$ et $\vec{\sigma} (Q,S/R_0)$? Dérivons le moment cinétique :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma} (Q,S/R_0) \right]_{R_0} &= \left[\frac{d}{dt} \int_V \vec{QP} \wedge \vec{V} (P/R_0) \rho(P) dV \right]_{R_0} \\ &= \int_V \left[\frac{d \vec{QP}}{dt} \wedge \vec{V} (P/R_0) + \vec{QP} \wedge \frac{d \vec{V} (P/R_0)}{dt} \right]_{R_0} \rho(P) dV = A + B. \end{aligned}$$

Le terme B correspond à la définition du moment dynamique. Que vaut le terme A?

Hypothèse 1 : soit Q fixe dans R_0 ,

$$\begin{aligned} \left[\frac{d \vec{QP}}{dt} \right]_{R_0} &= \vec{V} (P/R_0), \\ \left[\frac{d \vec{QP}}{dt} \wedge \vec{V} (P/R_0) \right]_{R_0} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

car les deux vecteurs sont colinéaires. Le terme A est donc nul.

$$\vec{\delta} (Q \text{ fixe dans } R_0, S/R_0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma} (Q \text{ fixe dans } R_0, S/R_0) \right]_{R_0}$$

Hypothèse 2 : $Q = G$. Soit $\vec{GP} = \vec{GO} + \vec{OP}$, on a

$$\begin{aligned}
 A &= \int_V \left[\frac{d \vec{GO}}{dt} \wedge \vec{V}(P/R_0) + \frac{d \vec{OP}}{dt} \wedge \vec{V}(P/R_0) \right]_{R_0} \rho(P) dV \\
 &= \int_V \left[-\vec{V}(G/R_0) \wedge \vec{V}(P/R_0) + \vec{V}(P/R_0) \wedge \vec{V}(P/R_0) \right] \rho(P) dV \\
 &= -\vec{V}(G/R_0) \wedge \int_V \vec{V}(P/R_0) \rho(P) dV = -\vec{V}(G/R_0) \wedge m \vec{V}(G/R_0) = \vec{0} .
 \end{aligned}$$

Le terme A est donc nul.

$$\vec{\delta}(G, S/R_0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G, S/R_0) \right]_{R_0}$$

Hypothèse 3 : Q n'est pas fixe dans R_0 et différent de G . Dans ce cas, on utilise la propriété de torseur :

$$\vec{\delta} (A,S/R_0) = \vec{\delta} (B,S/R_0) + \vec{AB} \wedge m \vec{\Gamma} (G/R_0)$$

Exemple : cylindre sur un plan incliné (figure 22). Données : $\| \vec{IG} \| = r$, $(\vec{i}, \vec{x}) = \alpha$, $(\vec{x}, \vec{x}_1) = \theta$, $R_0(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{k})$ lié à R_0 , $R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{k})$ lié au cylindre Donner l'accélération du point G dans les trois cas suivant : pas de glissement au point I pour un cylindre plein ou creux, avec glissement au point I .

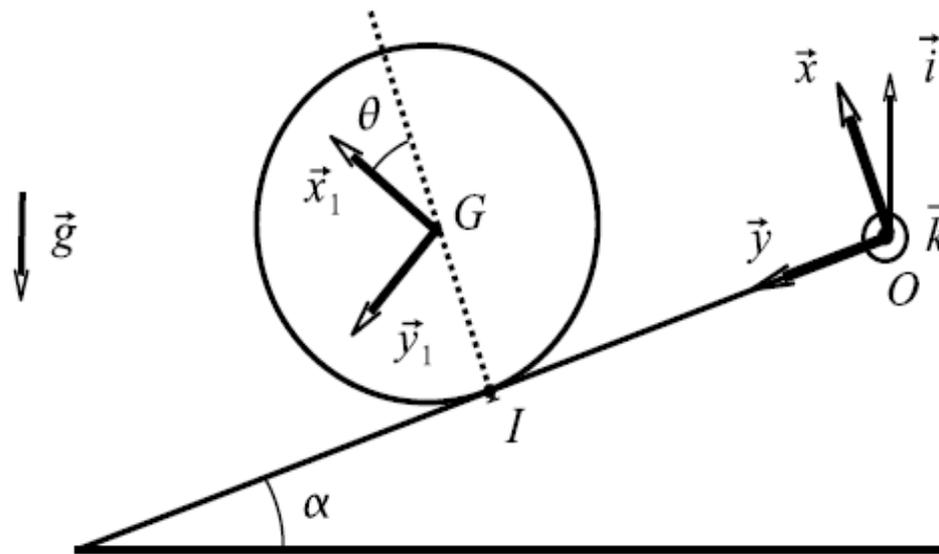


FIG. 22 – Cylindre sur un plan incliné.

7 Energétique

7.1 Puissance

Systeme matériel ponctuel de masse m : La puissance développée par les actions mécaniques extérieures à Σ dans son mouvement par rapport à R_0 s'écrit :

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_0) = \vec{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{V}(P/R_0)$$

Solide S :

Montrons que $P(\bar{S} \rightarrow S/R_0) = \{V(S/R_0)\} \times \{\bar{S} \rightarrow S\}$.

$$\begin{aligned} P(\bar{S} \rightarrow S/R_0) &= \int_V \vec{F}(P) \cdot \vec{V}(P/R_0) dV = \int_V \vec{F}(P) \cdot \left(\vec{V}(Q/R_0) + \vec{P}Q \wedge \vec{\Omega}(S/R_0) \right) dV \\ &= \int_V \vec{F}(P) \cdot \vec{V}(Q/R_0) dV + \int_V \vec{F}(P) \cdot (\vec{P}Q \wedge \vec{\Omega}(S/R_0)) dV \\ &= \vec{V}(Q/R_0) \cdot \int_V \vec{F}(P) dV + \vec{\Omega}(S/R_0) \cdot \int_V \vec{Q}P \wedge \vec{F}(P) dV \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(Q/R_0) \end{array} \right\}_Q \times \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\bar{S} \rightarrow S) \\ \vec{M}(Q, \bar{S} \rightarrow S) \end{array} \right\}_Q \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{P(\bar{S} \rightarrow S/R_0) = \{V(S/R_0)\} \times \{\bar{S} \rightarrow S\}}$$

Puissance des interefforts entre solides

$$\begin{aligned} P(S_1 \leftrightarrow S_2) &= \{S_1 \rightarrow S_2\} \times \{V(S_2/R_0)\} + \{S_2 \rightarrow S_1\} \times \{V(S_1/R_0)\} \\ &= \{S_1 \rightarrow S_2\} \times (\{V(S_2/R_0)\} - \{V(S_1/R_0)\}) = \{S_1 \rightarrow S_2\} \times \{V(S_2/S_1)\} = \{S_2 \rightarrow S_1\} \times \{V(S_1/S_2)\} \end{aligned}$$

7.2 Liaisons entres solides

Torseur cinématique entre deux solides :

$$\{V(S_1/S_2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S_1/S_2} \\ \vec{V}(I \in S_1/S_2) \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k} \\ u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{cc} p & u \\ q & v \\ r & w \end{array} \right\}_{I(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} .$$

Torseur des interefforts entre deux solides :

$$\{T\} = \{S_1 \rightarrow S_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k} \\ L \vec{i} + M \vec{j} + N \vec{k} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{I(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

Cas d'une liaison parfaite

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{V(S_1/S_2)\} \times \{S_2 \rightarrow S_1\} = 0$$

Exemples de liaison : voir annexes

Glissement entre deux solides Soit deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel au point I (figure 23). On a I_1 et I_2 points de contact appartenant à S_1 et S_2 respectivement.

S'il n'y a pas de glissement entre les deux solides, on a :

$$\vec{V}(I_1 \in S_1/R_0) = \vec{V}(I_2 \in S_2/R_0),$$

soit

$$\vec{V}(I_1 \in S_1/S_2) = \vec{V}(I_1 \in S_1/R_0) - \vec{V}(I_2 \in S_2/R_0) = \vec{0} .$$

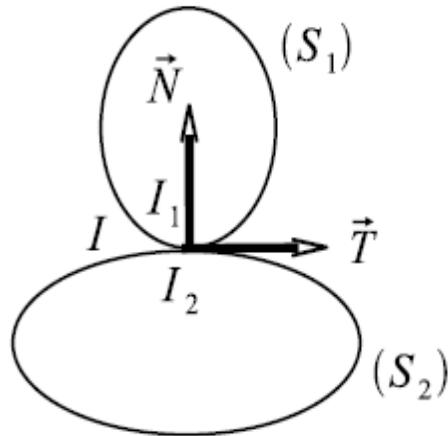


FIG. 23 – Glissement entre deux solides.

S'il y a glissement, la vitesse relative n'est pas nulle. On peut utiliser la loi de Coulomb qui donne une relation entre les efforts normal \vec{N} et tangentiel \vec{T} :

$$\{S_1 \rightarrow S_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{T} + \vec{N} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

tel que

$$\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$$

avec f le coefficient de frottement : acier sur acier : $f = 0.1$; pneu sur chaussée : $f = 0.6$.

7.3 Energie cinétique

Système matériel ponctuel de masse m :

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2}mV^2(P/R_0)$$

avec

$$V^2(P/R_0) = \vec{V}(P/R_0) \cdot \vec{V}(P/R_0)$$

Solide de masse m :

Montrons que $T(S/R_0) = \frac{1}{2}\{V(S/R_0)\} \times \{C(S/R_0)\}$

$$\begin{aligned} T(S/R_0) &= \frac{1}{2} \int_V V^2(P/R_0) \rho(P) dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{V}(P/R_0) \cdot \vec{V}(P/R_0) \rho(P) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \vec{V}(P/R_0) \cdot \left(\vec{V}(Q/R_0) + \vec{P}Q \wedge \vec{\Omega}(S/R_0) \right) \rho(P) dV \\ &= \frac{1}{2} \vec{V}(Q/R_0) \int_V vV(P/R_0) \rho(P) dV + \vec{\Omega}(S/R_0) \int_V \vec{Q}P \wedge vV(P/R_0) \rho(P) dV \\ &= \frac{1}{2} \vec{V}(Q/R_0) \vec{P}(S/R_0) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R_0) \vec{\sigma}(Q, S/R_0) \\ &= \frac{1}{2} \{V(S/R_0)\} \times \{C(S/R_0)\} \end{aligned}$$

Si $Q=G$, on a :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}mV^2(G/R_0) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R_0) \left([I(G, S)] \vec{\Omega}(S/R_0) \right)$$

7.4 Principe des Puissances Virtuelles - Principe de D'Alembert (1750)

Soit un référentiel galiléen R_0 et Σ un système matériel à masse conservative. Pour tout champ vectoriel V^* défini sur Σ , à tout instant, la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs et des interefforts :

$$P_A(\Sigma/R_0) = P_E(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_0) + P_I(\Sigma)$$

avec

$$P_A(\Sigma/R_0) = \int_V \vec{\Gamma} (P/R_0) V^*(P) \rho(P) dV$$

$$P_E(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_0) = \int_V \vec{F} (P) V^*(P) dV$$

Remarque 1 : Le PPV correspond à une projection du TGD sur V^* .

Remarque 2 : Si V^* est un champ de vitesse, les puissances virtuelles sont bien homogènes à une puissance.

Remarque 3 : Le terme virtuel souligne le fait que V^* n'est pas nécessairement un champ réel.

Cas d'un champ rigidifiant : Si V^* est un torseur alors $P_I(\Sigma) = 0$.

Exemple : soit $V^* = \vec{V} (P/R_0)$, champ des vitesses d'un solide $S = S_1 \cup S_2$ (figure 24).

$$P_I(S/R_0) = \{V(S_1/S_2)\} \times \{S_2 \rightarrow S_1\} = \{0\} \times \{S_2 \rightarrow S_1\} = \{0\}$$

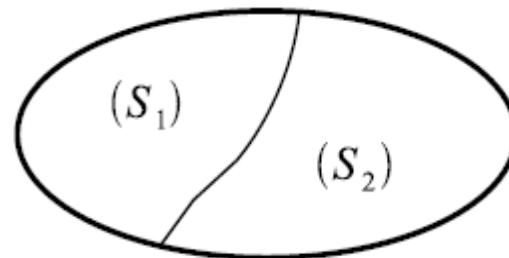


FIG. 24 - $S = S_1 \cup S_2$.

Démonstration du TGD à partir du PPV : Soit $\{V^*\}$ un torseur défini sur un solide S tel que

$$\{V^*\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}(P) \end{array} \right\}_P.$$

$$\begin{aligned} P_A(S/R_0) &= \int_V \vec{\Gamma}(P/R_0) \cdot \vec{M}(P) \rho(P) dV = \int_V \vec{\Gamma}(P/R_0) \cdot \left(\vec{M}(Q) + \vec{P}Q \wedge \vec{R} \right) \rho(P) dV \\ &= \vec{M}(Q) \int_V \vec{\Gamma}(P/R_0) \rho(P) dV + \vec{R} \int_V \vec{Q}P \wedge \vec{\Gamma}(P/R_0) \rho(P) dV \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}(Q) \end{array} \right\}_Q \times \left\{ \begin{array}{c} m \vec{\Gamma}(G/R_0) \\ \vec{\delta}(Q, S/R_0) \end{array} \right\}_P = \{V^*\} \times \{D(S/R_0)\} \end{aligned}$$

De même,

$$P_E(\bar{S} \rightarrow S/R_0) = \int_V \vec{F}(P) \cdot \vec{M}(P) dV = \{V^*\} \times \{\bar{S} \rightarrow S\}$$

Le PPV s'énonce

$$P_A(S/R_0) = P_E(\bar{S} \rightarrow S/R_0) + 0,$$

avec $P_I(S) = 0$ car $\{V^*\}$ est un torseur, soit

$$\{V^*\} \times \{D(S/R_0)\} = \{V^*\} \times \{\bar{S} \rightarrow S\},$$

relation vraie quelque soit $\{V^*\}$, d'où

$$\{D(S/R_0)\} = \{\bar{S} \rightarrow S\}.$$

7.5 Théorème de l'Energie Cinétique

Appliquons le PPV pour un solide S avec $\{V^*\} = \{\vec{V}(S/R_0)\}$, champ des vitesses de S par rapport à R_0 .

$$\begin{aligned} P_A(S/R_0) &= \int_V \vec{\Gamma}(P/R_0) \cdot \vec{V}(P/R_0) \rho(P) dV = \int_V \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \vec{V}(P/R_0) \cdot \vec{V}(P/R_0) \right]_{R_0} \rho(P) dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} V^2(P/R_0) \rho(P) dV = \frac{d}{dt} T(S/R_0) \end{aligned}$$

$$P_E(\bar{S} \rightarrow S/R_0) = \int_V \vec{F}(P) \cdot \vec{V}(P/R_0) dV = \{V(S/R_0)\} \times \{\bar{S} \rightarrow S\} = P(\bar{S} \rightarrow S/R_0)$$

Le TEC pour un solide s'écrit :

$$\boxed{\frac{d}{dt} T(S/R_0) = P(\bar{S} \rightarrow S/R_0)}$$

Pour un ensemble de solide $\Sigma = \cup S_i$, il faut ajouter la puissance des interefforts entre les solides, qui ne sont pas pris en compte dans $P_E(\Sigma/R_0)$:

$$\frac{d}{dt} T(\Sigma/R_0) = P_E(\Sigma/R_0) + P_I(\Sigma)$$

avec

$$T(\Sigma/R_0) = \sum_i T(S_i/R_0)$$

$$P_E(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_0) = \sum_i P(\bar{\Sigma} \rightarrow S_i/R_0)$$

$$P_I(\Sigma) = \sum_i \sum_{i < j} P(S_i \leftrightarrow S_j)$$

Remarque : Si les liaisons entre les solides sont parfaites, $P_I(\Sigma) = 0$.

Energie potentielle : Si la puissance des efforts extérieurs peut s'écrire

$$P_E(S/R_0) = -\frac{d}{dt}E,$$

on dit qu'elle dérive d'un potentiel E , appelé énergie potentielle.

Exemple : pesanteur : $E = -m \vec{g} \vec{OG}$; ressort : $E = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$

Si toutes les puissances dérivent d'un potentiel, le TEC peut s'écrire :

$$T(S/R_0) + \sum_i E_i = \text{constante}$$

Remarque : Cette relation définit un système conservatif.

7.6 Equations de Lagrange

L'objectif est de définir un torseur (issu du torseur cinématique) servant à appliquer le PPV de façon simple et systématique.

Torseur extrait du torseur cinématique Soit un solide S dont la position est définie par n coordonnées (ou variables), dites généralisées, (q_1, q_2, \dots, q_n) et une variable de temps t . On considère que les coordonnées généralisées, leur dérivée par rapport au temps et la variable de temps t sont indépendantes (il n'y a pas de relation a priori qui les lient). n est le nombre de degré de liberté du système : $n = 6$ pour un seul solide sans liaison. On définit

$$\vec{V}_{q_i} (P \in S/R_0) = \frac{\partial \vec{V} (P \in S/R_0)}{\partial \dot{q}_i}$$

avec

$$\dot{q}_i = \frac{d q_i}{dt}$$

Montrons que $\vec{V}_{q_i} (P \in S/R_0)$ est un torseur. Dérivons la relation de transfert suivante par rapport à \dot{q}_i :

$$\vec{V} (P/R_0) = \vec{V} (Q/R_0) + \vec{PQ} \wedge \vec{\Omega} (S/R_0)$$

$$\frac{\partial \vec{V} (P/R_0)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{V} (Q/R_0)}{\partial \dot{q}_i} + \vec{PQ} \wedge \frac{\partial \vec{\Omega} (S/R_0)}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \vec{PQ}}{\partial \dot{q}_i} \wedge \vec{\Omega} (S/R_0)$$

Les positions étant indépendantes des vitesses, on a

$$\frac{\partial \vec{PQ}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (\vec{PO} + \vec{OQ})}{\partial \dot{q}_i} = \vec{0} ,$$

soit

$$\frac{\partial \vec{V} (P/R_0)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{V} (Q/R_0)}{\partial \dot{q}_i} + \vec{PQ} \wedge \frac{\partial \vec{\Omega} (S/R_0)}{\partial \dot{q}_i} .$$

On obtient bien la relation de transfert pour le torseur extrait du torseur cinématique relatif à la variable q_i défini par :

$$\{V_{q_i}(S/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{q_i}(S/R_0) \\ \vec{V}_{q_i}(P \in S/R_0) \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{\Omega}(S/R_0)}{\partial \dot{q}_i} \\ \frac{\partial \vec{V}(P/R_0)}{\partial \dot{q}_i} \end{array} \right\}_P$$

Ce torseur donne la contribution de la variable q_i (amplitude et direction) au torseur cinématique.

Equations de Lagrange L'équation de Lagrange par rapport à la variable généralisée q_i s'écrit :

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) T(S/R_0) = \{\bar{S} \rightarrow S\} \times \{V_{q_i}(S/R_0)\}$$

On obtient n équations pour i allant de 1 à n .

Démonstration Appliquons le PPV avec $\{V^*\} = \{V_{q_i}(S/R_0)\}$, soit

$$P_E(\bar{S} \rightarrow S/R_0) = \int_V \vec{F}(\bar{S} \rightarrow P) \cdot \vec{V}_{q_i}(P/R_0) dV = \{\bar{S} \rightarrow S\} \times \{V_{q_i}(S/R_0)\}$$

qu'on appelle force généralisée, notée $Q_i(\bar{S} \rightarrow S/R_0)$.

D'autre part,

$$P_A(S/R_0) = \int_V \vec{\Gamma}(P/R_0) \cdot \vec{V}_{q_i}(P/R_0) \rho(P) dV,$$

On montre que

$$P_A(S/R_0) = \int_V \vec{\Gamma}(P/R_0) \cdot \vec{V}_{q_i}(P/R_0) \rho(P) dV = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) T(S/R_0)$$

Dans cette expression, introduisons la définition de l'énergie cinétique pour un solide :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) T(S/R_0) &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \int_V \frac{1}{2} V^2(P/R_0) \rho(P) dV \\ &= \int_V \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P/R_0) \cdot \vec{V}(P/R_0) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{V}(P/R_0) \cdot \vec{V}(P/R_0) \right) \rho(P) dV \\ &= \int_V \left(\vec{\Gamma}(P/R_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P/R_0) + \vec{V}(P/R_0) \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P/R_0) - \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{V}(P/R_0) \right] \right) \rho(P) dV \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à $P_A(S/R_0)$ en prenant $\{V^*\} = \{V_{q_i}(S/R_0)\}$.

Montrons que le deuxième terme est nul. Le vecteur \vec{OP} est fonction du temps t et des variables q_i dépendantes elles mêmes du temps. Sa dérivée par rapport au temps s'écrit donc :

$$\vec{V}(P) = \frac{d \vec{OP}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t}.$$

Cette relation permet d'écrire que

$$\frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} = \\ &= \sum_k \frac{\partial^2 \vec{OP}}{\partial q_k \partial q_i} \frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{OP}}{\partial t \partial q_i} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_k \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{V}(P). \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \vec{V}(P/R_0) - \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{V}(P/R_0) = 0.$$

Le deuxième terme est bien nul.

Pour un ensemble de solides $\Sigma = \cup S_h$: on somme les équations obtenues pour chacun des solides. Cela fait apparaître les interefforts généralisés

$$Q_{q_i}(S_h \leftrightarrow S_j) = \{S_h \rightarrow S_j\} \times \{V_{q_i}(S_j/S_h)\},$$

tels que :

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) T(\Sigma/R_0) = \sum_h \{\Sigma \rightarrow S_h\} \times \{V_{q_i}(S_h/R_0)\} + \sum_{h,j;h<j} Q_{q_i}(S_h \leftrightarrow S_j)$$

Remarque : Si la liaison est parfaite entre deux solides, l'intereffort généralisé correspondant est nul.

Modélisation des actions mécaniques

Cas d'un problème plan de normale \vec{z}					
Nature de la liaison et repère associé : R	Schéma spatial	Mvts possibles	Torseur transmissible $\{\tau_{1/2}\}$	Schéma plan	Torseur transmissible
Encastrement R quelconque		0 0 0 0 0 0	$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{A1/2} \\ Y_{1/2} & M_{A1/2} \\ Z_{1/2} & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$		$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
Pivot d'axe (A, \vec{z})		0 0 0 0 0 Rz	$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{A1/2} \\ Y_{1/2} & M_{A1/2} \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$		$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
Rotule de centre A		0 Rx 0 Ry 0 Rz	$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ Y_{1/2} & 0 \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$		$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
Glissière d'axe (A, \vec{x})		Tx 0 0 0 0 0	$A \begin{Bmatrix} 0 & L_{A1/2} \\ Y_{1/2} & M_{A1/2} \\ Z_{1/2} & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$		$A \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$
Pivot glissant d'axe (A, \vec{x})		Tx Rx 0 0 0 0	$A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1/2} & M_{A1/2} \\ Z_{1/2} & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$		$A \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

Modélisation des actions mécaniques

Cas d'un problème plan de normale \vec{z}					
Nature de la liaison et repère associé : R	Schéma spatial	Mvts possibles	Torseur transmissible $\{\tau_{1/2}\}$	Schéma plan	Torseur transmissible
Appui plan de normale (A, \vec{y})		$\begin{matrix} T_x & 0 \\ 0 & R_y \\ T_z & 0 \end{matrix}$	$A \begin{Bmatrix} 0 & L_{A1/2} \\ Y_{1/2} & 0 \\ 0 & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$		$A \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{1/2} & - \\ - & N_{A1/2} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Ponctuelle de normale (A, \vec{x})		$\begin{matrix} 0 & R_x \\ T_y & R_y \\ T_z & R_z \end{matrix}$	$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$		$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Linéaire rectiligne de normale (A, \vec{z}) et d'axe (A, \vec{x})		$\begin{matrix} 0 & R_x \\ T_y & 0 \\ T_z & R_z \end{matrix}$	$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ 0 & M_{A1/2} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$		$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Linéaire annulaire d'axe (A, \vec{y})		$\begin{matrix} 0 & R_x \\ T_y & R_y \\ 0 & R_z \end{matrix}$	$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$		$A \begin{Bmatrix} X_{1/2} & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$